Then $\limsup_{x=\infty} f(x)/x = \infty$. We proved that (51) implies that $a_i | a_j$ has infinitely many solutions [3].

Put $F(x) = \sum'_{\substack{a_i|a_j \\ a<x}} 1$ where the dash indicates that the summation is extended over those $a_i|a_j$ for which all prime factors of $a_j|a_i$ are greater than the greatest prime factor of a_i. It is easy to see that there is a sequence of positive density for which $\liminf_{x=\infty} F(x)/x = 0$ but for every such sequence

$$\limsup_{x=\infty} F(x)/x(\log\log x)^{1/2} > 0.$$

References

[1] P. Erdös, A. Sárközi and E. Szemerédi, *On the divisibility properties of sequences of integers I*, Acta Arith. 11 (1966), pp. 411-418.

[2] P. Erdös and M. Kac, *The Gaussian law of errors in the theory of additive number theoretic functions*, Amer. J. Math. 62 (1940), pp. 738-742.

[3] P. Erdös, A. Sárközi and E. Szemerédi, *On a theorem of Behrend*, J. Australian Math. Soc. 7 (1967), pp. 9-16.

[4] L. G. Sathe, *On a problem of Hardy on the distribution of integers having a given number of prime factors I, II, III and IV*, J. Indian Math. Soc. 17 (1953), pp. 63-141 and 18 (1954), pp. 27-81. See also A. Selberg, *Note on a paper by L. G. Sathe*, *ibid.* 18 (1954), pp. 83-87 and P. Erdös, *On the integers having exactly k prime factors*, Annals of Math. 49 (1948), pp. 53-66.

[5] P. Turán, *On a theorem of Hardy and Ramanujan*, J. London Math. Soc. 9 (1934), pp. 274-276.

Reçu par la Rédaction le 25. 3. 1967

ACTA ARITHMETICA
XIV (1968)

О представлении чисел бинарными кубическими формами положительного дискриминанта

Э. Т. Аванесов (Иваново)

Пусть $F(x, y) = x^3+qx^2y-rxy^2+sy^3$ неприводимая бинарная кубическая форма с целыми коэффициентами и дискриминантом D. Если $D<0$, то задача определения всех целых решений (x, y) неопределенного уравнения

$$F(x, y) = x^3+qx^2y-rxy^2+sy^3 = 1 \tag{1}$$

разрешается с помощью результатов Делоне [1] и Нагелла [2]. При $D>0$ их метод оказывается, вообще говоря, неприменимым.

В силу известной теоремы Туэ, уравнение (1) имеет конечное число целых решений (x, y), а, с точки зрения теории единиц, при $D>0$ это уравнение означает, что $x+y\eta$ есть единица, т.е.

$$x+y\eta = \pm\varepsilon_1^\alpha\varepsilon_2^\beta, \tag{2}$$

где ε_1 и ε_2 — основные единицы кольца $O(\eta)$, порожденного произвольным корнем уравнения

$$F(\eta, -1) = f(\eta) = \eta^3-q\eta^2-r\eta-s = 0, \tag{3}$$

и, таким образом, задача сводится к отысканию двучленных единиц в кольце $O(\eta)$. Основная трудность, встречающаяся при таком подходе, заключается в том, что для определения двух неизвестных показателей α и β имеется только одно уравнение.

В этой статье (§ 1) предлагается метод, позволяющий свести задачу решения уравнения (1) при $D>0$, или, что одно и то же, показательного уравнения (2), к исследованию некоторой системы уравнений, в которой число уравнений, по крайней мере, совпадает с числом неопределенных показателей степеней. Указанное сведение осуществляется с помощью перехода от кольца третьей степени $O(\eta)$ к кольцам шестой степени, определяемым уравнениями, имеющими хотя бы одну пару комплексных корней. Для таких колец, как известно, возможно применение локального метода Сколема [3].

