Table des matières du tome XV, fascicule 1

	Page
F. Schweiger, Metrische Theorie einer Klasse zahlentheoretischer Transformationen	1
W. Narkiewicz, A note on factorizations in quadratic fields	19
H. S. Butts and G. Pall, Modules and binary quadratic forms	23
C. R. MacCluer, A reduction of the Čebotarev density theorem to the cyclic case	45
A. Schinzel, On primitive prime factors of Lehmer numbers III	49
L. Houten, A note on solid partitions	71
J. Hardy, A note on the representability of binary quadratic forms with Gaussian integer coefficients as sums of squares of two linear forms	77
P. Erdös and E. Szemerédi, On a problem of P. Erdös and S. Stein	85

La revue est consacrée à toutes les branches de *l'Arithmétique* et de la *Théorie des Nombres*, ainsi qu'aux *fonctions ayant de l'importance dans ces domaines*.

Prière d'adresser les textes dactylographiés à l'un des rédacteurs de la revue ou bien à la Rédaction de

ACTA ARITHMETICA

Warszawa 1 (Pologne), ul. Śniadeckich 8.

La même adresse est valable pour toute correspondance concernant l'échange de Acta Arithmetica.

Les volumes IV et suivants de ACTA ARITHMETICA sont à obtenir chez

Ars Polona, Warszawa 5 (Pologne), Krakowskie Przedmieście 7.

Prix de ce fascicule 3.00 \$.

Les volumes I-III (reédits) sont à obtenir chez

Johnson Reprint Corp., 111 Fifth Ave., New York, N. Y.

PRINTED IN POLAND

W R O C Ł A W S K A   D R U K A R N I A   N A U K O W A

ACTA ARITHMETICA
XV (1968)

Metrische Theorie einer Klasse zahlentheoretischer Transformationen

von

FRITZ SCHWEIGER (Wien)

Die Idee zu dieser Arbeit entstammt wohl der Beschäftigung mit den Arbeiten von Rényi [7], Roos [9], und Philipp [6] und der Hoffnung die metrische Theorie des Jacobialgorithmus voranzutreiben. Für viele Begriffe und Methoden verweise ich auf Hartman–Marczewski–Ryll-Nardzewski [4], Rohlin [8], Khintchine [5], Billingsley [1], Doeblin [2] und Ryll-Nardzewski [11], [10].

§ 1. Definition und Grundeigenschaften der Transformation T. Im folgenden bezeichne $(B, \mathfrak{F}, \lambda)$ einen Wahrscheinlichkeitsraum; B ist der n-dimensionale Einheitswürfel des euklidischen Raumes R_n, wobei eine Nullmenge weggelassen sein kann, $\mathfrak{F}$ die σ-Algebra der Borelmengen und λ das n-dimensionale Lebesguesche Maß. Es ist daher $\lambda(B) = 1$, d. h. λ ein Wahrscheinlichkeitsmaß. Es sei nun B in endlich viele oder abzählbar viele Bereiche B_k mit folgenden Eigenschaften zerlegt

(a) $B_i \cap B_j = \emptyset,\ i \neq j$,

(b) $\bigcup B_i = B$,

(c) Zu jedem B_k existiere eine 1-1-deutige Abbildung T_k: $B_k \to B$ von B_k auf B, welche stetige partielle Ableitungen erster Ordnung besitze.

(d) Mit $T_k^{-1}B = B_k$ definieren wir rekursiv Bereiche $B_{k_1\ldots k_m}$ durch

$$T_{k_1}^{-1} B_{k_2\ldots k_m} = B_{k_1 k_2\ldots k_m}.$$

Es sei dann $T_{k_1\ldots k_m} = T_{k_m}\ldots T_{k_2}T_{k_1}$ eine Abbildung von $B_{k_1\ldots k_m}$ auf B, deren Umkehrabbildung mit $V_{k_1\ldots k_m}$ bezeichnet sei. Bildet nun $V_{k_1\ldots k_m}$ einen Punkt $x = (x_1, \ldots, x_n) \in B$ auf den Punkt $y = (y_1, \ldots, y_n) \in B_{k_1\ldots k_n}$ ab, so bilden wir die Jacobische Matrix

$$J = \left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right). \tag{1}$$

Ist nun

$$\|J\| = \sup_{i,j} \left|\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right| \tag{2}$$

die Matrixnorm und

(3) $$\Delta_{k_1\ldots k_m} = |\det J|$$

so verlangen wir:

(A) Es gibt eine auf $[1, \infty)$ definierte, nichtzunehmende Funktion $\sigma(t)$ mit $\lim\limits_{t\to\infty}\sigma(t) = 0$, sodaß

$$\|J_{k_1\ldots k_m}\| < \sigma(m)$$

unabhängig von dem Wert der $k_1, \ldots, k_m$ gilt.

(B) $\sup \Delta_{k_1\ldots k_m} \leqslant C \inf \Delta_{k_1\ldots k_m}$ wobei $C \geqslant 1$ eine absolute Konstante sei.

Wir vermerken gleich, daß aus (A) folgt:

(4) $$\Delta_{k_1\ldots k_m} < n^n \sigma(m), \quad n = \dim B, \text{ d. h. eine Konstante.}$$

Nun definieren wir eine Transformation T von B in sich gemäß

(5) $$Tx = T_k x \quad \text{für} \quad x \in B_k.$$

Satz 1. *Das System der Mengen* $\{B_{k_1\ldots k_s}\} = T^{-s}B$ *erzeugt die* σ*-Algebra der Borelmengen. Es ist* $\bigvee T^{-s}B = \mathfrak{F}$.

Beweis. Sind $x, y \in B_{k_1\ldots k_s}$, so ist

$$\|x-y\| = \|V_{k_1\ldots k_s}\bar{x} - V_{k_1\ldots k_s}\bar{y}\| \leqslant c_1 \|\Delta_{k_1\ldots k_s}\| < c_2\sigma(s)$$

mit $\bar{x}, \bar{y} \in B$. Dies heißt aber

$$\operatorname{diam} B_{k_1\ldots k_s} \leqslant c_2 \sigma(s).$$

Nach Lemma 3 in [1], p. 70 folgt alles.

