[4] A. O. Gelfond and Yu. V. Linnik, *Elementary Methods in Analytic Number Theory*, Chicago 1965.

[5] Yu. V. Linnik, *On the least prime numbers in an arithmetic progression II*, Mat. Sbornik 15 (1947), pp. 347-368.

[6] — *An elementary proof of Siegel's theorem, based on the method of I. M. Vinogradov* (in Russian), Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat. 14 (1950), pp. 327-342.

[7] A. Page, *On the number of primes in an arithmetic progression*, Proc. Lond. Math. Soc. 39 (1935), pp. 116-141.

[8] K. Prachar, *Primzahlverteilung*, Berlin 1957.

[9] C. L. Siegel, *Über die Classenzahl quadratischer Körper*, Acta Arith. 1 (1936), pp. 83-86.

[10] V. T. Sós and P. Turán, *On some new theorems in the theory of diophantine approximation*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 6 (1966), pp. 241-257.

[11] P. Turán, *Eine neue Methode in der Analysis und deren Anwendungen*, Budapest 1953.

Reçu par la Rédaction le 3. 10. 1967

ACTA ARITHMETICA
XIV (1968)

Demonstration d'une conjecture de P. Erdös

par

J. Lesca (Talence)

§ 1. Introduction. Pour une suite de nombres réels $(u_n)_{n\in N}$ (1) et une partie quelconque A de R, $\pi(A, n)$ $(n\in N)$ désigne le nombre de points appartenant à A parmi les n premiers points de la suite.

Supposons que pour tout $n\in N: 0 \leqslant u_n < 1$; soit β un nombre réel $0<\beta<1$; le *n-ième reste de la suite pour l'intervalle* $[0, \beta[$ est:

$$E(\beta, n) = \pi([0, \beta[, n) - n\beta.$$

Paul Erdös, dans [2], se demande s'il existe des suites (u_n) telles que la suite des restes $n\to E(\beta, n)$ est bornée pour tout β. Il pense qu'il n'en est rien; nous démontrerons, en effet:

Théorème. *Soient $(u_n)_{n\in N}$ une suite de nombres de l'intervalle réel $[0,1[$ et θ un intervalle quelconque de $[0,1[$. Alors il existe un ensemble continu de points $\beta\in\theta$ tels que la suite $n\to E(\beta, n)$ soit non bornée.*

La démonstration utilise le résultat suivant qui fut conjecturé par van der Corput:

(a) La fonction:

$$(\beta, n)\to E(\beta, n)$$

qui applique $[0,1[\times N$ dans R est *non bornée.*

(a) est conséquence immédiate d'un résultat plus précis dû à Mme. Aardene-Ehrenfest [1], qui a été amélioré par K. F. Roth [3].

§ 2. Transformation de la propriété (a). Il convient tout d'abord de généraliser la notation E. Soient $\gamma, \delta\in R$, $\gamma<\delta$, deux nombres réels et $(v_n)_{n\in N}$ une suite de nombres réels tels que pour tout $n\in N$, $\gamma\leqslant v_n<\delta$. Pour β réel, $\gamma<\beta<\delta$, posons:

$$E_{\gamma,\delta}(\beta, n) = \pi([\gamma, \beta[, n) - n(\beta-\gamma)/(\delta-\gamma).$$

(1) $N = 1, 2, 3, \dots$

LEMME 1. *γ, δ et la suite $(v_n)_{n\in N}$ étant donnée: pour tout t_0 réel, il existe $h\in N$ et $\beta\in[\gamma, \delta[$, tels que:*

$$|E_{\gamma,\delta}(\beta, h)| \geqslant t_0. \tag{1}$$

Démonstration. Considérons l'application linéaire σ de R dans R qui amène γ en 0 et δ en 1. On a, pour tout $\beta\in[\gamma, \delta[$ et $n\in N$:

$$E(\sigma(\beta), n) = E_{0,1}(\sigma(\beta), n) = E_{\gamma,\delta}(\beta, n). \tag{2}$$

($E_{\gamma,\delta}$ correspondant à la suite (v_n) et $E = E_{0,1}$ correspondant à la suite $u_n = \sigma(v_n)$.)

Il est clair que (1) est une conséquence de (2) et de (a).

