References

[1] Dorothy A. Bollman, *Some periodicity properties of transformations on vector spaces over residue class rings*, J. Soc. Indust. Appl. Math. 13 (1965), pp. 902–912.
[2] Beth H. Hannon and William L. Morris, *Tables of arithmetical functions related the Fibonacci numbers*, Oak Ridge National Laboratory Report ORNL-4261, 1968.
[3] J. L. Lagrange, *Oeuvres de LaGrange*, Gauthier Villars, Paris 7 (1877), pp. 5–182.
[4] D. W. Robinson, *The Fibonacci matrix modulo m*, Fibonacci Quart. 1 (1963), pp. 29–36.
[5] D. D. Wall, *Fibonacci series modulo m*, Amer. Math. Monthly 67 (1960), pp. 525–532.

Reçu par la Rédaction le 15. 7. 1968

ACTA ARITHMETICA
XVI (1969)

Mittlere Darstellungen natürlicher Zahlen als Differenz zweier k-ter Potenzen

von

EKKEHARD KRÄTZEL (Jena)

§ 1. Einleitung. Es bezeichne

$$t_k(\varrho) = 2\sum_{m^k-n^k=\varrho}' 1$$

mit nicht-negativen ganzen Zahlen m, n unter der Bedingung $m > n \geqslant 0$. Die natürliche Zahl k werde stets als größer oder gleich 3 vorausgesetzt. Der Strich am Summenzeichen bedeute, daß das Glied $n = 0$ den Faktor $\frac{1}{2}$ erhält. Untersucht werden soll die Funktion

$$T_k(x) = \sum_{1\leqslant\varrho\leqslant x} t_k(\varrho)$$

auf ihr Verhalten für große x. Ohne Schwierigkeiten kann man

$$T_k(x) = \frac{1}{2k\cos\dfrac{\pi}{k}}\cdot\frac{\Gamma^2\left(\dfrac{1}{k}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{2}{k}\right)}x^{\frac{2}{k}} + 2\zeta\left(\frac{1}{k-1}\right)\left(\frac{x}{k}\right)^{\frac{1}{k-1}} + O(x^{\frac{1}{k}})$$

beweisen. Es soll gezeigt werden, daß man die Abschätzung des Restes zu $O(x^{(k-1)/k^2})$ verbessern kann. Eine weitere Verbesserung der Abschätzung ist nicht möglich. Das wird sich als selbstverständlich erweisen, da gezeigt wird, daß sich in erster Näherung der Rest durch eine Funktion mit genau der genannten Größenordnung darstellen läßt. Es erhebt sich damit das Problem nach der Größenordnung der zweiten Näherung. Die Ergebnisse sind in den Sätzen 1 und 2 dargestellt. Es soll noch darauf hingewiesen werden, daß sich unmittelbare Parallelen zu den Ergebnissen über

$$R_{k,2}(x) = 4\sum_{\substack{n^k+m^k\leqslant x\\ n,m\geqslant 0}}'' 1$$

($n = 0$, $m = 0$ erhalten den Faktor $\frac{1}{2}$), dargestellt in [4], anbieten.

§ 2. Darstellung von $T_k(x)$. Ziel dieses Paragraphen ist der Beweis des die Abschätzung des Restes vorbereitenden Satzes.

Satz 1. *Es sei k eine natürliche Zahl $\geqslant 3$, $a=(2^{1/k}-1)^k$, $\psi(x)=x-[x]-\frac{1}{2}$. Die Funktion $N_k(t,x)$ sei Lösung der Gleichung*

$$(1)\qquad \big(N_k(t,x)+t\big)^k-N_k^k(t,x)=x.$$

$\zeta(s,q)$ bezeichne die für $0<q\leqslant 1$, $\mathrm{Re}(s)>1$ durch

$$\zeta(s,q)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(q+n)^s},\qquad \zeta(s,1)=\zeta(s)$$

definierte Zetafunktion. Dann gilt

$$(2)\qquad T_k(x)=\frac{1}{2k\cos\frac{\pi}{k}}\cdot\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{k}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{k}\right)}x^{\frac{2}{k}}+2\zeta\left(\frac{1}{k-1}\right)\left(\frac{x}{k}\right)^{\frac{1}{k-1}}-$$
$$-2k^{\frac{1}{k}}\zeta\left(-\frac{1}{k},\,1+[x^{\frac{1}{k}}]-x^{\frac{1}{k}}\right)x^{\frac{1}{k}-\frac{1}{k^2}}+\Delta_k(x)$$

mit

$$\Delta_k(x)=2\sum_{x<m^k\leqslant 2x}\psi\big((m^k-x)^{\frac{1}{k}}\big)-2\sum_{1\leqslant\nu^k\leqslant ax}\psi\big(N_k(\nu,x)\big)+O(1).$$

Bevor ich diesen Satz beweise, stelle ich in einem Hilfssatz alle notwendigen Eigenschaften von $N_k(t,x)$ zusammen. Dabei werde stets $N_k(t,1)=N_k$ gesetzt.