Folgerung. *T ist meßbar bezüglich λ.*

Satz 2. *T ist ergodisch (d. i. unzerlegbar oder metrisch transitiv) bezüglich λ.*

Beweis. Wegen Satz 1 genügt es die Dichte einer invarianten Menge E in einem $B_{k_1\ldots k_s}$ abzuschätzen.

$$\lambda(E \cap B_{k_1\ldots k_s}) = \int\limits_{B_{k_1\ldots k_s}} \chi_E(x)\,dx = \int\limits_B \chi_E(x)\,\Delta_{k_1\ldots k_s}\,dx$$
$$\geqslant \lambda(E)\inf \Delta_{k_1\ldots k_s} \geqslant C^{-1}\lambda(E)\sup\Delta_{k_1\ldots k_s} \geqslant C^{-1}\lambda(E)\,\lambda(B_{k_1\ldots k_s}).$$

Nach einem Satz von Knopp oder dem Lebesgueschen Dichtesatz ist $\lambda(E) = 0$ oder 1. Oder auch so: Wegen Satz 1 folgt

$$\lambda(E \cap A) \geqslant C^{-1}\lambda(E)\lambda(A)$$

für jede Menge $A \in \mathfrak{F}$. Man setzt $A = B - E$ und findet

$$\lambda(E)\lambda(B-E) = 0.$$

Satz 3. *Es existiert ein zu λ äquivalentes, gegenüber T invariantes Maß μ.*

Beweis.

$$\lambda(T_{m-}B_{k_1\ldots k_s}) = \sum_{(l)} \lambda(B_{l_1\ldots l_m k_1\ldots k_s}) = \sum_{(l)} \int\limits_B \Delta_{l_1\ldots l_m}(V_{k_1\ldots k_s}x)\,\Delta_{k_1\ldots k_s}(x)\,dx$$
$$\leqslant \sum_{(l)} \Big[\sup \Delta_{l_1\ldots l_m} \int\limits_B \Delta_{k_1\ldots k_s}(x)\,dx\Big] \leqslant C\lambda(B_{k_1\ldots k_s}).$$

Weiter ist analog

$$\lambda(T^{-m}B_{k_1\ldots k_s}) \geqslant \sum_{(l)} \Big[\inf \Delta_{l_1\ldots l_m} \int\limits_B \Delta_{k_1\ldots k_s}(x)\,dx\Big] \geqslant C^{-1}\lambda(B_{k_1\ldots k_s}).$$

Dabei wurde $\sum\limits_{(l)} \lambda(B_{l_1\ldots l_m}) = 1$ verwendet.

Demnach ist

$$C^{-1}\lambda(B_{k_1\ldots k_s}) \leqslant \lambda(T^{-m}B_{k_1\ldots k_s}) \leqslant C\lambda(B_{k_1\ldots k_s})$$

und nach Dunford–Miller (siehe [4]) existiert

$$\mu(E) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \lambda(T^{-j}E)$$

für alle $E \in \mathfrak{F}$. μ ist ein invariantes Maß und wegen

(6) $$C^{-1}\lambda(E) \leqslant \mu(E) \leqslant C\lambda(E)$$

zu λ äquivalent.

Folgerung. *Durch Anwendung des individuellen Ergodensatzes sieht man: Ist $f \in L^1(B)$, so gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} f(T^j x) = \int\limits_B f(x)\,d\mu(x) \quad f.ü.$$

Insbesondere ist dann für fast alle x

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \chi_E(T^j x) = \mu(E)$$

für jede Menge $E \in \mathfrak{F}$. Ist insbesondere $E = B_i$, so besagt dies: die Häufigkeit mit der $T^k x \in B_i$, i fest, ist gleich $\mu(B_i)$. Dies enthält Sätze über Kettenbrüche und normale Zahlen als Spezialfälle.

Ein Endomorphismus eines Maßraumes in sich heißt exakt, wenn

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} T^{-n}\mathfrak{M},$$

wo $\mathfrak{M}$ die Klasse aller meßbaren Mengen ist, nur aus Mengen vom Maße Null oder Eins besteht. Ein Endomorphismus heißt mischend vom Grade

$r-1$, wenn für alle r-tupel natürlicher Zahlen $k_s^0, k_s^1, \ldots, k_s^{r-1}$ und alle r-tupel meßbarer Mengen $X_0, X_1, \ldots, X_{r-1}$ gilt: Wenn

$$\lim_{s\to\infty}(\inf_{i,j}|k_s^i - k_s^j|) \to \infty$$

so ist

$$\lim \lambda\Big(\bigcap_{i=0}^{r-1} T^{-k_s^i} X_i\Big) = m \prod_{i=1}^{r-1} \lambda(X_i).$$

Jeder exakte Endomorphismus ist mischend von beliebig hohem Grade (s. Rohlin [8]).

Satz 4. *T ist ein exakter Endomorphismus im Sinne Rohlins* [8] *und folglich mischend von jedem Grad.*

Beweis.

$$\lambda(E) = \int_{T^n E} \Delta_{k_1\ldots k_n} dx \geqslant C^{-1}\lambda(B_{k_1\ldots k_n})\lambda(T^n E).$$

Aus (6) folgt

$$\mu(T^n E) \leqslant C^4 \mu(E)/\mu(B_{k_1\ldots k_n}).$$

Nach Rohlin [8], p. 30 ist alles gesagt.

Zum Schluß dieses Abschnittes seien einige Beispiele genannt.

(α) $B = [0,1)$, $r \geqslant 2$ ganz,

$B_k = [(k-1)r^{-1}, kr^{-1})$, $k = 1, \ldots, r$,

$T_k x = rx - [rx]$;

(β) $B = (0,1]$,

$$B_k = \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right], \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

$$T_k x = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right] = \frac{1}{x} - k;$$

(γ) $B = (0,1) - \{r_i\}$, $\{r_i\}$ rationale Punkte $N \geqslant 2$ ganz,

$$B_k = \left(\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right), \quad k = 1, 2, \ldots, N-1,$$

$$B_N = \left(0, \frac{1}{N}\right),$$

$$T_k x = \frac{1}{x} - k,$$

$$T_N x = Nx.$$

Das Beispiel (γ) ist eine interessante Mischung zwischen r-adischer Transformation und Kettenbruchtransformation. Es erfüllt die Eigenschaften (a)-(d).

