ACTA ARITHMETICA
XVI (1969)

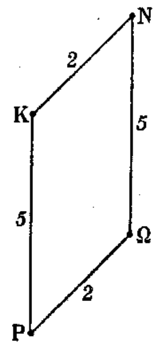
Über den Klassenkörper zum quadratischen Zahlkörper mit der Diskriminante -47

(Fortsetzung)

von

HELMUT HASSE (z. Zt. Honolulu, Hawaii)
und JOSEPH LIANG (Columbus, Ohio)

0. Diese Arbeit knüpft an die Schlußbemerkung einer Arbeit [1] gleichen Titels des erstgenannten Verfassers an. Die dort in Aussicht gestellte Untersuchung wurde inzwischen durch eine gemeinsame Arbeit [2] des zweitgenannten Verfassers mit Zassenhaus in Gang gesetzt, deren



Ergebnisse es uns dann ermöglicht haben, die in jener Schlußbemerkung gestellten Fragen vollständig zu beantworten.

In [1] wurde der Klassenkörper $\mathbf{N}$ zu dem quadratischen Zahlkörper $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{P}(\sqrt{-47})$ — dem ersten imaginär-quadratischen Zahlkörper mit durch 5 teilbarer Klassenzahl, nämlich $h = 5$ — nach den rein-arithmetischen Methoden der allgemeinen Klassenkörpertheorie numerisch konstruiert.

Man weiß aus der Klassenkörpertheorie, daß $\mathbf{N}/\boldsymbol{\Omega}$ zyklisch vom Grade 5 und $\mathbf{N}/\mathbf{P}$ normal mit Diedergruppe der Ordnung $2\cdot 5$ ist. Demnach entsteht $\mathbf{N}$ durch Komposition von $\boldsymbol{\Omega}$ mit einem nicht-normalen Körper $\mathbf{K}$ vom Grade 5, der als der einzige reelle unter seinen Konjugierten normiert gedacht sei. Die in der Schlußbemerkung von [1] gestellten Fragen betreffen den Vergleich der so konstruierten Erzeugung dieses Klassenkörpers $\mathbf{N}/\mathbf{\Omega}$ mit den aus der Transformationstheorie der Modulfunktionen, also unter Zuhilfeneahme analytischer Methoden gewonnenen Erzeugungen, wie sie in Gestalt zweier anderslautender erzeugende r Gleichungen in den in [1], S. 420 zitierten Algebralehrbüchern von Weber und Fricke angegeben sind(¹). Für diesen Vergleich ist es nötig, die Grundlagen der Konstruktion aus [1] noch einmal kurz aufzurollen und dabei nach der algebraischen Seite hin auszubauen.

1. Die Konstruktion in [1] beruht auf dem allgemein für Erweiterungen dieses Typus bestehenden umkehrbar eindeutigen Zusammenhang zwischen einerseits den Erzeugungen

$$(1)\qquad \mathbf{K} = \mathbf{P}(\theta),\quad \mathbf{N} = \mathbf{\Omega}(\theta)\quad \text{mit}\quad f(\theta) = 0$$

durch die (einzige) reelle Wurzel θ eines geeigneten irreduziblen Polynoms 5-ten Grades $f(x)$ über $\mathbf{P}$, und andererseits den Erzeugungen

$$(2)\qquad \mathbf{N}^5 = \mathbf{\Omega}^5(\sqrt[5]{\omega})$$

durch reelle 5-te Radikale $\sqrt[5]{\omega}$ für die zugeordnete zyklische Erweiterung $\mathbf{N}^5/\mathbf{\Omega}^5$, die aus $\mathbf{N}/\mathbf{\Omega}$ durch Adjunktion der 5-ten Einheitswurzeln entsteht. Dabei liefern genau diejenigen Radikanden $\omega \neq 0$ aus dem größten reellen Teilkörper $\mathbf{\Omega}_0^5$ von $\mathbf{\Omega}^5$ Erweiterungen des in Rede stehenden Typus, für welche die Anwendung der erzeugenden Automorphismen S (der Ordnung 4) von $\mathbf{P}^5/\mathbf{P}$ und T (der Ordnung 2) von $\mathbf{\Omega}/\mathbf{P}$, aufgefaßt als solche von $\mathbf{\Omega}^5/\mathbf{\Omega}$ bzw. von $\mathbf{\Omega}^5/\mathbf{P}^5$, die Wirkung