С этой целью в § 2 излагается, применительно к кольцам 6 степени, разработанный в [4] и [5] алгоритм получения особых последовательностей точек, непосредственно приводящий к системе основных единиц.

И наконец (§ 3), для простых модулей p, в некотором смысле удобных, устанавливаются критерии разрешимости соответствующих, уже определенных систем уравнений относительно показателей степеней.

§ 1. Выберем в кольце $O(\eta)$ основные единицы ε_1 и ε_2 таким образом, чтобы их нормы равнялись $N_3(\varepsilon_1) = N_3(\varepsilon_2) = +1$. Здесь и далее индекс снизу в символе нормы означает степень рассматриваемого кольца. Легко устанавливаются в $O(\eta)$ следующие формулы нормы:

$$N_3(a+b\eta+c\eta^2) = a^3+qa^2b+(q^2+2r)a^2c-rab^2+ \\ +(r^2-2qs)ac^2-(qr+3s)abc+sb^3+qsb\,c-rsbc^2+s^2c^3, \tag{4}$$

и квадрата элемента:

$$M^2 = (a+b\eta+c\eta^2)^2 = a^2+cs(cq+2b)+ \\ \eta[(qr+s)c^2+2b(a+cr)]+\eta^2[b^2+(q^2+r)c^2+2c(a+bq)]. \tag{5}$$

Очевидно, что в представлении (2) для показателей α и β, с учетом характера их четности, возможны четыре случая.

I случай. α и β — четны. Тогда

$$x+y\eta = M^2 = (a+b\eta+c\eta^2)^2, \tag{6}$$

где a, b, c — целые, рациональные числа.

Так как коэффициент при η^2 в левой части (6) равен нулю, то, используя (5), находим:

$$b^2+(q^2+r)c^2+2c(a+bq) = 0. \tag{7}$$

Общее решение (7) в параметрах m и n, $(m, n) = 1$, определяется (см. [6]) из формул:

$$\begin{aligned} a &= -[m^2+2qmn+(q^2+r)n^2]z, \\ b &= 2mnz, \\ c &= 2n^2z, \end{aligned} \tag{8}$$

где z — рациональный множитель пропорциональности. Если теперь $m^2+(q^2+r)n^2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2)$, то достаточно принять $z = 1$. Тогда подставив (8) в (6) и перейдя к нормам, получим после очевидного преобразования

$$N_3(x+y\eta) = N_3(a+b\eta+c\eta^2)^2 = N_3^2(a+b\eta+c\eta^2) = \\ = N_3^2[m^2-2(\eta-q)mn+(q^2+r-2\eta^2)n^2] = 1,$$

откуда

$$N_3[m^2-2(\eta-q)mn+(q^2+r-2\eta^2)n^2] = \pm 1. \tag{9}$$

Квадратную скобку в (9) можно рассматривать как норму в некотором квадратичном поле, а именно:

$$m^2-2(\eta-q)mn+(q^2+r-2\eta^2)n^2 = N_2(m-n\lambda),$$

где λ — произвольный корень квадратного уравнения

$$\lambda^2-2(\eta-q)\lambda+(q^2+r-2\eta^2) = 0, \tag{10}$$

причем $\lambda+\lambda' = 2(\eta-q)$, $\lambda\lambda' = q^2+r-2\eta^2$, дискриминант же уравнения (10) равен $D_1 = (\eta-q)^2-(q^2+r-2\eta^2) = 3\eta^2-2q\eta-r = f'(\eta)$. Наряду с элементами λ и λ' рассмотрим сопряженные с ними

$$\lambda'' = \eta'-q+\sqrt{f'(\eta')}, \qquad \lambda''' = \eta'-q-\sqrt{f'(\eta')},$$
$$\lambda^{\mathrm{IV}} = \eta''-q+\sqrt{f'(\eta'')}, \qquad \lambda^{\mathrm{V}} = \eta''-q-\sqrt{f'(\eta'')}.$$