LEMME 2. *Soient $(u_n)_{n\in N}$ une suite de points de $[0, 1[$, t un nombre réel et θ un intervalle de $[0, 1[$.*

Alors il existe $\beta\in\theta$ et $u\in N$ tels que:

$$|E(\beta, u)| \geqslant t. \tag{3}$$

Démonstration. Soient γ, δ $(\gamma < \delta)$, deux points distincts de θ. Si $\sup_{n\in N}\{|E(\gamma, n)|\} \geqslant t$ ou $\sup_{n\in N}\{|E(\delta, n)|\} \geqslant t$, le lemme est démontré; sinon on peut écrire, pour tout $n\in N$:

$$n\gamma - t \leqslant \pi([0, \gamma[, n) < n\gamma + t, \tag{4}$$

$$n\delta - t \leqslant \pi([0, \delta[, n) < n\delta + t. \tag{5}$$

On en déduit, pour tout $n\in N$:

$$|\pi([\gamma, \delta[, n) - n(\delta-\gamma)| < 2t. \tag{6}$$

La suite $n \to \pi([\gamma, \delta[, n)$ est donc non bornée et, par conséquent, l'ensemble des points de la suite (u_n) appartenant à $[\gamma, \delta[$, constitue une sous-suite (v_n). (Dans ce qui suit, les notations portant les indices γ, δ correspondent à la suite (v_n).) Pour la suite (v_n) d'éléments de $[\gamma, \delta[$, et pour $t_0 = 4t$, d'après le lemme 1, il existe $\beta\in[\gamma, \delta[$ et $v\in N$ tels que:

$$|E_{\gamma,\delta}(\beta, v)| \geqslant t_0 = 4t. \tag{7}$$

Soit $u\in N$ tel que $v = \pi([\beta, \gamma[, u)$. On peut écrire:

$$\begin{aligned} E(\beta, u) &= \pi([0, \beta[, u) - u\beta \\ &= \pi([0, \gamma[, u) - u\gamma + \pi_{\gamma,\delta}([\gamma, \delta[, v) - v(\beta-\gamma)/(\delta-\gamma) + \\ &\qquad + v(\beta-\gamma)/(\delta-\gamma) - u(\beta-\gamma), \end{aligned}$$

$$E(\beta, u) = E(\gamma, u) + E_{\gamma,\delta}(\beta, v) + \big((\beta-\gamma)/(\delta-\gamma)\big)\big(\pi([\gamma, \delta[, u) - (\delta-\gamma)u\big). \tag{8}$$

Les inégalités (4), (6) et (7) et l'égalité (8) entrainent bien l'inégalité (3).

§ 3. Fin de la démonstration du théorème.

1. Supposons construite une suite $(F_n)_{n\in \boldsymbol{N}}$ d'intervalles de $[0, 1]$ telle que:

(a) F_n est fermé $(n\in\boldsymbol{N})$;

(b) $F_0 \subset \theta$;

(c) $F_{n+1} \subset F_n$ $(n\in\boldsymbol{N})$;

(d) Pour tout $n\in\boldsymbol{N}$, il existe $u_n\in \boldsymbol{N}$ tel que, pour tout $\beta\in F_n$, $E(\beta, u_n) \geqslant n$.

Pour tout point β de l'intersection „non vide" des F_n, on a: $\beta\in\theta$ et $E(\beta, n)$ non bornée.

2. Si, pour toute suite finie $F_0, \ldots, F_n$ d'intervalles vérifiant les conditions ci-dessus, on sait construire deux intervalles disjoints $F_{n+1}^{(1)}$, $F_{n+1}^{(2)}$ vérifiant les conditions (a), (c), (d), alors, on est assuré de l'existence d'une infinité continue de points β qui appartiennent à θ et qui sont tels que $E(\beta, n)$ est non bornée.

3. Enfin la possibilité d'une telle construction est une conséquence du lemme 2 et du fait que, pour tout n, la fonction $x \to E(x, n)$ est continue à gauche.

Le théorème est démontré.

Travaux cités

[1] T. van Aardenne-Ehrenfest, *On the impossibility of a just distribution*, Indag. Math. 11 (1949), p. 221-269.

[2] P. Erdös, *Problems and results on diophantine approximations*, Compositio Math. 16 (1964), p. 52-65.

[3] K. F. Roth, *On irregularities of distribution*, Mathematika 1 (1954), p. 73-79.

Reçu par la Rédaction le 30. 10. 1967