$$(3)\qquad \omega^S \underset{5}{=} \omega^2,\quad \omega^T \underset{5}{=} \omega^{-1}\quad \text{in } \mathbf{\Omega}^5 \text{ und dann auch in } \mathbf{\Omega}_0^5$$

hat, wobei S gegenüber S^{-1} durch die Festsetzung $\varrho^S = \varrho^2$ für eine primitive 5-te Einheitswurzel ϱ normiert ist. Da $\mathbf{\Omega}_0^5$ innerhalb $\mathbf{\Omega}^5$ durch die elementweise Invarianz beim Automorphismus TS^2 gekennzeichnet ist, hat man $\omega^T = \omega^{S^2}$, so daß bei der hier vorgenommenen Beschränkung auf relle Radikanden ω die zweite Bedingung (3) eine Folge der ersten ist und auch in der Form $\omega^{1+S^2} \underset{5}{=} 1$ oder also

$$(3_0)\qquad n(\omega) \underset{5}{=} 1\quad \text{in } \mathbf{\Omega}_0^5 \text{ und dann auch in } \mathbf{P}_0^5 = \mathbf{P}(\sqrt{5})$$

geschrieben werden kann, wo $n(\ )$ die Relativnormbildung von $\mathbf{\Omega}_0^5/\mathbf{P}_0^5$ bezeichnet. Im folgenden sei wie in [1] die Anwendung des Automorphismus S einfach durch einen Strich angedeutet:

$$n(\omega) = \omega\omega'' \underset{5}{=} 1\quad \text{in}\quad \mathbf{P}(\sqrt{5}).$$

Siehe zu alledem den Körpergraph und die Automorphismentafel in [1], S. 426.

(¹) In jenem Zitat muß es H. Weber (statt W. Weber) heißen.

Der umkehrbar eindeutige Zusammenhang zwischen den vorstehend besprochenen beiden Erzeugungen (1) und (2) wird vermittelt durch das einer Erzeugenden θ von $\mathbf{K}/\mathbf{P}$ zugeordnete Lagrangesche Radikal

$$(4)\qquad L = \sum_{\mu \bmod 5} \varrho^{-\mu}\theta^{R^\mu}$$

aus dem größten reellen Teilkörper $\mathbf{N}_0^5$ von $\mathbf{N}^5$, wo R ein erzeugender Automorphismus (der Ordnung 5) von $\mathbf{N}/\mathbf{\Omega}$, aufgefaßt als solcher von $\mathbf{N}^5/\mathbf{\Omega}^5$ und damit auch von $\mathbf{N}_0^5/\mathbf{\Omega}_0^5$ ist. Dieses Radikal liefert in der Form

$$(5)\qquad \omega = L^5$$

einen möglichen Radikanden ω aus $\mathbf{\Omega}_0^5$. Umgekehrt ist für jeden möglichen Radikanden ω aus $\mathbf{\Omega}_0^5$ die reelle $\sqrt[5]{\omega}$ Lagrangesches Radikal zu einer Erzeugenden θ von $\mathbf{K}/\mathbf{P}$, und zwar liegt θ durch ω eindeutig bis auf eine willkürliche additive rationale Zahl fest. Man erhält diese Schar von Erzeugenden θ durch Spurbildung von $\mathbf{N}_0^5/\mathbf{K}$ in der Gestalt

$$(6)\qquad \theta = \frac{1}{5}\left(a + \mathrm{Sp}(\sqrt[5]{\omega})\right) = \frac{1}{5}\Big(a + \sum_{\nu \bmod 4} \sqrt[5]{\omega^{S^\nu}}\Big)\qquad (a \in \mathbf{P} \text{ willkürlich})$$
$$= \frac{1}{5}\left(a + \sqrt[5]{\omega} + \sqrt[5]{\omega'} + \sqrt[5]{\omega''} + \sqrt[5]{\omega'''}\right),$$

wobei S als erzeugender Automorphismus von $\mathbf{N}^5/\mathbf{N}$ und damit auch von $\mathbf{N}_0^5/\mathbf{K}$ aufgefaßt ist.

