ACTA ARITHMETICA
XIV (1968)

# Sur l'ordre maximum d'un élément dans le groupe $S_n$ des permutations

par

JEAN-LOUIS NICOLAS (Paris)

Désignons par $S_n$ le groupe des permutations à $n$ éléments. Landau considère la fonction ([1], § 61)

$$g(n) = \sup_{\sigma\in S_n} [\text{ordre de } \sigma].$$

**1. Rappel de propriétés de** $g(n)$ ([1], § 61, et [3]).

$g(n)$ est croissante, mais non strictement croissante;

$$g(n) = \sup_{n_1+n_2+\ldots+n_k=n} [\text{p.p.c.m. } (n_1, n_2, \ldots, n_k)];$$

$$g(n) = \sup_{\Sigma p^r\leqslant n} \prod p^r \quad (p \text{ premier}, \ r\in \boldsymbol{N}^*).$$

$\log g(n) \sim \sqrt{n\log n}$ quand $n\to\infty$, et même ([3]):

$$\log g(n) = \sqrt{n\log n}\left\{1+\frac{\log\log n}{2\log n}-\frac{1+o(1)}{2\log n}\right\}.$$

DÉFINITION. Soit $l$: $\boldsymbol{N}^*\to \boldsymbol{N}$;

$$l(1) = 0,$$

$$l\Big(\prod_{i=1}^{k} p_i^{a_i}\Big) = \sum_{i=1}^{k} p_i^{a_i} \qquad \text{avec } p_i \text{ premier et } a_i\in \boldsymbol{N}^*.$$

$l$ est une fonction arithmétique additive:

$$(m, n) = 1 \Rightarrow l(mn) = l(m)+l(n),$$

et sa restriction aux nombres $p^a$ ($p$ premier, $a\in \boldsymbol{N}^*$) est l'application identique. On a $l(k)\leqslant k$ pour tout $k$, et $l(k) = k$ entraîne $k = p^a$.

Remarque. Si $a = 0$, $l(p^a) = 0 \neq p^a = 1$.

On a donc:

(1) $$g(n) = \sup_{l(k)\leqslant n} k.$$

Ce qui équivaut à

(2) $\begin{cases} l(g(n)) \leqslant n, \end{cases}$
(3) $M > g(n) \Rightarrow l(M) > n.$

Remarquons que (3) est équivalent à (3′):

(3′) $$M > g(n-1) \Rightarrow l(M) \geqslant n.$$

Propriété caractéristique. *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes*:

(a) $m \in g(\boldsymbol{N})$,

(b) $M > m \Rightarrow l(M) > l(m)$.

Démonstration. (a) $\Rightarrow$ (b). Soit $m \in g(\boldsymbol{N})$, et soit $M > m$, (3) et (2) donnent:

$$l(M) > n \geqslant l(g(n)) = l(m).$$

(b) $\Rightarrow$ (a). Soit $m$ vérifiant (b). Si $m \notin g(\boldsymbol{N})$, comme $g$ est croissante et non bornée, il existe $n$ tel que

$$g(n-1) < m < g(n).$$

(3′) et (2) donnent:

$$l(m) \geqslant n \geqslant l(g(n)).$$

On a construit $M = g(n)$, $M > m$ et $l(M) \leqslant l(m)$, ce qui contredit l'hypothèse.

Corollaire. *Si* $M \neq g(n)$ *et si* $l(M) \leqslant l(g(n))$, *alors* $M < g(n)$.

C'est une autre façon d'écrire: (a) $\Rightarrow$ (b).

Remarque. Soit $f$: $\boldsymbol{N}^* \to \boldsymbol{R}$ une fonction arithmétique.

On dit que $f$ est grande en $n$, si $m < n \Rightarrow f(m) < f(n)$;

On dit que $f$ est petite en $n$, si $m > n \Rightarrow f(m) > f(n)$.

La propriété caractéristique s'écrit alors:

L'ensemble des nombres $n \in \boldsymbol{N}^*$, où $l$ est petite, est exactement $g(\boldsymbol{N})$.

Soit $d(n)$ le nombre de diviseurs de $n$ ([1], § 60). Ramanujan [2] appelle *Highly composite number* un nombre en lequel la fonction $d$ est grande, et utilise pour étudier ces nombres des méthodes qui peuvent s'appliquer à d'autres fonctions, et en particulier à $l$.

Relation entre $l$ et $g$.

1° Calcul de $l(g(n))$. On définit sur $\boldsymbol{N}$ la relation d'équivalence

$$n \sim n' \Leftrightarrow g(n) = g(n').$$

Soit $\hat{n}$ le plus petit élément de la classe de $n$. On a

$$g(\hat{n}) = g(n); \quad \hat{n} \leqslant n; \quad g(\hat{n}-1) < g(\hat{n}).$$



(3′) donne $l(g(\hat{n})) \geqslant \hat{n}$, et (2) donne $l(g(\hat{n})) \leqslant \hat{n}$, donc

$$l(g(n)) = l(g(\hat{n})) = \hat{n}.$$

On a en fait démontré les équivalences:

$$n = \hat{n} \Leftrightarrow l(g(n)) = n \Leftrightarrow g(n) > g(n-1) \Leftrightarrow n \in l \circ g(\boldsymbol{N}).$$

2° $l$ est strictement croissante sur $g(\boldsymbol{N})$. Soit $g(m) < g(n)$, alors $g(m) < g(\hat{n})$, donc $m < \hat{n}$ ($g$ est croissante) et, avec (2),

$$l(g(m)) \leqslant m < \hat{n} = l(g(n)).$$

3° $g(l(N)) \geqslant N$ pour tout $N \in \boldsymbol{N}^*$. L'égalité a lieu si, et seulement si, $N \in g(\boldsymbol{N})$. Puisque $g(l(N)) = \sup_{l(k) \leqslant l(N)} k$, $N$ est une valeur possible de $k$, et $g(l(N)) \geqslant N$.