Hilfssatz 1.

$$(3)\qquad N_k(tx^{\frac{1}{k}},x)=x^{\frac{1}{k}}N_k,$$

$$(4)\qquad N_k'=-\frac{(N_k+t)^{k-1}}{(N_k+t)^{k-1}-N_k^{k-1}},$$

$$(5)\qquad N_k''=(k-1)\frac{(N_k+t)^{k-2}N_k^{k-2}}{\{(N_k+t)^{k-1}-N_k^{k-1}\}^3},$$

$$(6)\qquad N_k=(kt)^{-\frac{1}{k-1}}+O(t)\quad \text{für}\quad t\to 0,$$

$$(7)\qquad N_k'=\frac{1}{(1-k)t}(kt)^{-\frac{1}{k-1}}+O(1)\quad \text{für}\quad t\to 0.$$

Beweis. (3) ist unmittelbar klar, wenn man in (1) t durch $tx^{1/k}$ ersetzt und dann (1) mit $x=1$ benutzt. Differenziert man (1) für $x=1$ nach t, so ergibt sich

$$(8)\qquad (N_k+t)^{k-1}(N_k'+1)-N_k^{k-1}N_k'=0$$

und durch Auflösung nach N_k' sofort (4). Differentiation von (8) gibt

$$(k-1)\{(N_k+t)^{k-2}(N_k'+1)^2-N_k^{k-2}N_k'^2\}+\{(N_k+t)^{k-1}-N_k^{k-1}\}N_k''=0$$

und mit (8)

$$(k-1)\frac{\{N_k^k-(N_k+t)^k\}N_k^{k-2}N_k'^2}{(N_k+t)^k}+\{(N_k+t)^{k-1}-N_k^{k-1}\}N_k''=0.$$

Verwendet man hierzu noch (1) und (4), so erhält man (5). Zum Beweis von (6) und (7) schreibe man (1) mit $x=1$ in der Form

$$\sum_{\nu=1}^{k}\binom{k}{\nu}t^\nu N_k^{k-\nu}=1.$$

Daraus liest man sofort (6) ab. Nach (4) und (6) ist

$$N_k'=-\frac{\frac{1}{kt}+O(t^{\frac{1}{k-1}})}{(k-1)t(kt)^{-\frac{k-2}{k-1}}+O(t^{\frac{k+1}{k-1}})}=\frac{1}{(1-k)t}(kt)^{-\frac{1}{k-1}}\frac{1+O(t^{1+\frac{1}{k-1}})}{1+O(t^{1+\frac{1}{k-1}})},$$

also (7).

Beweis des Satzes 1. Wegen

$$T_k(x)=\sum_{1\leqslant\varrho\leqslant x}t_k(\varrho)=2\sum_{\substack{1\leqslant m^k-n^k\leqslant x\\ m>n\geqslant 0}}{}'\,1$$

gibt $T_k(x)$ in einem (ξ,η)-Koordinatensystem die doppelte Anzahl der Gitterpunkte des durch die Kurven $\xi=\eta\geqslant 0$, $\xi^k-\eta^k=x$ $(\eta\geqslant 0)$, $\eta=0$ begrenzten Gebietes an, wobei die Gitterpunkte $\xi=\eta$ ausgelassen werden und die Gitterpunkte $\eta=0$ nur zur Hälfte in Anrechnung gelangen. Diese Gitterpunkte werden jetzt in verschiedener Weise abgezählt. Zunächst werden nur die Gitterpunkte gezählt, die in dem durch $\xi=\eta\geqslant 0$, $\xi^k-\eta^k=x$ $(\eta\geqslant 0)$, $\eta=\xi-(ax)^{1/k}$, $\eta=0$ gegebenen Gebiet liegen. Dann werden die Gitterpunkte hinzugefügt, die in dem durch $\eta=\xi-(ax)^{1/k}$, $\xi=(2x)^{1/k}$, $\eta=0$ beschriebenen Dreieck liegen. Dabei wurden aber die in dem durch $\xi^k-\eta^k=x$ $(\eta\geqslant 0)$, $\xi=(2x)^{1/k}$, $\eta=0$ angegebenen Gebiet liegenden Gitterpunkte zu viel gezählt und müssen wieder abgezogen werden. Damit stellt sich $T_k(x)$ in der Form

$$T_k(x)=S_1+S_2+S_3$$

dar mit den Summen

$$S_1 = 2\sum_{1\le \nu^k\le ax}\ \sideset{}{'}\sum_{\substack{(n+\nu)^k-n^k\le x\\ n\ge 0}} 1,$$

$$S_2 = 2\sum_{ax<m^k\le 2x}\ \sideset{}{'}\sum_{0\le n<m-(ax)^{1/k}} 1,$$

$$S_3 = -2\sum_{x<m^k\le 2x}\ \sideset{}{'}\sum_{n^k<m^k-x} 1,$$

welche jetzt einzeln behandelt werden sollen.