§ 2. Der Kuzminsche Satz. Nach dem Satz von Radon–Nikodym kann man aus Satz 3 folgern: Es gibt eine Funktion $\varrho(x) \in L^1(B)$ mit

$$C^{-1} \leqslant \varrho(x) \leqslant C, \tag{7a}$$

$$\int_B f(x)\,d\mu(x) = \int_B f(x)\varrho(x)\,dx. \tag{7b}$$

Nun ist für $E \in \mathfrak{F}$ sicher

$$\int_E \varrho(x)\,dx = \int_{T^{-1}E} \varrho(x)\,dx = \sum_k \int_{T_k^{-1}E} \varrho(x)\,dx = \sum_k \int_E \varrho(V_k x)\Delta_k(x)\,dx.$$

Da $\varrho(V_k x)\Delta_k(x) \leqslant C^2\lambda(B_k)$ und $\sum_k \lambda(B_k) = 1$, kann man Integration und Summation vertauschen. Da E beliebig war, folgert man

$$\varrho(x) = \sum_k \varrho(V_k x)\Delta_k(x), \tag{8}$$

λ — fast überall. Diese Funktionalgleichung nennen wir die Kuzminsche Gleichung.

Schon aus unseren vorhergehenden Überlegungen wissen wir, daß (8) genau eine Lösung $\varrho(x) \in L^1(B)$ besitzt, die der Nebenbedingung

$$\int_B \varrho(x)\,dx = 1$$

genügt. Selbstverständlich heißt dies, $\varrho(x)$ 1-deutig bis auf eine Nullfunktion.

Wir verlangen nun, daß die Transformation T folgender Bedingung genügt

$$|\Delta_{k_1\ldots k_s}(x) - \Delta_{k_1\ldots k_s}(y)| \leqslant Q\lambda(B_{k_1\ldots k_s})\,\|x-y\|. \tag{c}$$

Diese Bedingung ist für (α)-(γ) erfüllt. Die Motivation hat sich aus Betrachtung über den Jacobischen Algorithmus (vgl. [12]) ergeben. Ab nun sei (c) stets erfüllt. Dann beweisen wir:

Satz 5. *Die Funktionalgleichung*

$$\psi(x) = \sum_k \psi(V_k x)\Delta_k(x) \tag{9a}$$

besitzt genau eine Lösung $\psi(x)$, die den Bedingungen

$$|\psi(x) - \psi(y)| \leqslant K\|x-y\|, \quad d.\,h.\ \psi(x) \in \mathrm{Lip}^1(B), \quad \int_B \psi(x)\,dx = c \ (c \text{ Konstante})$$

genügt. Ist eine Folge reeller Funktionen $f_0, f_1, f_2, \ldots$ gegeben, die den Rekursionen

$$f_{n+1}(x) = \sum_k f_n(V_k x)\Delta_k(x) \tag{9b}$$

genügt, wobei

$$|f_0(x)-f_0(y)| \leqslant N\|x-y\|$$

d. h. $f_0(x)\in \mathrm{Lip}^1(B)$ *vorausgesetzt sei, so gilt*

(10a) $$|f_n(x)-a\varrho(x)| < b\sigma(n).$$

Dabei sind

$$a = \int_B f_0 x\,dx \quad \textit{und} \quad b = b(f_0) \ \textit{Konstante.}$$

Beweis. (a) Wir beweisen zunächst die Eindeutigkeit; d. h. sind zwei Funktionen $\pi(x)$ und $\varphi(x)\in\mathrm{Lip}^1(B)$ mit

$$\int_B \pi(x)\,dx = \int_B \varphi(x)\,dx$$

gegeben, die beide (9a) erfüllen, so sind sie identisch. Durch vollständige Induktion erkennt man zunächst, daß für jede Funktion $\psi(x)\in\mathrm{Lip}^1(B)$, die (9a) erfüllt, gilt

$$\psi(x) = \sum_{k_1\ldots k_s} \psi(V_{k_1\ldots k_s}x)\,\Delta_{k_1\ldots k_s}.$$

Nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung ist

$$\int_B \psi(x)\,dx = \sum \psi(u')\,\lambda(B_{k_1\ldots k_s})$$

mit $u'\in B_{k_1\ldots k_s}$. Es ist dann wegen

$$\int_B \Delta_{k_1\ldots k_s}(x)\,dx = \lambda(B_{k_1\ldots k_s})$$

ferner durch neuerliche Anwendung des Mittelwertsatzes

$$\lambda(B_{k_1\ldots k_s}) = \Delta_{k_1\ldots k_s}(\bar{x}).$$

Wir schätzen nun ab:

$$\Big|\psi(x)-\int_B\psi(x)\,dx\Big| = \Big|\sum\psi(u)\,\Delta_{k_1\ldots k_s}(x)-\sum\psi(u')\,\Delta_{k_1\ldots k_s}(\bar{x})\Big|$$

$(u = V_{k_1\ldots k_s}x$ gesetzt)

$$\begin{aligned}
&\leqslant \Big|\sum\psi(u)\,\Delta_{k_1\ldots k_s}(x)-\sum\psi(u')\,\Delta_{k_1\ldots k_s}(x)\Big| + \\
&\qquad + \Big|\sum\psi(u')\,\Delta_{k_1\ldots k_s}(x)-\sum\psi(u')\,\Delta_{k_1\ldots k_s}(\bar{x})\Big| \\
&\leqslant K\|u-u'\|\sum\Delta_{k_1\ldots k_s}(x)+\Big|\sum\psi(u')\big(\Delta_{k_1\ldots k_s}(x)-\Delta_{k_1\ldots k_s}(\bar{x})\big)\Big| \\
&\leqslant CK\|u-u'\|+\Big|\sum\psi(u')Q\lambda(B_{k_1\ldots k_s})\Big|\|x-\bar{x}\| \\
&\leqslant CKc_2\sigma(s)+\sqrt{n}Q\Big|\int_B\psi(x)\,dx\Big|
\end{aligned}$$

denn u und $u'\in B_{k_1\ldots k_s}$ und $\|x-\bar{x}\|\leqslant\sqrt{n}$. Wir erhalten

$$\Big|\psi(x)-\int_B\psi(x)\,dx\Big|\leqslant c_5\sigma(s)+c_6\Big|\int_B\psi(x)\,dx\Big|.$$