Si $N \notin g(\boldsymbol{N})$, il ne peut y avoir égalité, car $g(l(N)) \in g(\boldsymbol{N})$. Si $N = g(n)$, $g(l(g(n))) = g(\hat{n}) = g(n)$.

4° Soient $A \in g(\boldsymbol{N})$, et $A^*$ le suivant de $A$ dans $g(\boldsymbol{N})$; alors

(4) $$l(A) \leqslant n < l(A^*) \quad \text{entraîne} \quad g(n) = A.$$

On a $g(n) \leqslant g[l(A^*)-1] < g(l(A^*)) = A^*$, car $l(A^*) \in l(g(\boldsymbol{N}))$. D'autre part, $g(n) \geqslant g(l(A)) = A$, donc $g(n) = A$.

5° On a

(5) $$A < N \leqslant A^* \Rightarrow l(N) \geqslant l(A^*),$$

$g(l(N)) \geqslant N$, donc $g(l(N)) \geqslant A^*$.

Or si $l(N) < l(A^*)$, on aurait $g(l(N)) \leqslant A$ d'après (4), d'où contradiction.

Finalement, la restriction de $l$ à $g(\boldsymbol{N})$ est une bijection croissante sur $l(g(\boldsymbol{N}))$, et l'application réciproque est $g$. (4) nous permet de calculer $g(n)$ si $n \notin l(g(\boldsymbol{N}))$, et (5) nous donne une minoration pour $l(N)$ si $N \notin g(\boldsymbol{N})$.

**2. Etude de la décomposition en facteurs premiers de $g(n)$.** Pour cela, on va utiliser systématiquement la propriété caractéristique. On rappelle que $v_p(N)$ désigne le plus grand exposant $\alpha$ tel que $p^\alpha$ divise $N$.

Propriété 1. *Soient* $p, q$ *deux nombres premiers*, $p < q$. *Si*

$$\alpha = v_p(g(n)) \quad \text{et} \quad \beta = v_q(g(n)),$$

*alors* $\beta \leqslant \alpha+1$.

Démonstration. On peut supposer $\beta \geqslant 2$ (si $\beta = 0$ ou 1, c'est évident). Soit $M = \dfrac{p^k}{q} g(n)$, avec $k$ défini par $pq > p^k > q$.

On a $M > g(n)$, donc $l(M) > l(g(n))$, donc si $\alpha \neq 0$,

$$p^{\alpha+k} + q^{\beta-1} > p^\alpha + q^\beta,$$

ce qui entraîne

$$p^{\alpha+1}q+q^{\beta-1} > p^{\alpha}+q^{\beta},$$

$$p^{\alpha}(pq-1) > q^{\beta-1}(q-1) \geqslant pq^{\beta-1},$$

(6) $$p^{\alpha}q > p^{\alpha-1}(pq-1) > q^{\beta-1}.$$

$$q^{\alpha} > p^{\alpha} \geqslant q^{\beta-2},$$

$\alpha > \beta-2$, donc $\beta \leqslant \alpha+1$.

Si $\alpha = 0$, $l(M) > l(g(n))$ s'écrit:

$$p^{k}+q^{\beta-1} > q^{\beta},$$

les calculs sont les mêmes, la majoration (6) $pq-1 < pq$ n'ayant pas à être faite.

PROPRIÉTÉ 2. *Soit $p$ le plus grand nombre premier divisant $g(n)$. On a $v_p(g(n)) = 1$, sauf pour $n = 4$.*

On désigne par $q$ le nombre premier suivant $p$.

Si $\alpha = v_p(g(n)) \geqslant 2$, on pose $M = \dfrac{q}{p}\,g(n) > g(n)$;

$$l(M)-l(g(n)) = q+p^{\alpha-1}-p^{\alpha}.$$

D'après le postulat de Bertrand ([1], § 22), $q < 2p$, donc

$$q+p^{\alpha-1}-p^{\alpha} < 2p+p^{\alpha-1}-p^{\alpha} \leqslant 2p+p-p^2 = p(3-p),$$

car la fonction $\alpha \mapsto p^{\alpha-1}-p^{\alpha}$ est décroissante.

Si $p \geqslant 3$, $l(M)-l(g(n)) \leqslant 0$, il y a contradiction.

Si $p = 2$, il reste à résoudre $g(n) = 2^{\alpha}$.

Si $\alpha \geqslant 3$, $M = 2^{\alpha-1}3 > g(n)$ et $l(M)-l(g(n)) = 3-2^{\alpha-1} < 0$; les seules solutions sont $g(2) = 2$ et $g(4) = 4$. Seule cette dernière est exception.

PROPRIÉTÉ 3. *$g(n)$ est pair pour $n \neq 3, 8, 15$.*

LEMME. *Si deux nombres premiers distincts $p$ et $p'$ ne divisent pas $g(n)$, tout nombre premier $q \geqslant p+p'$ ne divise pas $g(n)$.*

Démonstration du lemme. Soit $p < p'$, et supposons que $q \geqslant p+p'$ divise $g(n)$. Soit $k \geqslant 1$, défini par

$$p^{k}+p' \leqslant q \leqslant p^{k+1}+p'-1,$$

et posons $M = \dfrac{p^k p'}{q}\,g(n)$, on a

$$l(M)-l(g(n)) = p^{k}+p'-q \leqslant 0.$$



D'autre part,

$$\begin{aligned} p^{k}p'-q &\geqslant p^{k}p'-p^{k+1}-p'+1 \\ &= p^{k}(p'-p)-p'+1 \geqslant p(p'-p)-p'+1, \end{aligned}$$

et

$$p(p'-p)-p'+1 = (p-1)(p'-p-1) \geqslant 0,$$

donc $M \geqslant g(n)$, il y a contradiction.