I Die Summe S_1: Mit der Bezeichnung (1) ist

$$S_1 = 2\sum_{1\le \nu^k\le ax}\ \sideset{}{'}\sum_{0\le n\le N_k(\nu,x)} 1 = 2\sum_{1\le \nu^k\le ax}\left\{N_k(\nu, x)-\psi\big(N_k(\nu, x)\big)\right\}$$

und mit Hilfe der Euler–Maclaurinschen Summenformel

$$S_1 = 2\int_1^{(ax)^{1/k}} N_k(t, x)\,dt+N_k(1, x)-2N_k\big((ax)^{1/k}, x\big)\psi\big((ax)^{1/k}\big)+$$

$$+2\int_1^{(ax)^{1/k}} \frac{\partial}{\partial t}N_k(t, x)\,\psi(t)\,dt-2\sum_{1\le \nu^k\le ax}\psi\big(N_k(\nu, x)\big).$$

Nach (1) und der Festlegung von a ist

$$N_k\big((ax)^{1/k}, x\big) = x^{1/k}$$

und nach (3) und (6)

$$N_k(1, x) = \left(\frac{x}{k}\right)^{\frac{1}{k-1}}+O(1).$$

So hat man zunächst

$$S_1 = 2\int_1^{(ax)^{1/k}} N_k(t, x)\,dt+\left(\frac{x}{k}\right)^{\frac{1}{k-1}}-2x^{1/k}\psi\big((ax)^{1/k}\big)+ \tag{9}$$

$$+2\int_1^{(ax)^{1/k}} \frac{\partial}{\partial t}N_k(t, x)\,\psi(t)\,dt-2\sum_{1\le \nu^k\le ax}\psi\big(N_k(\nu, x)\big)+O(1).$$

Mit (3) und (6) folgt

$$2\int_1^{(ax)^{1/k}} N_k(t, x)\,dt = 2x^{2/k}\int_0^{a^{1/k}} N_k\,dt-2x^{2/k}\int_0^{x^{-1/k}} N_k\,dt$$

$$= 2x^{2/k}\int_0^{a^{1/k}} N_k\,dt-2\,\frac{k-1}{k-2}\left(\frac{x}{k}\right)^{\frac{1}{k-1}}+O(1).$$

Mit der Substitution

$$(y+t)^k-y^k = 1$$

wird daraus

$$2\int_1^{(ax)^{1/k}} N_k(t, x)\,dt \tag{10}$$

$$= -2x^{\frac{2}{k}}\int_1^{\infty} y\left\{y^{k-1}(1+y^k)^{\frac{1}{k}-1}-1\right\}dy-2\,\frac{k-1}{k-2}\left(\frac{x}{k}\right)^{\frac{1}{k-1}}+O(1)$$

$$= \left(2^{\frac{1}{k}-1}-1\right)x^{\frac{2}{k}}+(k-1)x^{\frac{2}{k}}\int_1^{\infty} y^k(1+y^k)^{\frac{1}{k}-2}\,dy-2\,\frac{k-1}{k-2}\left(\frac{x}{k}\right)^{\frac{1}{k-1}}+O(1).$$

Unter Beachtung von (7) wird gebildet

$$2\int_1^{(ax)^{1/k}} \frac{\partial}{\partial t}N_k(t, x)\,\psi(t)\,dt = 2\int_1^{(ax)^{1/k}}\left\{\frac{\partial}{\partial t}N_k(t, x)+\frac{1}{(k-1)t}\left(\frac{kt}{x}\right)^{-\frac{1}{k-1}}\right\}\psi(t)\,dt$$

$$-\frac{2}{k-1}\left(\frac{x}{k}\right)^{\frac{1}{k-1}}\int_1^{\infty} t^{-1-\frac{1}{k-1}}\,\psi(t)\,dt+O(1).$$

Das erste Integral der rechten Seite ist wegen (3) und (7)

$$2x^{\frac{1}{k}}\int_{x^{-1/k}}^{a^{1/k}}\left\{N_k'+\frac{1}{(k-1)t}\,(kt)^{-\frac{1}{k-1}}\right\}\psi\big(x^{\frac{1}{k}}t\big)\,dt = O(1).$$