2. Unter den vorstehend beschriebenen Erweiterungen ist nun der hier zu betrachtende Klassenkörper $\mathbf{N}/\mathbf{\Omega}$ dadurch gekennzeichnet, daß der Radikand ω eine sogenannte „singuläre Primärzahl" ist, d.h. eine 5-te Divisorpotenz, aber nicht eine 5-te Zahlpotenz ist:

$$\omega \underset{5}{\cong} 1,\quad \omega \underset{5}{\neq} 1\quad \text{in } \mathbf{\Omega}^5 \text{ und dann auch in } \mathbf{\Omega}_0^5,$$

welche überdies primär ist, d.h. der Kongruenz

$$\omega \underset{5}{\equiv} 1 \bmod 5\pi\quad \text{und dann auch } \bmod 5\pi_0$$

genügt, wo π mit $\pi^4 \cong 5$ und π_0 mit $\pi_0^4 \cong 5$ die Primhauptdivisoren von 5 in $\mathbf{\Omega}^5$ bzw. $\mathbf{\Omega}_0^5$ sind.

Wie in [1], S. 430 festgestellt, ist die Klassenzahl von $\mathbf{\Omega}^5$ genau durch 5^1 teilbar (nämlich gleich $2\cdot 5$), so daß nur eine einzige unverzweigte zyklische Erweiterung 5-ten Grades $\mathbf{N}^5/\mathbf{\Omega}^5$ existiert. Daher liegt eine singuläre Primärzahl aus $\mathbf{\Omega}^5$ genau bis auf die trivialen Substitutionen

$$(7)\qquad \omega \to \omega^\mu \alpha^5\qquad \left\{\begin{array}{l} \mu \bmod 5,\ \mu \not\equiv 0 \bmod 5 \\ \alpha \in \mathbf{\Omega}^5,\ \alpha \neq 0 \end{array}\right\}$$

fest, und wenn sie wie hier reell sein soll, genau bis auf die trivialen Substitutionen

$$(7_0) \qquad \omega \to \omega^{\mu} \alpha_0^5 \qquad \left\{ \begin{array}{l} \mu \bmod 5,\ \mu \not\equiv 0 \bmod 5 \\ \alpha_0 \in \Omega_0^5,\ \alpha_0 \neq 0 \end{array} \right\}.$$

Das letztere ist nach den vorstehenden Ausführungen auch schon daraus klar, daß die Klassenzahl von Ω genau durch 5^1 teilbar (nämlich gleich 5) ist, so daß nur eine einzige unverzweigte zyklische Erweiterung 5-ten Grades $\mathbf{N}/\Omega$ existiert, eben der hier zu betrachtende Klassenkörper.

3. Für die Konstruktion in [1] bedeutet diese nach der algebraischen Seite hin ausgebaute Grundlegung eine willkommene Vereinfachung. Da nämlich danach von vornherein feststeht, daß man mit einer reellen singulären Primärzahl ω auskommt, braucht man in dem Ermittlungsschema für ω (S. 431)(²) statt der Zahlen $w, \varrho, \vartheta, \vartheta', \vartheta''$, aus Ω^5 nur das dort zuvor bestimmte Grundeinheitensystem

$$e = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{47-5\sqrt{5}}{2} + \frac{-5+\sqrt{5}}{2}\pi_0\right), \qquad \varepsilon_0' = \frac{1}{2}\left(\frac{47+5\sqrt{5}}{2} + \frac{5+\sqrt{5}}{2}e'\pi_0\right)$$

von Ω_0^5 und statt des Primhauptdivisors $\pi = \sqrt{-e\sqrt{5}}$ von 5 in Ω_5 nur den Primhauptdivisor

$$\pi_0 = \sqrt{-e\sqrt{5}\cdot -47} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}47}$$

von 5 in Ω_0^5 zugrundezulegen. Das in dieser Weise vereinfachte Schema lautet(³):

	$1+\pi_0$	$1+\sqrt{5}$	$1+\pi_0\sqrt{5}$	$1+5$	
e		4		2	
ε			2		2
ε_0'			1		1

(²) Statt der dort versehentlich eingesetzten primitiven $5\cdot 47$-ten Einheitswurzel ζ muß natürlich, wie auch schon vorher auf S. 430 oben, die primitive 5-te Einheitswurzel ϱ stehen.

(³) Die darin angegebenen Exponenten mod 5 beziehen sich auf die durch Potenzierung mit $5-1=4$ zu π_0-adischen Einseinheiten gemachten Einheiten aus der ersten Spalte; diese Einseinheiten sind $\underset{5}{\equiv} e^{-1}, \varepsilon_0^{-1}, \varepsilon_0'^{-1}$, so daß die Exponenten der Einheiten aus der ersten Spalte die entgegengesetzten Werte mod 5 haben.