Démonstration de la propriété 3. Si 2 ne divise pas $g(n)$, $g(n)$ est „quadratfrei" (propriété 1), et 11 ne divise pas $g(n)$. Sinon, en effet, soit $M = \frac{12}{11}\,g(n)$, $M > g(n)$, et $l(M)-l(g(n)) \leqslant 4+6-11 < 0$. D'après le lemme, tout nombre premier supérieur ou égal à 13 ne divise pas $g(n)$. Donc $g(n)$ divise $3\cdot 5\cdot 7 = 105$. En examinant les valeurs de $g(n)$, on trouve comme seule exception $n = 3, 8, 15$, où $g(n)$ vaut $3, 15, 105$.

COROLLAIRE. *Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, $\dfrac{g(n+1)}{g(n)} \leqslant 2$ ou, ce qui est équivalent, pour tout $A \in g(\mathbf{N})$, $\dfrac{A^*}{A} \leqslant 2$.*

Effectivement, si $g(n+1) \neq g(n)$, en posant $g(n) = A$, on a $g(n+1) = A^*$. Supposons que $A^*$ soit pair et que $\dfrac{A^*}{A} > 2$, on aurait $A < \dfrac{A^*}{2} < A^*$, donc, d'après (5), $l\left(\dfrac{A^*}{2}\right) \geqslant l(A^*)$, ce qui est faux. Si $A^* = 3, 15, 105$, on trouve $A = 2, 12, 84$, la relation est encore vérifiée.

PROPRIÉTÉ 4. *Soient $\lambda, \mu$ deux nombres premiers, $\alpha = v_\lambda(g(n))$ et $\beta = v_\mu(g(n))$, on a:*

$$\frac{1}{\lambda\mu} \leqslant \frac{\lambda^{\alpha}}{\mu^{\beta}} \leqslant \lambda\mu.$$

Il suffit de vérifier l'une des inégalités, par exemple $\dfrac{1}{\lambda\mu} \leqslant \dfrac{\lambda^{\alpha}}{\mu^{\beta}}$. Soit $k$ défini par $\mu-1 < \lambda^{k} \leqslant \lambda(\mu-1)$. On a donc $k \geqslant 2$ si $\lambda < \mu$, et $k = 1$ si $\lambda > \mu$. Posons $M = \dfrac{\lambda^{k}}{\mu}\,g(n)$, on a

$$M > g(n) \quad \text{et} \quad l(M)-l(g(n)) > 0,$$

donc

(7) $$\lambda^{\alpha+k}-\lambda^{\alpha}+\mu^{\beta-1}-\mu^{\beta} > 0.$$

Posons $x = \dfrac{\lambda^\alpha}{\mu^\beta}$, on obtient

$$x > \frac{1-\dfrac{1}{\mu}}{\lambda^k-1} > \frac{1-\dfrac{1}{\mu}}{\lambda(\mu-1)} = \frac{1}{\lambda\mu}.$$

Ce raisonnement ne vaut que pour $\alpha \geqslant 1$ et $\beta \geqslant 2$.

Pour $\beta = 1$, l'inégalité (7) est encore vérifiée.

Si $\beta = 0$; on a toujours $\lambda^\alpha \geqslant \dfrac{1}{\lambda\mu}$.

Si $\alpha = 0$: si $\lambda < \mu$, d'après la propriété 1, $\beta \leqslant 1$ et $\dfrac{1}{\lambda\mu} \leqslant \dfrac{1}{\mu}$; si $\lambda > \mu$: si $\beta = 1$, on a bien $\dfrac{1}{\lambda\mu} \leqslant \dfrac{1}{\mu}$; si $\beta \geqslant 2$, l'inégalité (7) devient $\lambda + \mu^{\beta-1} - \mu^\beta > 0$. Posons $x = \dfrac{1}{\mu^\beta}$,

$$x > \frac{1-\dfrac{1}{\mu}}{\lambda} = \frac{\mu-1}{\lambda\mu} \geqslant \frac{1}{\lambda\mu}.$$

Propriété 5. *Soit $p$ le plus grand nombre premier divisant $g(n)$; soit $q$ le nombre premier suivant $p$; soit $\lambda$ un nombre premier tel que $\alpha = v_\lambda(g(n)) \geqslant 2$, alors,*

$$\lambda^\alpha - \lambda^{\alpha-1} < q \quad \textit{et} \quad \lambda < q^{1/\alpha}+1.$$

On pose $M = \dfrac{q}{\lambda} g(n)$, $M > g(n)$, donc

$$l(M) - l(g(n)) = q + \lambda^{\alpha-1} - \lambda^\alpha > 0,$$

donc $\lambda^\alpha - \lambda^{\alpha-1} < q$. D'autre part, les solutions de cette inéquation en $\lambda$ vérifient $\lambda < q^{1/\alpha}+1$.

Propriété 6. *Soient $A$ et $A^*$ deux éléments consécutifs de $g(\mathbf{N})$, $p$ le plus grand nombre premier divisant $A$, $q$ son suivant. On a*

$$l(A^*) - l(A) \leqslant q - p.$$

Soit $A_1$ le plus petit nombre de $g(\mathbf{N})$ vérifiant $\dfrac{Aq}{p} \leqslant A_1$. On a, d'après (5),

$$l\left(\frac{Aq}{p}\right) = l(A) + q - p \geqslant l(A_1),$$



et

$$l(A)^* - l(A) \leqslant l(A_1) - l(A) \leqslant q - p.$$

Propriété 7. *Soit $k = \omega(g(n))$ le nombre des nombres premiers divisant $g(n)$. On a*

$$\omega(g(n)) \sim 2\sqrt{\frac{n}{\log n}}.$$

$p_h$ étant le $h$-ième nombre premier, on pose:

$$P_j = \sum_{h=1}^{j} p_h.$$

$n$ étant donné, on définit $j$ par $P_j \leqslant n \leqslant P_{j+1}$. On a

$$k \leqslant j; \quad g(n) \leqslant \left(\frac{n}{k}\right)^k.$$

$g(n)$ étant un produit de $k$ facteurs de somme au plus $n$. Soit

$$\log g(n) \leqslant k \log \frac{n}{k}.$$

D'autre part, $n \sim P_j \sim \dfrac{j^2}{2}\log j$ d'où $j \sim 2\sqrt{\dfrac{n}{\log n}}$.