Nach Hilfssatz 1 aus [4] ist

$$\int_1^{\infty} t^{-z-1}\psi(t)\,dt = -\frac{1}{z}\,\zeta(z)+\frac{z+1}{2z(z-1)}$$

und daher

$$2\int_1^{(ax)^{1/k}} \frac{\partial}{\partial t}N_k(t, x)\,\psi(t)\,dt = 2\zeta\left(\frac{1}{k-1}\right)\left(\frac{x}{k}\right)^{\frac{1}{k-1}}+\frac{k}{k-2}\left(\frac{x}{k}\right)^{\frac{1}{k-1}}+O(1). \tag{11}$$

(9), (10) und (11) ergeben damit

$$S_1 = \left(2^{\frac{1}{k}-1}-1\right)x^{\frac{2}{k}}+(k-1)x^{\frac{2}{k}}\int_1^{\infty} y^k(1+y^k)^{\frac{1}{k}-2}\,dy+ \tag{12}$$

$$+2\zeta\left(\frac{1}{k-1}\right)\left(\frac{x}{k}\right)^{\frac{1}{k-1}}-2x^{\frac{1}{k}}\psi\big((ax)^{\frac{1}{k}}\big)-2\sum_{1\le \nu^k\le ax}\psi\big(N_k(\nu, x)\big)+O(1).$$

II Die Summe S_2:

$$S_2 = 2\sum_{ax<m^k\leqslant 2x}\{m-[(ax)^{\frac{1}{k}}]-\tfrac{1}{2}\} = 2\sum_{ax<m^k\leqslant 2x}\left\{m-(ax)^{\frac{1}{k}}+\psi\left((ax)^{\frac{1}{k}}\right)\right\} \tag{13}$$

$$= [(2x)^{\frac{1}{k}}]^2+[(2x)^{\frac{1}{k}}]-[(ax)^{\frac{1}{k}}]^2-[(ax)^{\frac{1}{k}}]-2\{[(2x)^{\frac{1}{k}}]-[(ax)^{\frac{1}{k}}]\}\times$$

$$\times\left\{(ax)^{\frac{1}{k}}-\psi\left((ax)^{\frac{1}{k}}\right)\right\} = x^{\frac{2}{k}}-2x^{\frac{1}{k}}\psi\left((2x)^{\frac{1}{k}}\right)+2x^{\frac{1}{k}}\psi\left((ax)^{\frac{1}{k}}\right)+O(1).$$

III Die Summe S_3: Unter Verwendung der Euler–Maclaurinschen Summenformel findet man

$$S_3 = -2\sum_{x<m^k\leqslant 2x}\{[(m^k-x)^{\frac{1}{k}}]+\tfrac{1}{2}\}+O(1) \tag{14}$$

$$= -2\sum_{x<m^k\leqslant 2x}\left\{(m^k-x)^{\frac{1}{k}}-\psi\left((m^k-x)^{\frac{1}{k}}\right)\right\}+O(1)$$

$$= -2\int_{x^{1/k}}^{(2x)^{1/k}}(t^k-x)^{\frac{1}{k}}\,dt+2x^{\frac{1}{k}}\psi\left((2x)^{\frac{1}{k}}\right)-$$

$$-2\int_{x^{1/k}}^{(2x)^{1/k}}t^{k-1}(t^k-1)^{\frac{1}{k}-1}\psi(t)\,dt+2\sum_{x<m^k\leqslant 2x}\psi\left((m^k-x)^{\frac{1}{k}}\right)+O(1).$$

Für das erste Integral in (14) hat man

$$-2\int_{x^{1/k}}^{(2x)^{1/k}}(t^k-x)^{\frac{1}{k}}\,dt = -2^{\frac{1}{k}}x^{\frac{2}{k}}+x^{\frac{2}{k}}\int_{1}^{2^{1/k}}(t^k-1)^{\frac{1}{k}-1}\,dt \tag{15}$$

$$= -2^{\frac{1}{k}}x^{\frac{2}{k}}+\frac{1}{k}x^{\frac{2}{k}}\left\{\int_1^\infty t^{\frac{1}{k}-1}(t-1)^{\frac{1}{k}-1}\,dt-\int_2^\infty t^{\frac{1}{k}-1}(t-1)^{\frac{1}{k}-1}\,dt\right\}$$

$$= -2^{\frac{1}{k}}x^{\frac{2}{k}}+\frac{1}{k}x^{\frac{2}{k}}\left\{\int_0^1 t^{-\frac{2}{k}}(1-t)^{\frac{1}{k}-1}\,dt-\int_1^\infty t^{\frac{1}{k}-1}(t+1)^{\frac{1}{k}-1}\,dt\right\}$$

$$= -2^{\frac{1}{k}-1}x^{\frac{2}{k}}+\frac{1}{k}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{k}\right)}{\Gamma\left(1-\frac{1}{k}\right)}x^{\frac{2}{k}}-(k-1)x^{\frac{2}{k}}\int_1^\infty y^k(1+y^k)^{\frac{1}{k}-2}\,dy$$

$$= -2^{\frac{1}{k}-1}x^{\frac{2}{k}}+\frac{1}{2k\cos\frac{\pi}{k}}\cdot\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{k}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{k}\right)}x^{\frac{2}{k}}-(k-1)x^{\frac{2}{k}}\int_1^\infty y^k(1+y^k)^{\frac{1}{k}-2}\,dy.$$