Wir setzen $\psi(x) = \pi(x)-\varphi(x)$ und erhalten dann

$$|\psi(x)|\leqslant c_5\sigma(s) \qquad \text{d. h.} \qquad \psi(x) = 0.$$

(b) Es sei nun eine Folge $f_0(x), f_1(x), \ldots$ gegeben, die

$$f_{n+1}(x) = \sum_k f_n(V_kx)\,\Delta_k(x)$$

erfüllt. Zunächst ist wieder leicht zu sehen, daß

$$f_s(x) = \sum_{k_1\ldots k_s} f_0(u)\,\Delta_{k_1\ldots k_s}(x)$$

mit $u = V_{k_1\ldots k_s}x$ und

$$\int_B f_0(x)\,dx = \int_B f_n(x)\,dx$$

für alle n erfüllt sind. Wir zeigen nun: $f_s(x)\in\mathrm{Lip}^1(B)$ mit einer von s unabhängigen Kostanten c_6. Denn ist $u = V_{k_1\ldots k_s}x$ und $v = V_{k_1\ldots k_s}y$, so ist

$$\begin{aligned}
|f_s(x)-f_s(y)| &\leqslant \Big|\sum f_0(u)\,\Delta(x)-\sum f_0(v)\,\Delta(y)\Big| \\
&\leqslant \Big|\sum\Delta(x)|f_0(u)-f_0(v)|+\Big|\sum f_0(v)\Big|\,\Delta(x)-\Delta(y)\Big| \\
&\leqslant N\|u-v\|\sum\Delta(x)+MQ\|x-y\|\sum\lambda(B_{k_1\ldots k_s}) \\
&\leqslant Nc_7\|x-y\|+MQ\|x-y\|\leqslant c_6\|x-y\|
\end{aligned}$$

dabei ist $M = \max f_0(x)$ und von der Abschätzung

$$\|u-v\|\leqslant c_8\,\Delta_{k_1\ldots k_s}\|x-y\|$$

Gebrauch gemacht worden.

Gilt nun für eine Folge von Funktionen $f_0(x), f_1(x), \ldots$ die Rekursion (9b) und ist $f_0(x)\in\mathrm{Lip}^1(B)$, so erhält man weiters analog zu (a)

$$f_s(x) = \sum_{k_1\ldots k_s} f_0(u)\,\Delta_{k_1\ldots k_s}(x)$$

und

$$\int_B f_0(x)\,dx = \sum_{k_1\ldots k_s} f_0(u')\,\Delta_{k_1\ldots k_s}(\bar{x}) = \sum_{k_1\ldots k_s} f_0(u')\,\lambda(B_{k_1\ldots k_s})$$

woraus wir folgern

(11) $$\Big|f_s(x)-\int_B f_0(x)\,dx\Big|\leqslant c_9\sigma(s)+c_{10}\Big|\int_B f_0(x)\,dx\Big|$$

auf ähnliche Art wie vorhin. Die Konstante c_9 ergibt sich im wesentlichen als $c_9 = C\cdot Nc_2$, hängt also von der Lipschitzkonstanten der Funktion $f_0(x)$ ab.

Wir bilden nun

$$d_{s,m}(x) = f_{s+m}(x) - f_s(x)$$

für festes m. Die Folge $d_{s,m}(x)$ erfüllt nun wieder die Rekursion (9b) und daher gilt nach (11):

$$|d_{s,m}(x)| < b\sigma(s)$$

denn

$$\int_B d_{s,m}(x)\,dx = \int_B f_{s+m}(x)\,dx - \int_B f_s(x)\,dx = 0.$$

Da $d_{s,m}\in\mathrm{Lip}^1(B)$ mit einer Konstanten $2c_6$, ist klar, daß b im wesentlichen nur von $f_0(x)$ abhängt. Obiges heißt:

$$|f_{s+m}(x) - f_s(x)| < b\sigma(s)$$

für alle m. Die Folge $f_s(x)$ konvergiert daher gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $F(x)\in\mathrm{Lip}^1(B)$ und es gilt

$$|f_s(x) - F(x)| < b\sigma(s).$$

(c) Nun ist es klar, daß (9a) eine Lösung $\psi(x)\in\mathrm{Lip}^1(B)$ besitzt oder anders ausgedrückt, daß wir $\varrho(x)\in\mathrm{Lip}^1(B)$ annehmen können. Denn sei $g_0\in\mathrm{Lip}^1(B)$ beliebig mit

$$\int g_0(x)\,dx = 1$$

so konvergiert $\{g_n(x)\}$ gleichmäßig gegen eine Grenzfunktion $\psi(x)\in\mathrm{Lip}^1(B)$, wenn wir

$$g_n(x) = \sum_k g_{n-1}(V_k x)\,\Delta_k(x)$$

definieren. $\psi(a)$ ist aber 1-deutig und wir können $\varrho(x) = \psi(x)$ annehmen. Es war in (b) nun

$$|f_s(x) - F(x)| < b\sigma(s).$$

Die Funktionen $F(x)$ und $a\varrho(x)$ mit $a = \int_B f_0(x)\,dx$ haben gleiche Integrale und daher ist

$$F(x) = a\varrho(x)$$

und (10a) vollständig bewiesen.

Aus (10a) folgt durch Integration

$$\text{(10b)}\qquad \left|\int_B h(x) f_n(x)\,dx - a\int_B h(x)\,d\mu(x)\right| \leqslant b\sigma(n)\int_B h(x)\,dx.$$

Bemerkung 1. In [12] wurde gezeigt, daß ein Kuzminscher Satz für Jacobische Algorithmen gilt, wobei aber die unbewiesene Voraussetzung $\varrho(x)\in\mathrm{Lip}^1(B)$ verwendet wurde und das schwächere Resultat

$$|f_n(x) - a\varrho(x)| < b\left(e^{-\lambda\sqrt{n}} + \sigma(\sqrt{n})\right)$$

erhalten wurde. Die hier verwendete Methode läßt sich nun aber Wort für Wort auf den Jacobischen Algorithmus übertragen, d. h. die „Kuzminsche Bedingung" in [12] kann weggelassen werden und es gilt das schärfere Resultat

$$|f_n(x) - a\varrho(x)| < b\sigma(n).$$

Die in den nächsten Abschnitten folgenden Sätze 6 und 7 gelten daher auch für den Jacobischen Algorithmus, wenn man die Beweise abändert, d. h. die Funktionalgleichungen auf den einzelnen „Kuzminschen Gebieten" betrachtet.

Bemerkung 2. Für den Fall gewöhnlicher Kettenbrüche — Beispiel (β) — liefert dies mit

$$\sigma(n) < 3q^n$$

wobei $q = 2/(3+\sqrt{5})$ brauchbar ist, ein Resultat, welches ebenso gut zu sein scheint, wie die Szüszsche Verschärfung [13] des Resultates von Lévy. Ob die Konstante von Szüsz

$$q = \sqrt{\left(2\zeta(3)-\zeta(2)\right)\left(7+2\zeta(4)-6\zeta(3)-\zeta(2)\right)} < 0{,}4$$

„besser" ist, könnte man nachrechnen.