Or la fonction $k \mapsto \left(\dfrac{n}{k}\right)^k$ est croissante pour $k < \dfrac{n}{e}$ donc pour $k \leqslant j$. Et pour $k = 2c\sqrt{\dfrac{n}{\log n}}$, $k \log \dfrac{n}{k}$ est équivalent à $c\sqrt{n \log n}$. Donc pour tout $c < 1$, on a $k > 2c\sqrt{\dfrac{n}{\log n}}$.

Comme d'autre part,

$$k \leqslant j \sim 2\sqrt{\frac{n}{\log n}}.$$

On a bien

$$k = \omega(g(n)) \sim 2\sqrt{\frac{n}{\log n}}.$$

Corollaire. *Le plus grand nombre premier $p$ divisant $g(n)$ tend vers l'infini avec $n$.*

On a

$$p \geqslant p_k \sim k \log k \sim n \log n.$$

PROPRIÉTÉ 8. *Soit $k \in \mathbf{N}$; soient $2, 3, \ldots, p_k$ les $k$ premiers nombres premiers. On suppose que $p_k < p$, $p$ étant toujours le plus grand nombre premier divisant $g(n)$. On pose:*

$$a_i = v_{p_i}(g(n)) \quad pour \quad i = 1, 2, \ldots, k,$$

*et*

$$m = \sum_{i=1}^{k} l(p_i^{a_i}).$$

*Alors il existe une constante $c_k$ indépendante de $p$ telle que*

$$m > \frac{1}{c_k} p^{1-(1/k)}.$$

*D'autre part, soit $\mu$ un nombre premier ne divisant pas $g(n)$ et tel que $\mu > e^{\theta(p_k)}$, alors*

$$m < \mu \frac{\mu^{1/k}}{\mu^{1/k} - c_k}.$$

Démonstration. Soit $\gamma\colon \mathbf{N}^* \to \mathbf{N}$, la fonction définie par

$$\gamma(j) = \sup_{\sum_{i=1}^{k} l(p_i^{a_i}) \leqslant j} \Big(\prod_{i=1}^{k} p_i^{a_i}\Big).$$

On a, pour tout $j$,

$$\gamma(j) \leqslant \left(\frac{j}{k}\right)^k,$$

$\gamma(j)$ étant un produit de $k$ nombres de somme au plus $j$. D'autre part, si l'on fait

$$a_i = \left[\frac{\log \dfrac{j}{k}}{\log p_i}\right],$$

on voit que

$$\gamma(j) \geqslant \left(\frac{j}{k}\right)^k \frac{1}{e^{\theta(p_k)}},$$

où $\theta$ est la fonction de Čebyšev. D'autre part, on a

$$l(\gamma(j)) \leqslant j, \quad \gamma(m) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{a_i} \quad \text{et} \quad l(\gamma(m)) = m.$$



Considérons maintenant $M = \dfrac{\gamma(m+p)}{p\gamma(m)} g(n)$.

$$l(M) - l(g(n)) \leqslant m + p - p - m = 0,$$

donc $M < g(n)$,

$$\frac{(m+p)^k}{k^k} \cdot \frac{1}{e^{\theta(p_k)}} \leqslant \gamma(m+p) < p\gamma(m) \leqslant p\left(\frac{m}{k}\right)^k.$$

On en déduit

$$m > \frac{p}{p^{1/k} c_k - 1} > \frac{1}{c_k} p^{1-(1/k)} \qquad \text{avec} \qquad c_k = e^{\theta(p_k)/k}.$$

De même, on pose $M = \mu \dfrac{\gamma(m-\mu)}{\gamma(m)} g(n)$. Si $m < \mu$, le résultat est acquis, sinon on a $l(M) - l(g(n)) \leqslant 0$, donc $M < g(n)$,

$$\mu\gamma(m-\mu) < \gamma(m),$$

$$\mu(m-\mu)^k < m^k e^{\theta(p_k)}.$$

Comme $\mu^{1/k} > c_k$,

$$m < \mu \frac{\mu^{1/k}}{\mu^{1/k} - c_k}.$$

PROPRIÉTÉ 9. *Soit $\lambda$ un nombre premier fixé; soit $a_\lambda = v_\lambda(g(n))$. Quand $n \to \infty$, on a*

$$a_\lambda \log \lambda = \log p + O(\log\log p),$$

*$p$ étant le plus grand nombre premier divisant $g(n)$.*

Démonstration. Etudions d'abord le cas $\lambda = 2$. Pour une autre valeur de $\lambda$, le résultat découlera de la propriété 4.

Utilisant les notations de la propriété 8, pour $k$ donné,

$$\frac{m}{2^{a_2}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{l(p_i^{a_{p_i}})}{2^{a_2}} \leqslant \sum_{i=1}^{k} \frac{p_i^{a_{p_i}}}{2^{a_2}} \leqslant 2 \sum_{i=1}^{k} p_i = 2P_k,$$

à l'aide de la propriété 4. $P_k$ est défini comme étant la somme des $k$ premiers nombres premiers. On a donc

$$2^{a_2} \geqslant \frac{1}{2P_k c_k} p^{1-(1/k)}.$$

La propriété 4 nous donne ($\mu = p$, $\beta = 1$, $\lambda = 2$): $2^{a_2} \leqslant 2p$, donc

$$\left(1 - \frac{1}{k}\right) \log p - \log 2P_k c_k \leqslant a_2 \log 2 \leqslant \log p + \log 2.$$

On en déduit $a_2 \log 2 \sim \log p$.