Im zweiten Integral von (14) rührt der Hauptanteil für große x von der unmittelbaren Nachbarschaft des Punktes $t = x^{1/k}$ her; man findet nach [3], S. 48, leicht

$$-2\int_{x^{1/k}}^{(2x)^{1/k}}t^{k-1}(t^k-x)^{\frac{1}{k}-1}\psi(t)\,dt \tag{16}$$

$$= \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_{x^{1/k}}^{(2x)^{1/k}}t^{k-1}(t^k-x)^{\frac{1}{k}-1}\sin 2\pi nt\,dt$$

$$= \frac{4k^{1/k}\Gamma\left(1+\frac{1}{k}\right)}{(2\pi)^{1+1/k}}x^{\frac{1}{k}-\frac{1}{k^2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(2\pi nx^{1/k}+\frac{\pi}{2k}\right)}{n^{1+1/k}}+O(1)$$

$$= -2k^{\frac{1}{k}}\zeta\left(-\frac{1}{k},1+[x^{\frac{1}{k}}]-x^{\frac{1}{k}}\right)x^{\frac{1}{k}-\frac{1}{k^2}}+O(1).$$

(14), (15) und (16) liefern somit

$$S_3 = \frac{1}{2k\cos\frac{\pi}{k}}\cdot\frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{k}\right)}{\Gamma\left(\frac{2}{k}\right)}x^{\frac{2}{k}}-(k-1)x^{\frac{2}{k}}\int_1^\infty y^k(1+y^k)^{\frac{1}{k}-2}\,dy- \tag{17}$$

$$-2^{\frac{1}{k}-1}x^{\frac{2}{k}}+2x^{\frac{1}{k}}\psi\left((2x)^{\frac{1}{k}}\right)-2k^{\frac{1}{k}}\zeta\left(-\frac{1}{k},1+[x^{\frac{1}{k}}]-x^{\frac{1}{k}}\right)x^{\frac{1}{k}-\frac{1}{k^2}}+$$

$$+2\sum_{x<m^k\leqslant 2x}\psi\left((m^k-x)^{\frac{1}{k}}\right)+O(1).$$

Die Addition von (12), (13) und (17) ergeben die Behauptung (2).

§ 3. Abschätzung des Restes.

SATZ 2. *Für $k\geqslant 3$ und geeignet gewähltes $\varepsilon>0$ ist*

$$\Delta_k(x) = O\left(x^{\frac{2}{3k}-\varepsilon}\right). \tag{18}$$

Der Beweis dieser Abschätzung erfolgt mit der van der Corputschen Methode. Dazu werden die beiden folgenden Hilfssätze aus [1] und [2] benötigt.

Voraussetzungen:

B. *Die reelle Funktion $\psi(x)$ habe die Periode 1, sei für $0<x<1$ monoton, und es sei*

$$|\psi(x)|\leqslant 1,\qquad \int_0^1\psi(x)\,dx = 0.$$

C. *Es sei* $\alpha+1 \leqslant \beta$, $f(t)$ *im Intervall* $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ *reell, zweimal differenzierbar,* $f''(t)$ *monoton, stets positiv oder stets negativ.*

D. *Es sei die Voraussetzung* C *erfüllt. Es sei* $\eta > 0$, $\eta' > 0$, $m \geqslant 2$ *ganz,* $f(t)$ *im Intervall* $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$ $(m+1)$*-mal differenzierbar. Es sei für* $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$

$$|f'''(t)| \leqslant |f''(t)|^{\frac{4}{3}+\eta'},$$

und jedes System von $m-1$ *nicht-negativen ganzen Zahlen* $h_1, h_2, \ldots, h_{m-1}$ *mit* $h_1+h_2+\ldots+h_{m-1} = m-1$ *habe die Eigenschaft*

$$|f^{(h_1+2)}(t) f^{(h_2+2)}(t) \cdot \ldots \cdot f^{(h_{m-1}+2)}(t)| \leqslant |f''(t)|^{\frac{5}{3}m-1+\eta}.$$

HILFSSATZ 2. *Unter den Voraussetzungen* B *und* C *gibt es eine absolute Konstante* c_1 *mit der Eigenschaft*

$$(19) \qquad \Big|\sum_{\alpha \leqslant n \leqslant \beta} \psi\big(f(n)\big)\Big| < c_1 \left(\int_\alpha^b |f''(t)|^{\frac{1}{3}} dt + \frac{1}{\sqrt{|f''(\alpha)|}} + \frac{1}{\sqrt{|f''(\beta)|}} \right).$$