Es ergibt direkt, ohne den Umweg über Ω^5, die in Ω_0^5 gelegene singuläre Primärzahl

$$(8) \qquad \omega = \varepsilon_0^2 \varepsilon_0' = \frac{1}{2}\left(\frac{9353+4225\sqrt{5}}{2} - 65\,\frac{11+5\sqrt{5}}{2}\pi_0\right).$$

Das Nichtmitsprechen der bereits im quadratischen Zahlkörper Ω gelegenen komplexen 5-ten Divisorpotenzzahl $w = \dfrac{9+\sqrt{-47}}{2}$ — siehe die Bemerkung S. 432 oben — wird hierdurch von dem Charakter einer Zufälligkeit entkleidet.

Die am Schluß von [1] aus dem so bestimmten Radikand ω gebildete Erzeugende

$$A = \mathrm{Sp}(\sqrt[5]{\omega})$$

des reellen Teilkörpers $\mathbf{K}/\mathbf{P}$ von $\mathbf{N}/\Omega$ entspricht nicht ganz der hier in (6) gegebenen Zuordnungsvorschrift; es fehlt der dortige Nenner 5. Das irreduzible Polynom über $\mathbf{P}$, dessen reelle Wurzel A ist, wurde, wie am Schluß von [1] angegeben, durch Kl. Alber zu

$$(9) \qquad g(x) = x^5 \quad + 10x^3 - 235x^2 + 2160x - 9353$$

berechnet. Nun ist die Primzahl 5 in $\Omega/\mathbf{P}$ und $\mathbf{N}/\Omega$ und damit auch in $\mathbf{K}/\mathbf{P}$ unverzweigt. Aus $g(x) \equiv x^5+2 \equiv (x+2)^5 \bmod 5$, also $(A+2)^5 \equiv 0 \bmod 5$ kann daher auf $A+2 \equiv 0 \bmod 5$ geschlossen werden. Setzt man demnach die in (6) noch verfügbare additive rationale Zahl $a = 2$ an, so bleibt die dem Radikand ω nach der Vorschrift (6) zugeordnete Erzeugende

$$\theta = \frac{A+2}{5}$$

trotz des jetzt zugefügten Nenners 5 ganz, und als das irreduzible Polynom über $\mathbf{P}$, dessen reelle Wurzel θ ist, ergibt sich

$$(10) \qquad f(x) = x^5 - 2x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 6x - 5$$

mit verkleinerten Koeffizienten.

Für den in [1] vorangestellten Fall der kubischen Klassenkörper zu den beiden imaginär-quadratischen Zahlkörpern $\Omega = \mathbf{P}(\sqrt{d})$ mit $d = -27 \pm 4 = -3^3 \pm 2^2$ gilt Entsprechendes(⁴). Die dort zum Schluß erwähnte Erzeugende

$$B = \sqrt[3]{\varepsilon_0} + \sqrt[3]{\varepsilon_0'}$$

genügt auf Grund der Gleichung

$$B^3 - 3B - (27 \mp 2) = 0$$

(⁴) Auf S. 422 sind zwei störende Druckfehler zu berichtigen: Z. 9 v. u. lies $h = \ldots$ (statt $h_1 = \ldots$) und Z. 8 v. u. lies h^* (statt h).

der Kongruenz $B \equiv \pm 1 \bmod 3$. Die dem Radikanden ε_0 nach der Vorschrift (6) zugeordnete Erzeugende

$$\theta = \frac{B \mp 1}{3}$$

ist demnach ganz und genügt der Gleichung

$$\theta^3 \pm \theta^2 - 1 = 0$$

mit ebenso kleinen Koeffizienten wie die zuvor angegebene Erzeugende A mit

$$A^3 \mp A - 1 = 0.$$

Zwischen beiden besteht der einfache Zusammenhang

$$A = \theta^{-1}.$$

Der Radikand zu A, nämlich $3a = 3 \cdot \frac{9+\sqrt{-3d}}{2}$, ist aber weniger einfach und naturgemäß als der Radikand ε_0 zu θ.