On peut même préciser: si l'on fait $k = [\log p]$, on a

$$P_k \sim \frac{k^2}{2} \log k,$$

$$\log P_k \sim 2 \log k \sim 2 \log\log p,$$

$$\log c_k = \frac{\theta(p_k)}{k} \sim \log k \sim \log\log p.$$

Donc,

$$a_2 \log 2 = \log p + O(\log\log p).$$

Propriété 10. *Avec les mêmes notations qu'à la proposition* 9, *on a*

$$\frac{2^{a_2}}{p} = O\left(\frac{1}{\log\log\log p}\right).$$

Soit toujours $k$ fixé et, pour $1 \leqslant i \leqslant k$, $a_i = v_{p_i}(g(n))$. D'après la propriété précédente, pour $n$ assez grand, on a $a_i \neq 0$ et en utilisant la propriété 4:

$$\frac{m}{2^{a_2}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{p_i^{a_{p_i}}}{2^{a_2}} \geqslant \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i} = \omega_k \quad (\text{définition de } \omega_k).$$

Pour un $n$ assez grand, on peut appliquer la propriété 8, avec $\mu = q$, $q$ étant le nombre premier suivant $p$.

$$\frac{q}{2^{a_2}} \geqslant \frac{q^{1/k} - c_k}{q^{1/k}} \omega_k.$$

En faisant tendre $q$ vers l'infini, on voit que $\frac{q}{2^{a_2}} \geqslant \omega_k$. Or $\omega_k$ est équivalent à $\frac{1}{2} \log\log k$, quand $k$ tend vers l'infini, donc $\frac{q}{2^{a_2}}$ tend vers l'infini avec $n$.

On peut même préciser: faisant $k = [\sqrt{\log q}]$, on a

$$\log c_k \sim \log k \sim \tfrac{1}{2} \log\log q,$$

$$\log q^{1/k} = \frac{1}{k} \log q \sim \sqrt{\log q},$$

on a bien $q^{1/k} > c_k$, et on obtient

$$\frac{2^{a_2}}{q} = O\left(\frac{1}{\log\log\log q}\right),$$

d'où la propriété puisque $q \sim p$.



Propriété 11. *Soit $p$ le plus grand nombre premier divisant $g(n)$, soit $\mu$ le plus petit nombre premier ne divisant pas $g(n)$. On pose $a_n = p/\mu$. Alors,*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

Remarquons d'abord que la propriété 8 montre que $\mu$ tend vers l'infini avec $n$.

La démonstration se fait en deux temps.

1er temps: On a $\underline{\lim}\, a_n < +\infty$, et plus précisément $\overline{\lim}\, a_n \leqslant 6$. Reprenant les notations de la propriété 8, on fait $k = 2$, et on étudie:

$$M = \frac{\mu}{p} \cdot \frac{\gamma(m+p-\mu)}{\gamma(m)} g(n).$$

On a $l(M) \leqslant l(g(n))$, donc $M < g(n)$.

Soit $\gamma(m+p-\mu) < a_n \gamma(m)$,

$$[m + (a-1)\mu]^2 < 6 a_n m^2,$$

car $e^{\theta(p_2)} = 6$. Donc,

$$m > \mu \frac{a_n - 1}{\sqrt{6a_n} - 1}.$$

Mais, d'après la propriété 8,

$$\mu \frac{\sqrt{\mu}}{\sqrt{\mu} - \sqrt{6}} > m.$$

S'il existait une sous-suite $a_{n_j}$ de $a_n$ dont la limite soit $> 6$, en faisant tendre $j$ vers l'infini, on ne pourrait réaliser simultanément ces deux inégalités.

2e temps: Supposons que $\overline{\lim}\, a_n > 1$; il existerait alors $\varepsilon > 0$ tel que, pour une infinité de $n$, on ait $1 + \varepsilon < a_n < 7$. Posons $M = \frac{8\mu}{p} g(n)$. Pour les $n$ vérifiant $1 + \varepsilon < a_n < 7$, $M > g(n)$ et

$$l(M) - l(g(n)) = 7 \cdot 2^{a_2} + \mu - p < 7 \cdot 2^{a_2} - \frac{\varepsilon p}{1+\varepsilon} \sim -\varepsilon p.$$

Pour $p$ assez grand, $l(M) - l(g(n)) < 0$, il y aurait contradiction.

Si $a_n < 1$, alors $\mu$ est le nombre premier suivant $p$, et on a $\lim a_n = 1$. La propriété est démontrée.

Corollaire. *Soit toujours $p$ le plus grand nombre premier divisant $g(n)$, on a*

$$p \sim \log g(n) \sim \sqrt{n \log n}.$$

En effet:
$$\mu \leqslant p_k \leqslant p.$$
Comme
$$p \sim \mu, \quad p \sim p_k \sim \sqrt{n \log n}$$
(propriété 7).

**3. Construction de** $G$ (cf. [2], § 32). Soit $G$ l'ensemble des nombre $N$ qui vérifient la propriété: Il existe $\varrho \in \boldsymbol{R}^+$ tel que, pour tout $A \in \boldsymbol{N}^*$, $A \neq N$,
$$l(A) - l(N) > \varrho \log \frac{A}{N}.$$

1° $G \subset g(\boldsymbol{N})$ (propriété caractéristique).

2° Supposons $N \neq 4$, et soit $p$ le plus grand nombre premier divisant $N$. On sait (propriété 2) que $v_p(N) = 1$.

Si $A = \dfrac{N}{p}$, on obtient $\varrho > \dfrac{p}{\log p}$.

Si $q$ est le plus petit nombre premier ne divisant pas $N$, on pose $A = Nq$, et on obtient $\varrho < \dfrac{q}{\log q}$.

Or la fonction $x \mapsto \dfrac{x}{\log x}$ est croissante pour $x > e$. On a donc $q > p$, la seule exception possible étant $p = 3$, $q = 2$. On constatera que $3 \in G$ avec la valeur $\varrho = 2,8$.