HILFSSATZ 3. *Unter den Voraussetzungen* B *und* D *gibt es eine höchstens von* m *abhängige Zahl* c_2 *und eine höchstens von* m, η, η' *abhängige Zahl* ω *mit der Eigenschaft*

$$(20) \qquad \Big|\sum_{\alpha \leqslant n \leqslant \beta} \psi\big(f(n)\big)\Big| < c_2 \left(\int_a^b |f''(t)|^{\frac{1}{3}+\omega} dt + \frac{1}{\sqrt{|f''(\alpha)|}} + \frac{1}{\sqrt{|f''(\beta)|}} \right).$$

Beweis des Satzes 2. Nach (2) ist zu zeigen:

$$(21) \qquad \sum_{x < n^k \leqslant 2x} \psi\big((n^k - x)^{\frac{1}{k}}\big) = O(x^{\frac{2}{3k}-\varepsilon}),$$

$$(22) \qquad \sum_{1 \leqslant n^k \leqslant ax} \psi\big(N_k(n, x)\big) = O(x^{\frac{2}{3k}-\varepsilon}).$$

Den Beweis von (21) möchte ich übergehen, da man bis auf triviale Abänderungen wörtlich den Beweis des Satzes 3 aus [4] übertragen kann. Nun wird die Summe in (22) in zwei Teilsummen zerlegt:

$$\sum_{1 \leqslant n^k \leqslant ax} = \sum_{1 \leqslant n \leqslant (ax)^\gamma} + \sum_{(ax)^\gamma < n \leqslant (ax)^{1/k}}.$$

Dabei bedeute γ irgendeine Zahl mit $1/(2k-1) < \gamma < 1/k$. Die erste Teilsumme wird mit Hilfssatz 2 behandelt. Mit $\alpha = 1$, $\beta = (ax)^\gamma$,

$f(n) = N_k(n, x)$ sind offensichtlich die Voraussetzungen B und C erfüllt, so daß nach (19) folgt

$$(23) \qquad \sum_{1 \leqslant n \leqslant (ax)^\gamma} \psi\big(N_k(n, x)\big) = O\left(\int_1^{(ax)^\gamma} \left|\frac{\partial^2}{\partial t^2} N_k(t, x)\right|^{\frac{1}{3}} dt \right) + O\left(\left|\frac{\partial^2}{\partial t^2} N_k(1, x)\right|^{-\frac{1}{2}} \right) + $$
$$+ O\left(\left|\frac{\partial^2}{\partial t^2} N_k\big((ax)^\gamma, x\big)\right|^{-\frac{1}{2}} \right).$$

Nun ist nach (3), (5) und (6)

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} N_k(t, x) = (k-1)x \frac{\big(N_k(t, x)+t\big)^{k-2} N_k^{k-2}(t, x)}{\big\{\big(N_k(t, x)+t\big)^{k-1} - N_k^{k-1}(t, x)\big\}^3},$$

also mit $0 \leqslant \delta \leqslant \gamma$, $1/k - \delta = \delta'$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} N_k\big((ax)^\delta, x\big)$$
$$= (k-1) x^{1-(k+1)\delta} \frac{\big(x^{\delta'} N_k(a^\delta x^{-\delta'}, 1) + a^\delta\big)^{k-2} x^{(k-2)\delta'} N_k^{k-2}(a^\delta x^{-\delta'}, 1)}{\big\{\big(x^{\delta'} N_k(a^\delta x^{-\delta'}, 1) + a^\delta\big)^{k-1} + x^{(k-1)\delta'} N_k^{k-1}(a^\delta x^{-\delta'}, 1)\big\}^3}$$
$$= O(x^{1-(k+1)\delta + \frac{k-2}{k-1}k\delta'}) = O(x^{\frac{2k-3}{k-1} - \frac{2k^2-2k-1}{k-1}\delta}).$$

Dieses O-Glied geht mit $x \to \infty$ umso stärker gegen Null, je größer δ ist, für $\delta = 1/k$ demnach wie $x^{-1/k}$. Bei weiterer Verwendung von (3) wird aus (23) zunächst

$$(24) \qquad \sum_{1 \leqslant n \leqslant (ax)^\gamma} \psi\big(N_k(n, x)\big) = O\Big(x^{\frac{2}{3k}} \int_{x^{-1/k}}^{a^\gamma x^{\gamma-1/k}} |N_k''|^{\frac{1}{3}} dt\Big) + O(x^{\frac{1}{2k}}).$$