4. Die vorstehend besprochenen Bildungen f, θ, ω werden im folgenden wie in der Arbeit [2] durch den Index H gekennzeichnet, der andeutet, daß es sich um die Bildungen aus der Arbeit [1] des erstgenannten Verfassers handelt. Die mit ihnen zu vergleichenden analogen Bildungen, die den von Weber und Fricke angegebenen erzeugenden Polynomen

$$f_W(x) = x^5 - x^3 - 2x^2 - 2x - 1,$$
$$f_F(x) = x^5 - x^4 + x^3 + x^2 - 2x + 1$$

entsprechen, werden durch den Index W bzw. F gekennzeichnet.

In den Tabellen am Schluß der Algebrabände III von Weber und Fricke werden die Gleichungen $f_W(\theta_W) = 0$ und $f_F(\theta_F) = 0$ zwar als „Klassengleichungen" für die Diskriminante -47 bezeichnet. Aus den Ausführungen im Text geht jedoch nicht mit voller Klarheit hervor, ob diese Gleichungen wirklich den absoluten Klassenkörper N/Ω erzeugen; denn sie werden aus der Transformationstheorie von Modulfunktionen *höherer* Stufe gewonnen, während die Klassenkörperkonstruktion nur mit Modulfunktionen *erster* Stufe durchgeführt wird. Nicht nur aus diesem sondern auch aus rein-algebraischem Grunde erschien es wünschenswert, die Identität der durch diese Gleichungen erzeugten Erweiterungen von Ω mit dem durch $f_H(\theta_H) = 0$ erzeugten absoluten Klassenkörper N/Ω auf direktem Wege festzustellen, d.h. *etwa θ_H durch θ_W und θ_W durch θ_F als Polynom niedrigeren als 5-ten Grades über Ω darzustellen.*

Um ferner den arithmetischen Zusammenhang zwischen den Radikanden $\omega_H, \omega_W, \omega_F$ aufzudecken, der ja dann durch Substitutionen der Form (7_0) gegeben sein muß, hat man gemäß der Definition der Radikanden in (4), (5) zunächst einmal rein-algebraisch die Wirkung eines erzeugenden Automorphismus R von N/Ω auf die Erzeugenden $\theta_H, \theta_W, \theta_F$

rechnerisch zu erfassen, *nämlich $\theta_H^R, \theta_W^R, \theta_F^R$ als Polynome niedrigeren als 5-ten Grades über Ω in bzw. $\theta_H, \theta_W, \theta_F$ (oder auch nur in einer festen Erzeugenden, etwa θ_W) darzustellen.*

Ein Verfahren zur Lösung dieser beiden rein-algebraischen Aufgaben über algebraische Erweiterungen eines algebraischen Zahlkörpers, die durch eine theoretisch als zyklisch bekannte Grundgleichung gegeben sind, war in der Lehrbuchliteratur nicht zu finden, und namhafte Algebraiker, wie z.B. van der Waerden, konnten auf Anhieb keinen Weg zur Lösung vorschlagen. Veranlaßt durch das hier in Rede stehende Beispiel wurde ein allgemeines solches Verfahren in der Arbeit [2] entwickelt, und zwar gestützt auf ein von Zassenhaus [3] entwickeltes p-adisches Verfahren zur Faktorisation von Polynomen. Die Anwendung auf die hier vorliegenden Polynome f_H, f_W, f_F unter Zuhilfenahme des IBM-Computers 7094 in Columbus-Ohio ergab einerseits ([5]):

$$\theta_H = \theta_W^2 - \theta_W,$$
$$\theta_W = -\theta_F^4 - 2\theta_F + 1,$$

andererseits ([6]):

$$\theta_H^R = \frac{1}{47}\Big(-2\sqrt{-47} + \frac{-47-11\sqrt{-47}}{2}\,\theta_W + 7\sqrt{-47}\,\theta_W^2 + \\ + \frac{-47-3\sqrt{-47}}{2}\,\theta_W^3 + \frac{47+\sqrt{-47}}{2}\,\theta_W^4\Big), \text{ ([7])}$$

$$\theta_W^R = \frac{1}{47}\Big((47-7\sqrt{-47}) + (47-11\sqrt{-47})\,\theta_W + (47-8\sqrt{-47})\,\theta_W^2 + \\ + \frac{47-13\sqrt{-47}}{2}\,\theta_W^3 + (-47+9\sqrt{-47})\,\theta_W^4\Big),$$

$$\theta_F^R = \frac{1}{47}\Big(\frac{141+5\sqrt{-47}}{2} + \frac{-141+3\sqrt{-47}}{2}\,\theta_F + \frac{-47-5\sqrt{-47}}{2}\,\theta_F^2 + \\ + \frac{47+3\sqrt{-47}}{2}\,\theta_F^3 + (-47-3\sqrt{-47})\,\theta_F^4\Big).$$