§ 3. Der Satz von Gauß. Nach Satz 3 wissen wir schon:

$$\frac{1}{N}\left(\lambda(E)+\lambda(T^{-1}E)+\ldots+\lambda(T^{-N}E)\right) \to \mu(E).$$

Für gewöhnliche Kettenbrüche vermutete Gauß sogar

$$\lambda(T^{-N}E) \to \mu(E).$$

Satz 6. *Für alle $E\in\mathfrak{F}$ gilt:*

$$|\lambda(T^{-N}E) - \mu(E)| < b\lambda(E)\,\sigma(N).$$

Beweis. Ist $f\in L^1(B)$, so definieren wir Funktionale

$$S_n(f) = \int_B f(T^n x)\,dx, \qquad S_0(f) = \int_B f(x)\,dx.$$

Da

$$\int_B f(T^n x)\,dx = \sum \int_{B_{k_1\ldots k_s}} f(T^n x)\,dx = \sum \int_B f(y)\,\Delta_{k_1\ldots k_n}dy \leqslant C\int_B f(y)\,dy,$$

ist S_n absolut stetig bezüglich S_0. Nach Radon–Nikodym gibt es Funktionen $\zeta_n(x)$ mit

$$\int_B f(T^m x)\,dx = \int_B f(x)\,\zeta_n(x)\,dx.$$

Da nun

$$\int_B f(T^{m+1}x)\,dx = \int_B f(Tx)\,\zeta_n(x)\,dx = \sum_k \int_B f(y)\,\zeta_n(T_k^{-1}y)\,\Delta_k dy$$

folgt — sofern f beschränkt ist etwa —

$$\zeta_{n+1}(x) = \sum_k \zeta_n(V_k x)\,\Delta_k(x).$$

Da $\zeta_0(x) \equiv 1$ ist Satz 5 anwendbar und daher

$$|\zeta_n(x) - \varrho(x)| < b\sigma(n)$$

und nach (11)

$$\left|\int_B h(x)\,\zeta_n(x)\,dx - \int_B h(x)\,\varrho(x)\,dx\right| < b\sigma(n)\int_B h(x)\,dx.$$

Wir wählen $h(x) = \chi_E(x)$, die charakteristische Funktion von E. Es ist dann

$$\int_B \chi_E(x)\,\zeta_n(x)\,dx = \int_B \chi_E(T^m x)\,dx = \int_B \chi_{T^{-n}E}(x)\,dx = \lambda(T^{-n}E)$$

und somit

$$|\lambda(T^{-n}E) - \mu(E)| < b\lambda(E)\,\sigma(n).$$

Der wichtigste Spezialfall ist $E = B_i$. Dann ist

$$|\lambda(x\,|\,T^m x \in B_i) - \mu(B_i)| < b\lambda(B_i)\,\sigma(n).$$

§ 4. Die Geschwindigkeit der Mischung. Satz 4 lehrt uns, daß T mischend ist. Wir beweisen nun:

Satz 7. *Sei $E = B_{k_1\ldots k_s}$ und $F \in \mathfrak{F}$. Es gilt dann*

(12) $$\mu(E \cap T^{-n-s}F) = \mu(E)\,\mu(F)\big(1 + Q_2(\sigma(n))\big).$$

Beweis. Wir definieren Funktionale

$$P_i(f) = \frac{1}{\mu(E)}\int_E f(T^i x)\,d\mu(x).$$

Wiederum ist der Satz von Radon–Nikodym anwendbar und wir erhalten

$$\frac{1}{\mu(E)}\int_E f(T^i x)\,d\mu(x) = \int_B f(x)\,\pi_i(x)\,dx.$$

Es ist dann

$$\pi_0(x) = \frac{1}{\mu(E)}\,\chi_E(x)\,\varrho(x).$$

Ferner ist

$$\mu(E)\,P_{i+1}(f) = \int_E f(T^{i+1}x)\,d\mu(x) = \int_B f(Tx)\,\pi_i(x)\,dx = \sum_k \int_B f(y)\,\pi_i(V_k y)\,\Delta_k.$$

Daraus folgt

$$\pi_{i+1}(x) = \sum_k \pi_i(V_k x)\,\Delta_k$$

und daher

$$\int_B \pi_0(x)\,dx = \int_B \pi_i(x)\,dx = 1.$$

Zunächst ist Satz 5 aber nicht anwendbar, da $\pi_0(x) \notin \mathrm{Lip}^1(B)$. Nun ist aber

$$\pi_s(x) = \sum_{k_1,\ldots,k_s} \pi_0(V_{k_1\ldots k_s}x)\,\Delta_{k_1\ldots k_s}.$$

Es ist nun

$$\chi_E(V_{k_1\ldots k_s}x) \equiv 1$$

denn $E = B_{k_1\ldots k_s}$ und man überlegt sich nun, daß $\pi_s(x) \in \mathrm{Lip}^1(B)$ und

$$\frac{1}{\mu(E)}\,C^{-2} < \pi_s(x) < \frac{1}{\mu(E)}\,C^2$$

gelten. Man wendet daher Satz 5 auf die Folge $\pi_s, \pi_{s+1}, \ldots$ an und erhält aus (11):

$$\left|\int_B h(x)\,\pi_{n+s}(x)\,dx - \int_B h(x)\,d\mu(x)\right| < b\sigma(n)\int_B h(x)\,dx.$$

Setzen wir $h(x) = \chi_F(x)$, so erhalten wir

$$\left|\frac{1}{\mu(E)}\,\mu(E \cap T^{-n-s}F) - \mu(F)\right| < \lambda(F)\,\psi(n) < bC\mu(F)\,\sigma(n)$$

woraus das Ergebnis folgt.

Es ist klar, daß (12) nun für alle Mengen E gilt, welche Vereinigungen fremder $B_{k_1\ldots k_s}$ sind.