Nun ist nach (7)

$$N_k' = O(t^{-1-\frac{1}{k-1}})$$

für $t \to 0$, und da die höheren Ableitungen für $t \to 0$ offensichtlich asymptotische Entwicklungen gestatten, so darf weiter differenziert werden, so daß

$$(25) \qquad N_k^{(\nu)} = O(t^{-\nu-\frac{1}{k-1}})$$

gilt. Mit $\nu = 2$ und wegen $\gamma < 1/k$ erhält man folglich für (24)

$$(26) \qquad \sum_{1 \leqslant n \leqslant (ax)^\gamma} \psi\big(N_k(n, x)\big) = O\Big(x^{\frac{2}{3k} - \frac{k-2}{3(k-1)}\left(\frac{1}{k}-\gamma\right)}\Big) = O(x^{\frac{2}{3k}-\varepsilon}).$$

Bemerkung: Die bisherigen Rechnungen bleiben für $\gamma = 1/k$ richtig, so daß man bei alleiniger Verwendung des Hilfssatzes 2 (18) mit $\varepsilon = 0$ erhält. Für $k > 3$ könnte man sich damit zufrieden geben wegen

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2} > \frac{2}{3k},$$

aber für $k = 3$ ist

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} = \frac{2}{9}.$$

Für die Abschätzung der zweiten Teilsumme

$$\sum_{(ax)^\gamma < n \leqslant (ax)^{1/k}} \psi\big(N_k(n, x)\big)$$

wird Hilfssatz 3 mit $m = 4$ benutzt. Es sind also zunächst die Voraussetzungen D mit $(ax)^\gamma \leqslant t \leqslant (ax)^{1/k}$ zu überprüfen:

$$\left|\frac{\partial^3}{\partial t^3} N_k(t, x)\right| \leqslant \left|\frac{\partial^2}{\partial t^2} N_k(t, x)\right|^{\frac{4}{3}+\eta'},$$

$$\left|\frac{\partial^3}{\partial t^3} N_k(t, x)\right| \leqslant \left|\frac{\partial^2}{\partial t^2} N_k(t, x)\right|^{\frac{17}{9}+\frac{\eta}{3}},$$

$$\left|\frac{\partial^3}{\partial t^3} N_k(t, x) \frac{\partial^4}{\partial t^4} N_k(t, x)\right| \leqslant \left|\frac{\partial^2}{\partial t^2} N_k(t, x)\right|^{\frac{14}{3}+\eta},$$

$$\left|\frac{\partial^5}{\partial t^5} N_k(t, x)\right| \leqslant \left|\frac{\partial^2}{\partial t^2} N_k(t, x)\right|^{\frac{11}{3}+\eta}.$$

Ersetzt man hierin t durch $tx^{1/k}$ und beachtet (3), so erscheinen diese notwendigen Voraussetzungen in der Form

$$x^{3\eta'-2} \leqslant |N_k''|^{(4+3\eta')k} |N_k'''|^{-3k}, \tag{27}$$

$$x^{3\eta-1} \leqslant \begin{cases} |N_k''|^{(17+3\eta)k} |N_k'''|^{-9k}, \\ |N_k''|^{(14+3\eta)k} |N_k'''|^{-8k} |N_k^{(4)}|^{-3k}, \\ |N_k''|^{(11+3\eta)k} |N_k^{(5)}|^{-3k}, \end{cases} \tag{28}$$

jetzt für $a^\gamma x^{\gamma-1/k} \leqslant t \leqslant a^{1/k}$. In diesem Intervall verschwindet N_k'', wie man (5) unmittelbar entnimmt, nirgends. Befindet sich t in der unmittelbaren Nachbarschaft des linken Intervallendes, so wachsen N_k'' und die höheren Ableitungen mit x. Nach (25) verhält sich die rechte Seite von (27) in der Nachbarschaft von $a^\gamma x^{\gamma-1/k}$ wie

$$O\big(t^{-((2k-1)3\eta'-k+2)\frac{k}{k-1}}\big) = O\big(x^{((2k-1)3\eta'-k+2)\frac{1-\gamma^k}{k-1}}\big).$$

Damit (27) erfüllt ist, muß

$$3\eta'-2 < \big((2k-1)3\eta'-k+2\big)\frac{1-\gamma^k}{k-1}$$

bzw.

$$\eta' < \frac{1+\gamma(k-2)}{3\big((2k-1)\gamma-1\big)}$$

sein. Wegen $1/(2k-1) < \gamma < 1/k$ ist dann jedes η' mit $0 < \eta' < \frac{2}{3}$ geeignet. Für ein solches η' ist (27) für hinreichend große x erfüllt. Das Nachprüfen von (28) erfolgt in genau der gleichen Weise. — Nach (20) bekommt man daher

$$\sum_{(ax)^\gamma < n \leqslant (ax)^{1/k}} \psi\big(N_k(n, x)\big) = O\left(\int_{(ax)^\gamma}^{(ax)^{1/k}} \left|\frac{\partial^2}{\partial t^2} N_k(t, x)\right|^{\frac{1}{3}+\omega} dt\right) + O\big(x^{\frac{1}{2k}}\big)$$
$$= O\left(x^{\frac{2}{3k}-\frac{\omega}{k}} \int_{a^\gamma x^{\gamma-1/k}}^{a^{1/k}} |N_k''|^{\frac{1}{3}+\omega} dt\right) + O\big(x^{\frac{1}{2k}}\big)$$
$$= O\big(x^{\frac{2}{3k}-\frac{\omega}{k}}\big) + O\big(x^{\frac{2}{3k}-\frac{\omega}{k}+((2k-1)3\omega-k+2)\frac{1-\gamma k}{3k(k-1)}}\big) + O\big(x^{\frac{1}{2k}}\big).$$