3° Soient $\lambda < p$ un nombre premier, et $\alpha = v_\lambda(N)$. Etudions $A = N\lambda$ et $A = \dfrac{N}{\lambda}$, on trouve:
$$\alpha = 1, \quad \frac{\lambda}{\log \lambda} < \varrho < \frac{\lambda^2 - \lambda}{\log \lambda},$$
$$\alpha \geqslant 2, \quad \frac{\lambda^\alpha - \lambda^{\alpha-1}}{\log \lambda} < \varrho < \frac{\lambda^{\alpha+1} - \lambda^\alpha}{\log \lambda}.$$
Pour tout $\lambda$ premier, considérons l'ensemble $E_\lambda \subset \boldsymbol{R}$:
$$E_\lambda = \left\{ \frac{\lambda}{\log \lambda}, \frac{\lambda^2 - \lambda}{\log \lambda}, \ldots, \frac{\lambda^{\alpha+1} - \lambda^\alpha}{\log \lambda}, \ldots \right\}.$$
Pour tout $\lambda \neq 2$, la suite constituant $E_\lambda$ est strictement croissante. Pour $\lambda = 2$, les deux premiers termes sont confondus.

Si on se donne $\varrho \notin E_\lambda$, la valeur de $\alpha = v_\lambda(N)$ est donc déterminée par
$$\frac{\lambda^\alpha - \lambda^{\alpha-1}}{\log \lambda} < \varrho < \frac{\lambda^{\alpha+1} - \lambda^\alpha}{\log \lambda}.$$



Soit $E = \bigcup_{\lambda \text{ premier}} E_\lambda$. $E$ est un ensemble discret de $\boldsymbol{R}$ (la quantité de tels nombres inférieurs à $x$ est majorable et donc finie). D'autre part, deux éléments de $E$ sont distincts: si l'on avait
$$\frac{a}{\log \mu} = \frac{b}{\log \lambda},$$
$\dfrac{\log \mu}{\log \lambda}$ serait rationnel, ce qui est faux.

4° Table des valeurs.

| $\varrho$ | $\varrho$ | $N$ | $N$ | $l(N)$ |
|---|---|---|---|---|
| $3/\log 3$ | 2,73 | | | |
| | | 3 | 3 | 3 |
| $2/\log 2 = (4-2)/\log 2$ | 2,89 | | | |
| | | $4\cdot 3$ | 12 | 7 |
| $5/\log 5$ | 3,11 | | | |
| | | $4\cdot 3\cdot 5$ | 60 | 12 |
| $7/\log 7$ | 3,60 | | | |
| | | $4\cdot 3\cdot 5\cdot 7$ | 420 | 19 |
| $11/\log 11$ | 4,59 | | | |
| | | $4\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11$ | 4 620 | 30 |
| $13/\log 13$ | 5,07 | | | |
| | | $4\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13$ | 60 060 | 43 |
| $(9-3)/\log 3$ | 5,46 | | | |
| | | $4\cdot 9\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13$ | 180 180 | 49 |
| $(8-4)/\log 2$ | 5,77 | | | |
| | | $8\cdot 9\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13$ | 360 360 | 53 |
| $17/\log 17$ | 6,00 | | | |
| | | $8\cdot 9\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 17$ | 6 126 120 | 70 |
| $19/\log 17$ | 6,45 | | | |
| | | $8\cdot 9\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 17\cdot 19$ | 116 396 280 | 89 |
| $23/\log 23$ | 7,34 | | | |

Pour chaque valeur de $\varrho \in \boldsymbol{R} - E$, tel que $\varrho > 3/\log 3$, il existe un nombre $N_\varrho$, et un seul, déterminé par sa décomposition en facteurs premiers.

Remarques:

Si $\varrho \leqslant \varrho'$, alors $N_\varrho$ divise $N_{\varrho'}$.

Si $I$ et $I'$ sont deux intervalles contigus de $\boldsymbol{R} - E$, séparés par un élément de $E_\lambda$, et si $\varrho \in I$, $\varrho' \in I'$, alors $N_{\varrho'} = \lambda N_\varrho$.

$v_p(N_\varrho)$ est une fonction décroissante de $p$, car la fonction $y = \dfrac{x^{a+1}-x^a}{\log x}$ est croissante pour $x \geqslant 2$, quelle que soit la valeur du paramètre $a \geqslant 1$.

5° Réciproque: Montrons que tout $N_\varrho$ ainsi construit appartient bien à $G$. Soit $A$ un nombre quelconque, et, pour tout nombre premier $\lambda$, posons

$$\beta_\lambda = v_\lambda(A) \quad \text{et} \quad \alpha_\lambda = v_\lambda(N).$$

$$l(A)-l(N) = \sum_\lambda l(\lambda^{\beta_\lambda})-l(\lambda^{\alpha_\lambda});$$

il suffit de montrer que, pour tout $\lambda$ tel que $\beta_\lambda \neq \alpha_\lambda$,

$$l(\lambda^\beta)-l(\lambda^\alpha) > \varrho \log \lambda^{\beta-\alpha}.$$

Il y a cinq cas à considérer:

$\alpha \neq 0,\ \beta > \alpha$:

$$\lambda^\beta-\lambda^\alpha = (\lambda^{\alpha+1}-\lambda^\alpha)(1+\lambda+\ldots+\lambda^{\beta-\alpha-1})$$
$$\geqslant (\lambda^{\alpha+1}-\lambda^\alpha)(\beta-\alpha) > \varrho\log\lambda^{\beta-\alpha};$$

$\alpha = 0,\ \beta > \alpha$:

$$l(\lambda^\beta)-l(\lambda^\alpha) = \lambda^\beta \geqslant \beta\lambda > \beta\varrho\log\lambda = \varrho\log\lambda^\beta;$$

$\beta \neq 0, \beta < \alpha$, on a alors $\beta \geqslant 1$ et $\alpha \geqslant 2$, donc,

$$l(\lambda^\beta)-l(\lambda^\alpha) = \lambda^\beta-\lambda^\alpha = (\lambda^{\alpha-1}-\lambda^\alpha)\left(1+\frac{1}{\lambda}+\ldots+\frac{1}{\lambda^{\alpha-\beta+1}}\right)$$
$$\geqslant (\lambda^{\alpha-1}-\lambda^\alpha)(\alpha-\beta) > -\varrho\log\lambda^{\alpha-\beta} = \varrho\log\frac{1}{\lambda^{\alpha-\beta}};$$

$\beta = 0,\ \alpha = 1$:

$$l(\lambda^\beta)-l(\lambda^\alpha) = -\lambda > -\varrho\log\lambda;$$

$\beta = 0,\ \alpha \geqslant 2$:

$$l(\lambda^\beta)-l(\lambda^\alpha) = -\lambda^\alpha > -\varrho\frac{\lambda}{\lambda-1}\log\lambda > -2\varrho\log\lambda$$

et

$$-2\varrho\log\lambda = \varrho\log\frac{1}{\lambda^2} \geqslant \varrho\log\frac{1}{\lambda^\alpha}.$$

On a ainsi défini une partie $G$ de $g(\mathbf{N})$, et on connaît exactement la décomposition en facteurs premiers des nombres de $G$.