Folgerung 1. *Sei E ein Intervall $F \in \mathfrak{F}$, so ist*

(13) $$\mu(E \cap T^{-i}F) = \mu(E)\,\mu(F) + \mu(F)\,O\big(\sigma(i/2)\big).$$

Beweis. Wir überdecken den Rand von E mit disjunkten Mengen $B_{k_1\ldots k_s}$ und füllen das Innere mit ebensolchen Mengen aus. Es ist dann

$$E \subset E_1 \cup E_2$$

wobei $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, E_1 die Vereinigung der erstgenannten, E_2 die der übrigen Mengen $B_{k_1 \ldots k_s}$ ist. Es ist ferner

$$\mu(E_1) < c_{12}\sigma(s), \quad c_{12} = c_{12}(E)$$

wenn wir für E_1 eine minimale Überdeckung wählen. Wir erhalten dann:

$$\begin{aligned}\mu(E \cap T^{-n-s}F) &= \mu(E_1 \cap T^{-n-s}F) + \mu(E_2 \cap T^{-n-s}F)\\ &= \big(\mu(E_1)\mu(F) + \mu(E_2)\mu(F)\big)\big(1 + O(\psi(n))\big)\\ &\leqslant \big(\mu(E)\mu(F) + c_{12}\sigma(s)\mu(F)\big)\big(1 + O(\psi(n))\big).\end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\begin{aligned}\mu(E \cap T^{-n-s}F) &\geqslant \mu(E_2)\mu(F)\big(1 + O(\sigma(n))\big)\\ &\geqslant \big(\mu(E)\mu(F) - c_{12}\sigma(s)\mu(F)\big)\big(1 + O(\sigma(n))\big).\end{aligned}$$

Es folgt daraus

$$\mu(E \cap T^{-n-s}F) = \mu(E)\mu(F) + \mu(F)O(\sigma(s)).$$

Die im Satz 7 betrachteten Funktionen $\pi_s(x)$ genügten der von s unabhängigen Abschätzung

$$C^{-2} < \mu(E)\pi_s(x) < C^2$$

und man überlegt sich leicht, daß Satz 7 mit von s unabhängigen n gilt. Genauer, es gibt ein n_0, unabhängig von s, sodaß für alle $n \geqslant n_0$

$$\mu(E \cap T^{-n-s}F) \leqslant \mu(e)\mu(F)\big(1 + c_{13}\sigma(n)\big)$$

für $E = B_{k_1 \ldots k_s}$ gilt. Wir nehmen daher $s \geqslant n_0$ und können $n = s$ annehmen. Dann folgt von oben:

$$\mu(E \cap T^{-2n}F) = \mu(E)\mu(F) + \mu(F)O(\sigma(n)).$$

FOLGERUNG 2. *Bezeichnen wir mit $k^{(\nu)} = k^{(\nu)}(x)$ den Index des Bereiches B_k, sodaß $T^{\nu}x \in B_k$. Sei*

$$E = \{x \mid k^{(1)}(x) \geqslant M\} \quad \textit{und} \quad F = \{x \mid k^{(1)}(x) \geqslant N\}$$

für ganze Zahlen M und N. Dann gilt

$$\mu(E \cap T^{-n-1}F) = \mu(E)\mu(F)\big(1 + O(\sigma(n))\big). \tag{14}$$

Beweis. Es ist

$$M = \bigcup_{i=1}^{A} \{x \mid Tx \in B_i\}$$

wenn die Anzahl der B_j gleich A ist, bzw.

$$M = \bigcup_{i=M}^{\infty} \{x \mid Tx \in B_i\}$$

sonst. Aus der letzten Bemerkung zu Satz 7 folgt alles.

§ 5. Anzahlabschätzungen. In allen nun folgenden Sätzen (mit Ausnahme von § 6) setzen wir stets voraus

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sigma(i) \tag{15}$$

sei konvergent. Es ist dann, da $\sigma(x)$ nicht zunehmend ist, auch $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma(i/2)$ konvergent. (15) ist für (α)–(γ) erfüllt. Falls — und dies ist ein offenes Problem — $\sum \sigma(i)$ auch für den Jacobischen Algorithmus konvergent ist, so gelten die Sätze aus §§ 5 und 7 auch für den Algorithmus.

SATZ 8. *Sei I_n eine Folge von Intervallen. Wenn N eine ganze positive Zahl ist, bedeute $A(N, x)$ die Anzahl der $n \leqslant N$ mit $T^n x \in I_n$. Wir setzen*

$$\varphi(N) = \sum_{n \leqslant N} \mu(I_n).$$

Dann ist

$$A(N, x) = \varphi(N) + O\big(\varphi^{1/2}(N)\log^{3/2+\varepsilon}\varphi(N)\big) \quad \textit{mit } \varepsilon > 0 \textit{ für fast alle.}$$

Beweis. Es ist mit X_n und X_m

$$\begin{aligned}\mu(I_m \cap I_n) = \mu(T^{-m}X_m \cap T^{-n}X_n) &= \mu(X_m \cap T^{-(n-m)}X_n)\\ &\leqslant \mu(X_m)\mu(X_n) + \mu(X_n)O\big(\sigma(n - m/2)\big)\\ &= \mu(I_m)\mu(I_n) + \mu(I_n)O\big(\sigma(n - m/2)\big).\end{aligned}$$

Satz 3 aus [6], S. 113 ist daher anwendbar.

SATZ 9. *Sei $\xi(n)$ eine Folge ganzer Zahlen und $A(N, x)$ bedeute die Anzahl der $n \leqslant N$ mit*

$$k^{(n)}(x) \geqslant \xi(n).$$

Ist

$$\varphi(N) = \sum_{n \leqslant N} \sum_{k \geqslant \varphi(n)} \mu(B_k)$$

so ist für alle $x \in B$

$$A(N, x) = \varphi(N) + O\big(\varphi^{1/2}(N)\log^{3/2+\varepsilon}\varphi(N)\big).$$

Beweis. Wir setzen

$$E_n = \{x \mid k^n(x) \geqslant \xi(n)\}, \quad U_n = T^{n-1}E_n.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\mu(E_m \cap E_n) = \mu(U_m \cap T^{-(n-m)}U_n) &\leqslant \mu(U_m)\mu(U_n)\big(1 + O(\sigma(n-m))\big)\\ &= \mu(E_m)\mu(E_n)\big(1 + O(\sigma(n-m))\big).\end{aligned}$$

Wiederum ist Satz 3 aus [6] anwendbar.

Es ist nun

$$\mu(E_n) = \mu(U_n) = \mu\{x \mid k^{(1)}(x) \geqslant \varphi(n)\} = \sum_{k \geqslant \varphi(n)} \mu(B_k).$$

Damit ist alles gezeigt. Satz 9 ist im wesentlichen der Satz von Borel–Bernstein.

§ 6. Die Entropie von T. Nach (5) ist $Tx = T_k x$ für $x \in B_k$ eine Abbildung von B in sich. Wir bezeichnen nun mit

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \left|\frac{\partial T_k x}{\partial x}\right| \quad \text{für} \quad x \in B_k \tag{16}$$

die auf den B_k stückweise existierende Funktionaldeterminante der Abbildung T. Es ist daher stets

$$\left|\frac{\partial T_k x}{\partial x}\right| \Delta_k = 1.$$

Satz 10. *Ist* $\log \frac{\partial T}{\partial x} \in L^1(B)$, *so besitzt die Abbildung* T *die endliche Entropie*

$$h(T) = \int_B \log \frac{\partial T}{\partial x} d\mu(x).$$

Beweis. Nach Satz 1 ist

$$\bigvee T^{-s} B = \mathfrak{F}$$

und daher gilt nach Kolmogorov–Sinai

$$h(T) = h(\mathfrak{F}, T)$$

(siehe etwa [8] oder [1], Th. 7.1, S. 84 und Cor.).