([5]) In [2] wurde von dem Polynom $g(x)$ aus (9) (dort $f_H(x)$ genannt) und seiner reellen Wurzel A (dort θ_H genannt) ausgegangen. Die erste Angabe hier ist elementar auf das einfachere Polynom $f_H(x)$ aus (10) und seine reelle Wurzel θ_H umgerechnet.

([6]) Hier sind die Zahlen aus Ω durch die organische Basis $1, \sqrt{-47}$ (Gaußsche Summen) statt $1, \frac{1+\sqrt{-47}}{2}$ in [2] dargestellt. Erst dann tritt eine arithmetische Beziehung zur Diskriminante -47 hervor: sämtliche erste Koordinaten sind durch -47, also sämtliche θ-Koeffizienten durch $\sqrt{-47}$ teilbar, so daß der voranstehende Nenner 47 teilweise kompensiert wird.

([7]) Diese Angabe fehlt in [2].

Damit war einerseits die Gewißheit erlangt, daß die Gleichungen von Weber und Fricke wirklich den in Rede stehenden Klassenkörper $\mathbf{N}/\mathbf{\Omega}$ und seinen reellen Teilkörper $\mathbf{K}/\mathbf{P}$ erzeugen, und andererseits war die Berechnung der zugeordneten Radikanden ermöglicht. Diese Berechnung ergab:

$$\omega_H = \frac{1}{2}\left(\frac{9353+4225\sqrt{5}}{2} - 65\frac{11+5\sqrt{5}}{2}\pi_0\right) \quad \text{mit} \quad N(\omega_H) = 1,$$

$$\omega_W = \frac{5}{2}\left(65\frac{5-\sqrt{5}}{2} - (11-8\sqrt{5})\pi_0\right) \quad \text{mit} \quad N(\omega_W) = (-5)^5,$$

$$\omega_F = \frac{1}{2}\left(\frac{-1371-145\sqrt{5}}{2} + 65\pi_0\right) \quad \text{mit} \quad N(\omega_F) = 1.$$

Der mit dem Computer gefundene Wert ω_H zeigte die zu erwartende Übereinstimmung mit dem klassenkörpertheoretisch ermittelten Wert von $\varepsilon_0^2\varepsilon_0'$ in (8) (für dessen Gewinnung der Hamburger Rechenautomat TR 4 herangezogen werden mußte).

Die Werte ω_W und ω_F wurden dazu verwendet, den nach (7_0) bestehenden Zusammenhang zu mit ω_H spezifizieren.

Im Falle von ω_F war das einfach, weil sich ω_F als Einheit herausgestellt hat. Der Zusammenhang war demgemäß in der Form

$$\omega_F = \omega_H^{S^\mu}\eta_0^5 \quad \begin{Bmatrix} \mu \bmod 5,\ \mu \not\equiv 0 \bmod 5 \\ \eta_0 \in \mathbf{\Omega}_0^5,\ \eta_0 \text{ Einheit} \end{Bmatrix}$$

anzusetzen. Für die Rechnung günstiger erschien es, die oben in (3) festgestellte Beziehung $\omega_H^S \underset{5}{=} \omega_H^2$ auszunutzen, nach der dieser Zusammenhang auch in der Form

$$\omega_F = \omega_H^{S^\nu}\eta_0^5 \quad (\nu \bmod 4,\ \eta_0 \in \mathbf{\Omega}_0^5,\ \eta_0 \text{ Einheit})$$

angesetzt werden kann, bei der der Radikand nicht mehr potenziert zu werden braucht. Zusammensetzung von η_0 aus den Grundeinheiten $e, \varepsilon_0, \varepsilon_0'$ von $\mathbf{\Omega}_0^5$ (siehe [1], S. 428). Übergang zu den Konjugierten und Logarithmierung führt dann auf ein lineares Gleichungssystem für die Exponenten der Grundeinheiten, von dem feststeht, daß es nur für einen einzigen Wert $\nu \bmod 4$ lösbar ist. Die numerische Durchführung ergab für diesen Wert und die zugehörige Lösung