Тогда представление (9) примет вид: $N_3[N_2(m-n\lambda)] = \pm 1$, или $N_6(m-n\lambda) = \pm 1$, где числа m и n являются целыми решениями уравнения шестой степени:

$$\begin{aligned} \Phi_1(m, n) = m^6 &+ 4qm^5n+5(q^2-r)m^4n^2-20(qr+s)m^3n^3- \\ &-5(q^4+6q^2r+8qs+r^2)m^2n^4- \\ &-4(q^5+5q^3r+7q^2s+2qr^2+rs)mn^5- \\ &-(q^6+5q^4r+8q^3s+3q^2r^2+8qrs-r^3+8s^2)n^6 = \pm 1. \end{aligned} \tag{11}$$

При $m^2+(q^2+r)n^2 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 2)$ считаем, что $z = \frac{1}{2}$, и подобные же выкладки определят уравнение

$$\Phi_1(m, n) = \pm 8. \tag{11$'$}$$

Впрочем отметим, что параметризация (8), приводящая к уравнениям вида (11) и (11′), может быть осуществлена и другим путем. Из (7) находим:

$$a = -\frac{1}{2c}[b^2+(q^2+r)c^2+2qbc],$$

и далее очевидным путем

$$N_3[b^2-2(\eta-q)bc+(q^2+r-2\eta^2)c^2] = \pm 8c^3,$$

или

$$N_6(b-c\lambda) = \pm 8c^3, \tag{9$'$}$$

где λ определено из (10).

Обозначим через d общий наибольший делитель b и c, так что $b = b_1 d$, $c = c_1 d$, $(b_1, c_1) = 1$. Из (9′) имеем:

$$d^3 N_6(b_1 - c_1\lambda) = \pm 8c_1^3.$$

Пусть $d = 2d_1$, тогда и $c_1 = d_1 c_2$, откуда $N_6(b_1 - d_1 c_2 \lambda) = \pm c_2^3$. Так как $(b_1, c_2) = 1$, то числа c_2 и $N_6(b_1 - d_1 c_2\lambda)$ тоже взаимно просты; значит, $c_2 = 1$, и окончательно получаем уравнение $N_6(b_1 - d_1\lambda) = \Phi_1(b_1, d_1) = \pm 1$, совпадающее с (11). В случае нечетного d соответствующее рассуждение приведет к уравнению $N_6(b_1 - d\lambda) = \Phi_1(b_1, d) = \pm 8$, где $c_1 = dc_2$, $c_2 = 1$. Заметим, что в дальнейшем при параметризации используется первая идея.

Легко показать, что уравнение $\Phi_1(\lambda, -1) = 0$, порождающее кольцо шестой степени $O_1(\lambda)$, имеет ровно одну пару комплексных корней. Действительно, так как λ находится из (10) для целого алгебраического числа η, являющегося произвольным корнем (3), и сопряженных с ним η' и η'', то $\lambda \in K_1(\sqrt{f'(\eta)})$, где $K_1(\sqrt{f'(\eta)})$ есть совокупность чисел вида $A + B\sqrt{f'(\eta)}$, A и B — целые числа кольца 3 степени $O(\eta)$; но $f'(\eta)f'(\eta')f'(\eta'') = -D < 0$, и если положить $\eta > \eta' > \eta''$, то получим: $f'(\eta) > 0, f'(\eta') < 0$ и $f'(\eta'') > 0$, а значит, λ'' и λ''' комплексны.

Таким образом, на основании известной теоремы Дирихле, в кольце шестой степени $O_1(\lambda)$ имеется четыре основных единицы, искомые же двучленные единицы $m - n\lambda$ определяются из представления

$$m - n\lambda = \pm\sigma \prod_{i=1}^{4} \varepsilon_{i1}^{a_{i1}}, \tag{12}$$

где σ — особенная единица, а для неизвестных показателей a_{i1} получим четыре уравнения ввиду того, что в левой части (12) коэффициенты при $\lambda^2, \lambda^3, \lambda^4$ и λ^5 равны нулю.