Es ist

$$h(T^{-1}B, T) = -\sum_{B_i} \mu(B_i) \log \mu(B_i).$$

Wegen (6) konvergiert diese Reihe genau dann, wenn

$$-\sum \lambda(B_i) \log \lambda(B_i)$$

konvergiert. Bedingung (B) besagt

$$-\lambda(B_i) \log \inf \Delta_i + \lambda(B_i) \log \sup \Delta_i = \lambda(B_i) \log C$$

und daher ist obige Konvergenz mit der Konvergenz von

$$-\sum \int_{B_i} \log \Delta_i dx = \sum \int_{B_i} \log \frac{\partial T_i}{\partial x} dx$$

gleichwertig. Dieses Integral ist aber gleich

$$\int_B \log \frac{\partial T}{\partial x} dx$$

welches laut Vorigem existiert.

Der Satz von Shannon–Macmillan–Breiman ([1], S. 129) lehrt nun

$$\lim_{s \to \infty} \frac{1}{s} \log \frac{1}{\mu(B_{k_1 \ldots k_s}(x))} = h(T) \tag{17}$$

für μ-fast alle $x \in B$.

Wir setzen nun für $B_{k_1 \ldots k_s} = B^{(s)}$. Dann ist zunächst

$$\left| -\frac{1}{s} \log \lambda(B^{(s)}(x)) + \frac{1}{s} \log \mu(B^{(s)}(x)) \right| \leqslant \frac{1}{s} \log C$$

und ferner

$$\left| -\frac{1}{s} \log \lambda(B^{(s)}(x)) + \frac{1}{s} \log \Delta_{k_1 \ldots k_s}(x) \right| \leqslant \frac{1}{s} \log C.$$

Nun ist in einer intuitiv klaren Bezeichnung (die $k_1, \ldots, k_s$ sind ja Funktionen von x):

$$\Delta_{k_1 \ldots k_s}(x) = \Delta^{(s)}(x) = \Delta^{(1)}(x) \Delta^{(1)}(Tx) \ldots \Delta^{(1)}(T^{s-1}x)$$

unter Anwendung des Multiplikationssatzes für Funktionaldeterminanten. Weiter ist

$$-\frac{1}{s} \log \Delta^{(s)}(x) = -\frac{1}{s} \sum_{i=0}^{s-1} \log \Delta^{(1)}(T^i x) \to \int_B \log \frac{\partial T}{\partial x} d\mu(x) \quad \text{f.ü.}$$

unter Verwendung des individuellen Ergodensatzes.

Wir geben dazu Beispiele:

(α) $h(T) = \log r$,

(β) $h(T) = -\frac{1}{\log 2} \sum_k \int_{1/k+1}^{1/k} \frac{2 \log x}{1+x} dx = \frac{\pi^2}{6 \log 2}$ (siehe [1], S. 46).

(17) lehrt, wegen

$$\frac{1}{2} q_s^{-2} < \lambda(B^{(s)}) < q_s^{-2},$$

$$\lim_{s \to \infty} \sqrt[s]{q_s} \to \exp\left(\frac{h(T)}{2}\right),$$

(γ) $h(T) = \frac{\pi^2}{6 \log 2} + \frac{1}{\log 2} \int_0^{1/N} \frac{\log(x^2/N)}{1+x} dx.$

§ 7. Ein Konvergenzsatz. Der folgende Satz ist eine Verschärfung des individuellen Ergodensatzes für eine spezielle Klasse von Funktionen.

Der Beweis verläuft wie der Beweis von Th. 4 in [6], ist aber in einigen Kleinigkeiten richtiggestellt worden.

Satz 11. *Es sei $f(x)$ eine Funktion mit den Eigenschaften:*

(a) $f(x) = c_k \geqslant 0$ *für* $x \in B_k$, *d.h.* $f(x)$ *ist eine Treppenfunktion mit konstanten Werten auf den* B_k,

(b) $f(x) \in L^2(B)$.

Dann gilt:

$$\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} f(T^i x) = \int_B f(x)\,d\mu(x) + O(N^{-1/2}\log^{3/2+\varepsilon} N).$$

Beweis. Es ist

$$\int_B f^2(x)\,d\mu(x) = \sum_k c_k^2 \mu(B_k) = \beta^2$$

und

$$\int_B f(x)\,d\mu(x) = \sum_k c_k \mu(B_k) = \alpha.$$

Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung lehrt

$$\alpha^2 \leqslant \beta^2$$

da μ ein invariantes Maß ist, ist ferner

$$\int_B f(T^i x)\,d\mu(x) = \alpha.$$

Nun untersuchen wir für $m \geqslant 0$

$$\int_B f(T^{i+m}x) f(T^{j+m}x)\,d\mu(x).$$

Nachdem $f(T^a x) = c_r = f(r)$ für $T^a x \in B_r$, d.h. $x \in T^{-a}B_r$ ist obiges Integral gleich

$$\sum_{r,s} f(r)f(s)\mu(T^{-i}B_r \cap T^{-j-m}B_s) = \sum_{r,s} f(r)f(s)\mu(T^{-i}B_r \cap T^{-j}B_s).$$

Ist $j > i+1$, so ist nach Satz 7

$$\mu(T^{-i}B_r \cap T^{-j}B_s) = \mu(B_r \cap T^{-(j-i)}B_s) = \mu(B_r)\mu(B_s)\big(1+O(\sigma(j-i-1))\big).$$

Ähnliches gilt für $i > j+1$. Daher erhalten wir für $|i-j| > 1$

$$(18)\qquad \int_B f(T^{i+m}x) f(T^{j+m}x)\,d\mu(x)$$
$$= \Big(\int_B f(x)d\mu(x)\int_B f(x)\,d\mu(x)\Big)\big(1+O(\sigma(|i-j|-1))\big)$$
$$= \alpha^2\big(1+O(\sigma(i-j-1))\big).$$