$$\nu \equiv 0 \bmod 4, \quad \eta_0 = -e^{-1} = e',$$

also den Zusammenhang

(11) $$\omega_F = \omega_H e'^5.$$

Im Falle von ω_W ist $\omega_W \cong \pi^5$, also $\dfrac{\omega_W}{\pi^5}$ Einheit. Diese Einheit liegt aber nicht mehr im reellen Teilkörper $\mathbf{\Omega}_0^5$, sondern erst in $\mathbf{\Omega}^5$. Sie ist rein-imaginär und kann daher durch Division mit der ebenfalls rein-imaginären Einheit ϑ (siehe [1], S. 428 f.) reell gemacht werden, d.h. nach $\mathbf{\Omega}_0^5$ gebracht werden. Wie vorher hat man dann den Ansatz

$$\omega_W = \omega_H^{S^\nu}(\eta_0\vartheta\pi)^5 \quad (\nu \bmod 4,\ \eta_0 \in \mathbf{\Omega}_0^5,\ \eta_0 \text{ Einheit})$$

und kann $\nu \bmod 4$ und η_0 in der angegebenen Weise bestimmen. Tatsächlich wurde allerdings bei der numerischen Durchführung etwas komplizierter vorgegangen, nämlich die gesuchte Einheit $\eta (= \eta_0\vartheta)$ aus $\mathbf{\Omega}^5$ in einer Darstellung durch die Grundeinheiten $\vartheta, \vartheta', \vartheta''$ von $\mathbf{\Omega}^5$ angesetzt. Ergebnis:

$$\nu \equiv 0 \bmod 4, \quad \eta = -e^{-1}\varepsilon_0^{-1}\vartheta = -e'\varepsilon_0''\vartheta,$$

also

(12) $$\omega_W = \omega_H(-e'\varepsilon_0''\vartheta\pi)^5.$$

Nachträglich kann man die Ergebnisse (11), (12) natürlich leicht durch direkte Rechnung bestätigen.

Literaturverzeichnis

[1] H. Hasse, *Über den Klassenkörper zum quadratischen Zahlkörper mit der Diskriminante* −47, Acta Airth. 9 (1964), S. 419–434.

[2] H. Zassenhaus and J. Liang, *On a Problem of Hasse*, Mathematics of Computation (1969).

[3] H. Zassenhaus, *On Hensel factorization*, Journal of Number Theory 1 (1969).

Reçu par la Rédaction le 10. 1. 1969

ACTA ARITHMETICA
XVI (1969)

Errata to the paper
"A new estimate for the sum $M(x) = \sum_{n\leqslant x} \mu(n)$"

(Acta Arithmetica 13 (1967), pp. 49–59)

by

R. A. MacLeod (Victoria, Canada)

On page 49, statement (5) should read

$$|M(x)| < \frac{x+1}{80} + \frac{11}{2} \quad \text{for all } x.$$

In the several places where $x > 200$ occurs, this should be $x \geqslant 201$.

On page 52, in the definition of $U_s(x)$, the signs of $u_1\left(\frac{x}{105}\right)$ and $u_5\left(\frac{x}{42}\right)$ should be positive. In the definition of $u(x)$, the coefficients of $u_2\left(\frac{x}{10}\right)$ and $u_1\left(\frac{x}{30}\right)$ should be $+2$ and -1 respectively. In the definition of $e(x)$, the term $3u_4\left(\frac{x}{108}\right)$ should be $3u_4\left(\frac{x}{180}\right)$, and the terms $-2u_{11}\left(\frac{x}{100}\right)$, $-2u_{22}\left(\frac{x}{30}\right)$, $+2u_{40}\left(\frac{x}{20}\right)$ should be added, while the coefficient of $u_{68}\left(\frac{x}{5}\right)$ should be 2.

On page 53, the term 16002 in P should have been in Q. The term 66420 in P should be replaced by 132840. Also, the following should have been in Q: 600, 610, 610, 610, 630, 642, 648, 654, 660, 16380, 32800, 32800, so that Q has 230 terms.

The line before statement (16) on page 54 should read "Since there are 221 positive terms and 230 negative terms in e,

(16) $$|e(x)-1| \leqslant 231 \quad \text{for all } x\text{''}.$$