**4.** THÉORÈME. *Il existe des intervalles aussi grands que l'on veut sur lesquels $g(n)$ est constante.*

D'après le § 1, 4°, cela revient à démontrer

$$\overline{\lim_{A\in g(\mathbf{N})}}\ l(A^*)-l(A) = +\infty.$$

En fait, on va démontrer

$$\overline{\lim}\frac{l(A^*)-l(A)}{\log p} \geqslant 1,$$

où $p$ est le plus grand nombre premier divisant $A$ et, comme d'après la corollaire de la propriété 11, $p \sim \log A$, on démontre en même temps

$$\overline{\lim}\frac{l(A^*)-l(A)}{\log\log A} \geqslant 1 \quad \text{et} \quad \overline{\lim}\frac{l\big(g(n)\big)-l\big(g(n-1)\big)}{\log n} \geqslant \frac{1}{2}.$$

La démonstration du théorème résulte de deux lemmes:

LEMME 1. *Soit $N = N_\varrho \in G$; soient $r, s \in \mathbf{N}^*$ deux nombres premiers entre eux, tels que $s$ divise $N$, on a*

$$l\left(\frac{r}{s}N\right)-l(N) \geqslant \varrho^-\log\frac{r}{s}+(\varrho^+-\varrho^-)\log r,$$

*où $]\varrho^-, \varrho^+[$ est la composante connexe de $\varrho$ dans $\mathbf{R}-E$.*

Démonstration. Il suffit d'examiner de plus près la réciproque (§ 3, 5°). Lorsqu'on minore $\lambda^{\alpha+1}-\lambda^\alpha$ par $\varrho\log\lambda$, on peut aussi bien minorer par $\varrho^+\log\lambda$, et de même $\lambda^{\alpha-1}-\lambda^\alpha \geqslant -\varrho^-\log\lambda$. On a ainsi

$$l\left(\frac{N}{s}\right)-l(N) \geqslant \varrho^-\log\frac{1}{s},$$

$$l\left(\frac{rN}{s}\right)-l\left(\frac{N}{s}\right) \geqslant \varrho^+\log r.$$

En ajoutant, on obtient:

$$l\left(\frac{r}{s}N\right)-l(N) \geqslant \varrho^-\log\frac{1}{s}+\varrho^+\log r = \varrho^-\log\frac{r}{s}+(\varrho^+-\varrho^-)\log r.$$

LEMME 2. *Il existe une infinité d'intervalles $(\varrho^-, \varrho^+)$ de longueur supérieure à 1.*

Démonstration. Soit

$$\varphi(x) = \operatorname{Card}\left\{\varrho\in E \;\middle|\; \frac{x}{\log x} < \varrho \leqslant \frac{2x}{\log x}\right\}.$$

Soient

$$E_1 = \left\{\frac{\lambda}{\log\lambda},\ \lambda \text{ premier } \geqslant 3\right\} \quad \text{et} \quad E_2 = \left\{\frac{\lambda^{\alpha}-\lambda^{\alpha-1}}{\log\lambda},\ \lambda \text{ premier},\ \alpha\geqslant 2\right\}.$$

On a $\varphi(x) = \varphi_1(x)+\varphi_2(x)$ avec

$$\varphi_1(x) = \operatorname{Card}\left\{\varrho\in E_1 \;\middle|\; \frac{x}{\log x} < \varrho \leqslant \frac{2x}{\log x}\right\}$$

et

$$\varphi_2(x) = \operatorname{Card}\left\{\varrho\in E_2 \;\middle|\; \frac{x}{\log x} < \varrho \leqslant \frac{2x}{\log x}\right\}.$$

Si $\pi(x)$ est le nombre des nombres premiers inférieurs ou égaux à $x$,

$$\varphi_1(x) = \pi(2x)-\pi(x) = \frac{x}{\log x}\left(1-\frac{3+2\log 2+o(1)}{\log x}\right).$$

D'autre part,

$$\varphi_2(x) \leqslant \operatorname{Card}\left\{\varrho\in E_2 \;\middle|\; \varrho \leqslant \frac{2x}{\log x}\right\}.$$

$$\text{Si} \quad \frac{\lambda^2-\lambda}{\log\lambda} \leqslant \frac{2x}{\log x}, \quad \text{alors} \quad \lambda \leqslant \sqrt{2x}.$$

$$\text{Si} \quad \frac{\lambda^{\alpha}-\lambda^{\alpha-1}}{\log\lambda} \leqslant \frac{2x}{\log x}, \quad \text{alors} \quad \lambda \leqslant x^{1/\alpha} \text{ pour } \alpha \geqslant 3.$$

Et le plus grand $\alpha$ possible est l'exposant de 2:

$$\frac{2^{\alpha}-2^{\alpha-1}}{\log 2} \leqslant \frac{2x}{\log x} \quad \text{qui donne} \quad \alpha \leqslant \frac{\log x}{\log 2}.$$

Finalement,

$$\varphi_2(x) \leqslant \sqrt{2x}+\sqrt[3]{x}\,\frac{\log x}{\log 2} \quad \text{et} \quad \varphi_2(x) = O(\sqrt{x}),$$

$$\varphi(x) = \frac{x}{\log x}\left(1-\frac{3+2\log 2+o(1)}{\log x}\right).$$

Si pour tout $\varrho > \frac{x}{\log x}$, on avait $\varrho^+ - \varrho^- \leqslant 1$, entre $\frac{x}{\log x}$ et $\frac{2x}{\log x}$ il y aurait seulement $\varphi(x)$ intervalles de longueur au plus 1, ce serait insuffisant puisque $\frac{x}{\log x} - \varphi(x)$ est positif pour $x$ assez grand.