Der Exponent im zweiten O-Glied ist immer kleiner als $2/3k$, denn wegen $k \geqslant 3$, $1/(2k-1) < \gamma < 1/k$ ist

$$-\frac{\omega}{k} + \big((2k-1)3\omega-k+2\big)\frac{1-\gamma k}{3k(k-1)} < \frac{1-(2k-1)\gamma}{k-1}\,\omega < 0.$$

Folglich ist

$$\sum_{(ax)^\gamma < n \leqslant (ax)^{1/k}} \psi\big(N_k(n, x)\big) = O\big(x^{\frac{2}{3k}-\varepsilon}\big). \tag{29}$$

(26) und (29) ergeben nun (22) und mit (21) die Behauptung (18).

Literaturverzeichnis

[1] J. G. van der Corput, *Zahlentheoretische Abschätzungen mit Anwendung auf Gitterpunktprobleme*, Math. Zeitschrift 17 (1923), S. 250–259.

[2] — *Neue zahlentheoretische Abschätzungen*, Math. Ann. 89 (1923), S. 215–254.

[3] A. Erdélyi, *Asymptotic expansions*, Dover Publications 1956.

[4] E. Krätzel, *Bemerkungen zu einem Gitterpunktsproblem*, Math. Ann. 179 (1969), S. 90–96.

[5] — *Ein Teilerproblem*, J. Reine Angew. Math. 235 (1969), S. 150–174.

Reçu par la Rédaction le 15. 11. 1968

ACTA ARITHMETICA
XVI (1969)

Reducibility of lacunary polynomials I

by

A. SCHINZEL (Warszawa)

To the memory of my teachers
Wacław Sierpiński and Harold Davenport

§ 1. The present paper is in close connection with [9], the notation of that paper is used and extended (for a result which requires little notation see Corollary to Theorem 2). Reducibility means reducibility over the rational field Q. Constants are considered neither reducible nor irreducible. If $f(x_1, \ldots, x_k) \neq 0$ is a polynomial, then

$$f(x_1, \ldots, x_k) \overset{\text{can}}{=} \text{const} \prod_{\sigma=1}^{s} f_\sigma(x_1, \ldots, x_k)^{e_\sigma}$$

means that polynomials f_σ are irreducible and relatively prime in pairs.

If $\Phi(x_1, \ldots, x_k) = f(x_1, \ldots, x_k) \prod_{i=1}^{k} x_i^{a_i}$ where f is a polynomial, $\big(f(x_1, \ldots, x_k), x_1 \ldots x_k\big) = 1$ and a_i are integers then

$$J\Phi(x_1, \ldots, x_k) = f(x_1, \ldots, x_k)$$

(this definition is equivalent to one given in [9]). Let

$$J\Phi(x_1, \ldots, x_k) \overset{\text{can}}{=} \text{const} \prod_{\sigma=1}^{s} f_\sigma(x_1, \ldots, x_k)^{e_\sigma}.$$

We set

$$K\Phi(x_1, \ldots, x_k) = \text{const} \prod\nolimits_1 f_\sigma(x_1, \ldots, x_k)^{e_\sigma},$$
$$L\Phi(x_1, \ldots, x_k) = \text{const} \prod\nolimits_2 f_\sigma(x_1, \ldots, x_k)^{e_\sigma},$$

where Π_1 is extended over these f_σ which do not divide $J(x_1^{\delta_1} \ldots x_k^{\delta_k} - 1)$ for any $[\delta_1, \ldots, \delta_k] \neq 0$, Π_2 is extended over all f_σ such that

$$(*) \qquad Jf_\sigma(x_1^{-1}, \ldots, x_k^{-1}) \neq \pm f_\sigma(x_1, \ldots, x_k).$$

The leading coefficients of $K\Phi$ and $L\Phi$ are assumed equal to that of $J\Phi$. In particular for $k = 1$, $K\Phi(x)$ equals $J\Phi(x)$ deprived of all its cyclotomic factors and $L\Phi(x)$ equals $J\Phi(x)$ deprived of all its monic irreducible reciprocal factors (a polynomial $f(x)$ is reciprocal if $J(x^{-1}) = \pm f(x)$).