Ist $|i-j| \leqslant 1$, so können wir lediglich die triviale Abschätzung

$$\int_B f(T^{i+m}x) f(T^{j+m}x)\,d\mu(x) \leqslant \beta^2$$

geben. Nun ist weiter

$$\int_B \Big[\sum_{i=0}^{N-1} f(T^{i+m}x) - \alpha n\Big]^2 d\mu(x)$$
$$= \int_B \Big[\sum_{i=0}^{N-1}\Big(f(T^{i+m}x) - \int_B f(T^{i+m}x)\,d\mu(x)\Big)\Big]^2 d\mu(x)$$
$$= \sum_{i,j=0}^{N-1}\int_B f(T^{i+m}x) f(T^{j+m}x)\,d\mu(x) - \alpha^2 N^2$$
$$\leqslant \alpha^2(N^2-3N+2) + \beta^2(3N-2) - \alpha^2 N^2 + \alpha^2 O\Big(\sum_{j>i+1}^{N-1}\sigma(j-i-1)\Big)$$
$$\leqslant (\beta^2-\alpha^2)(3N-2) + \alpha^2 O\Big(\sum_{j>i+1}^{N-1}\sigma(j-i-1)\Big) = O(N).$$

Man setzt $f(T^{i+m}x) - \alpha = f_{m+i}(x)$ und wendet Th. 6 von Gal-Koksma [3], S. 649 an. Wir vermerken noch, daß dabei folgendes Resultat benutzt wird: Ist $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent, so ist

$$\sum_{k=1}^{N}(N-k+1)b_k = O(N).$$

Folgerung. *Es sei* $f(x) = \chi_E(x)$ *mit* $E = B_t$, *d.h.* $f(x) = 1$ *für* $x \in B_t$ *und* $f(x) = 0$ *sonst. Dann ist*

$$\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1}\chi_E(T^i x) = \mu(B_t) + O(N^{-1/2}\log^{3/2+\varepsilon} N).$$

Auf genau die gleiche Weise ist folgende Verallgemeinerung zu beweisen:

Satz 12. *Ist $f(x)$ eine Funktion mit den Eigenschaften:*

(a) $f(x) = c_{k_1\ldots k_s}$ *für* $x \in B_{k_1\ldots k_s}$ *d.h.* $f(x)$ *ist eine Treppenfunktion mit konstanten Werten auf den* $B_{k_1\ldots k_s}$,

(b) $f(x) \in L^2(B)$.

Dann gilt:

$$\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} f(T^i x) = \int_B f(x)\,d\mu(x) + O(N^{-1/2}\log^{3/2+\varepsilon} N).$$

Literaturverzeichnis

[1] P. Billingsley, *Ergodic Theory and Information*, New York-London-Sydney 1965.

[2] W. Doeblin, *Remarques sur la théorie metrique de fractions continues*, Compositio Math. 7 (1940), S. 353-371.

[3] I. S. Gal and J. F. Koksma, *Sur l'ordre de grandeur des fonctions sommables*, Proc. Akad. Amsterdam 53 (1950), S. 638-653.

[4] S. Hartman, E. Marczewski et C. Ryll-Nardzewski, *Théorèmes ergodiques et leurs applications*, Coll. Math. 2 (1951), S. 109-123.

[5] A. Ya. Khintchine, *Continued Fractions*, Groningen 1963.

[6] W. Philipp, *Some metrical theorems in number theory*, Pacific J. Math. 20 (1967), S. 109-127.

[7] A. Rényi, *Representations for real numbers and their ergodic properties*, Acta Math. Ac. Sci. Hung. 8 (1957), S. 477-493.

[8] V. A. Rohlin, *Exact endomorphismus of a Lebesgue space*, Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. 25 (1961), S. 499-530 (Russian), English Transl.: Amer. Math. Soc. Trans. (2) 39, S. 1-36.

[9] P. Roos, *Iterierte Resttransformationen von Zahlendarstellungen*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 4 (1965), S. 45-63.

[10] C. Ryll-Nardzewski, *On the generalized ergodic theorems*, Studia Math. 12 (1951), S. 65-73.

[11] — *On the ergodic theory of continued fractions*, Studia Math. 12 (1951), S. 74-79.

[12] F. Schweiger, *Ein Kuzminscher Satz über den Jacobischen Algorithmus*, Erscheint im Journal für Reine und Angewandte Mathematik.

[13] P. Szüsz, *Über einen Kuzminschen Satz*, Hungar. Acta Math. 12 (1961), S. 447-453.

Reçu par la Rédaction le 23. 10. 1967

ACTA ARITHMETICA
XV (1968)

A note on factorizations in quadratic fields

by

W. Narkiewicz (Wrocław)

1. In [1] and [2] the following result was obtained:

If K is a quadratic number field with the class-number $h\neq 1,2$ moreover k and l are natural numbers and $D=(k,l)$ has all its factorizations into integers irreducible in K of the same length, then for the number $G_{k,l}(x)$ of the rational positive integers not exceeding x, congruent to $l(\operatorname{mod} k)$ and having all factorizations into integers irreducible in K with the same length one has the following asymptotic evaluation:

$$G_{k,l}(x)\sim C(k,l,K)x(\log\log x)^N(\log x)^{(1+S(D)-h)/2h},$$

where $C(k,l,K)$ is a positive constant, N is a nonnegative rational integer depending on the class-group H of K, and finally $S(D)$ is a rational integer satisfying the inequality $0\leqslant S(D)\leqslant g$, with g equal to the number of even invariants of H.

In the case $D=1$ it was shown that $S(1)=g$, and it was conjectured that the equality $S(D)=g$ holds for every D.

This conjecture was shown to be false by A. Schinzel, who produced the following counterexample: $K=Q(\sqrt{-14})$, $D=9$ in which case $H\simeq C_4$, thus $g=1$, but $S(9)=0$.

The aim of the present note is to characterize all those quadratic fields K for which $S(D)$ does not depend on D, and so is equal to g. (We assume that D satisfies the condition stated above, as otherwise the number $S(D)$ is undefined.) We prove the following

Theorem. *The equality $S(D)=g$ holds for every D (subject to the condition stated above) if and only if either the field K has an odd class-number, or its class-group H has the form $C_2\times C_2\times\ldots\times C_2$.*

At first we recall some definitions and notations introduced in [1]. Let $C_{h_1}\times\ldots\times C_{h_r}$ be a factorization of the class-group H into cyclic groups and let X_i be the generator of C_{h_i} for $i=1,2,\ldots,r$. For a given rational integer a and $i=1,2,\ldots,r$ define

$$[a]_i=\begin{cases} h_i-a & \text{if} \quad a\neq 0,\\ 0 & \text{if} \quad a=0\end{cases}$$