## TABLE NUMÉRIQUE

| $n$ | $g(n)$ | facteurs premiers de $g(n)$ | $n$ | $g(n)$ | facteurs premiers de $g(n)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | | |
| 2 | 2 | 2 | *53 | 360 360 | 8 9 5 7 11 13 |
| *3 | 3 | 3 | 57 | 471 240 | 8 9 5 7 11 17 |
| 4 | 4 | 4 | 58 | 510 510 | 2 3 5 7 11 13 17 |
| 5 | 6 | 2 3 | 59 | 556 920 | 8 9 5 7 13 17 |
| *7 | 12 | 4 3 | 60 | 1 021 020 | 4 3 5 7 11 13 17 |
| 8 | 15 | 3 5 | 62 | 1 141 140 | 4 3 5 7 11 13 19 |
| 9 | 20 | 4 5 | 64 | 2 042 040 | 8 3 5 7 11 13 17 |
| 10 | 30 | 2 3 5 | 66 | 3 063 060 | 4 9 5 7 11 13 17 |
| *12 | 60 | 4 3 5 | 68 | 3 423 420 | 4 9 5 7 11 13 19 |
| 14 | 84 | 4 3 7 | *70 | 6 126 120 | 8 9 5 7 11 13 17 |
| 15 | 105 | 3 5 7 | 72 | 6 846 840 | 8 9 5 7 11 13 19 |
| 16 | 140 | 4 5 7 | 76 | 8 953 560 | 8 9 5 7 11 17 19 |
| 17 | 210 | 2 3 5 7 | 77 | 9 699 690 | 2 3 5 7 11 13 17 19 |
| *19 | 420 | 4 3 5 7 | 78 | 12 252 240 | 16 9 5 7 11 13 17 |
| 23 | 840 | 8 3 5 7 | 79 | 19 399 380 | 4 3 5 7 11 13 17 19 |
| 25 | 1 260 | 4 9 5 7 | 83 | 38 798 760 | 8 3 5 7 11 13 17 19 |
| 27 | 1 540 | 4 5 7 11 | 85 | 58 198 140 | 4 9 5 7 11 13 17 19 |
| 28 | 2 310 | 2 3 5 7 11 | *89 | 116 396 280 | 8 9 5 7 11 13 17 19 |
| 29 | 2 520 | 8 9 5 7 | 93 | 140 900 760 | 8 9 5 7 11 13 17 23 |
| *30 | 4 620 | 4 3 5 7 11 | 95 | 157 477 320 | 8 9 5 7 11 13 19 23 |
| 32 | 5 460 | 4 3 5 7 13 | 97 | 232 792 560 | 16 9 5 7 11 13 17 19 |
| 34 | 9 240 | 8 3 5 7 11 | 101 | 281 801 520 | 16 9 5 7 11 13 17 23 |
| 36 | 13 860 | 4 9 5 7 11 | 102 | 446 185 740 | 4 3 5 7 11 13 17 19 23 |
| 38 | 16 380 | 4 9 5 7 13 | 106 | 892 371 480 | 8 3 5 7 11 13 17 19 23 |
| 40 | 27 720 | 8 9 5 7 11 | 108 | 1 338 557 220 | 4 9 5 7 11 13 17 19 23 |
| 41 | 30 030 | 2 3 5 7 11 13 | *112 | 2 677 114 440 | 8 9 5 7 11 13 17 19 23 |
| 42 | 32 760 | 8 9 5 7 13 | 118 | 3 375 492 120 | 8 9 5 7 11 13 17 19 29 |
| *43 | 60 060 | 4 3 5 7 11 13 | | | |
| 47 | 120 120 | 8 3 5 7 11 13 | | | |
| *49 | 180 180 | 4 9 5 7 11 13 | | | |

Si $n$ n'est pas dans la table, si $n_0 \leqslant n' < n_1$, avec $n_0$ et $n_1$ consécutifs dans la table, $g(n) = g(n_0)$.

Un astérisque signale les nombres de $G$.

Démonstration du théorème. Appliquons le lemme 1 à la famille infinie de nombres $N_\varrho$ tels que $\varrho^+ - \varrho^- \geqslant 1$.

$$l\left(\frac{r}{s}N\right) - l(N) \geqslant \varrho^- \log\frac{r}{s} + \log r.$$

Or $\varrho^- \geqslant \dfrac{p}{\log p}$. Si on suppose $\dfrac{r}{s} > 1$, alors $\dfrac{r}{s} \geqslant \dfrac{r}{r-1}$ et

$$l\left(\frac{r}{s}N\right) - l(N) \geqslant \frac{p}{\log p}\log\frac{r}{r-1} + \log r.$$

Or la fonction $y = a\log\dfrac{x}{x-1} + \log x$ admet un minimum pour $x = a+1$, et ce minimum est minoré par $\log a$, donc, pour tout $r$ et pour tout $s < r$ tel que $s$ divise $N$, on a:

$$l\left(\frac{r}{s}N\right) - l(N) \geqslant \log p - \log\log p.$$

Cette relation vaut en particulier pour $N^* = \dfrac{r}{s}N$, et le théorème est établi.

### Travaux cités


[1] E. Landau, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, Bände 1 und 2. Leipzig und Berlin, 1909 [2te Auflage, New York, 1953].

[2] S. Ramanujan, *Highly composite numbers*, Proc. London Math. Soc., Series 2, 14 (1915), p. 347-400; Collected papers, p. 78-129, Cambridge, 1927.

[3] S. Shah, *An inequality for the arithmetical function* $g(x)$, Journal Indian Math. Soc. 3 (1939), p. 316-318.


*Reçu par la Rédaction le 10. 7. 1967*