Решения же (m, n) уравнения (11′) являются двучленными элементами кольца $O_1(\lambda)$, имеют норму ± 8 и выражаются по формуле

$$m - n\lambda = \pm\sigma Q_1(\lambda) \prod_{i=1}^{4} \varepsilon_{i1}^{a_{i1}}, \tag{12′}$$

где $Q_1(\lambda)$ — целое число кольца $O_1(\lambda)$ из конечного набора попарно неассоциированных элементов с нормой ± 8.

2 случай. α — нечетно, β — четно. Здесь

$$x + y\eta = \varepsilon_1 M^2. \tag{13}$$

Во избежание громоздких выкладок и записей ограничимся случаем, при котором основная единица ε_1 имеет двучленный вид, т.е. $\varepsilon_1 = u + v\eta$.

Вычисляя коэффициент при η^2 в правой части (13) и приравнивая его нулю, находим:

$$\begin{aligned}(u+vq)b^2 + [u(q^2+r) + v(q^3+2qr+s)]c^2 + 2vab +\\ + 2(u+vq)ac + 2[uq + v(q^2+r)]bc = 0.\end{aligned} \tag{14}$$

Далее определяем [6] общее решение (14) через параметры m и n, $(m, n) = 1$, по следующим формулам:

$$\begin{aligned} a &= -\{(u+vq)m^2 + 2[uq + v(q^2+r)]mn +\\ &\quad + [u(q^2+r) + v(q^3+2qr+s)]n^2\}z,\\ b &= 2m[vm + (u+vq)n]z,\\ c &= 2n[vm + (u+vq)n]z,\end{aligned} \tag{15}$$

дополненным значениями $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$, $x = u$, $y = v$. Если $(u+vq)m^2 + [u(q^2+r) + v(q^3+2qr+s)]n^2 \equiv 1 \pmod 2$, то $z = 1$, и перейдя в (13) к нормам, очевидным образом получим:

$$\begin{aligned} N_3\{(u+vq-2v\eta)m^2 + 2[uq + v(q^2+r) - (u+vq)\eta - v\eta^2]mn +\\ + [u(q^2+r) + v(q^3+2qr+s) - 2(u+vq)\eta^2]n^2\} = \pm 1,\end{aligned} \tag{16}$$

или

$$\begin{aligned} &N_3(u+vq-2v\eta)\times\\ &\times N_3\{m^2 + 2(u+vq-2v\eta)^{-1}[uq + v(q^2+r) - (u+vq)\eta - v\eta^2]mn +\\ &+ (u+vq-2v\eta)^{-1}[u(q^2+r) + v(q^3+2qr+s) - 2(u+vq)\eta^2]n^2\} = \pm 1.\end{aligned} \tag{17}$$

Аналогично первому случаю будем рассматривать фигурную скобку второго множителя в (17) как норму в квадратичном поле, определяемом уравнением:

$$\begin{aligned} \lambda^2 + 2(u+vq-2v\eta)^{-1}[uq + v(q^2+r) - (u+vq)\eta - v\eta^2]\lambda +\\ + (u+vq-2v\eta)^{-1}[u(q^2+r) + v(q^3+2qr+s) - 2(u+vq)\eta^2] = 0,\end{aligned} \tag{18}$$

дискриминант которого составляет

$$\begin{aligned} D_2 &= (u+vq-2v\eta)^{-2}\cdot\{[-ru^2 - (qr+3s)uv + (r^2-2qs)v^2] +\\ &\quad + \eta[-2qu^2 - 2(q^2+r)uv + (qr+3s)v^2] + \eta^2(3u^2 + 2quv - rv^2)\} =\\ &= (u+vq-2v\eta)^{-2}\cdot(u+v\eta)^{-1}\cdot(3\eta^2 - 2q\eta - r) =\\ &= (u+vq-2v\eta)^{-2}\cdot\varepsilon_1'\varepsilon_1'' f'(\eta) = (u+vq-2v\eta)^{-2}\cdot\varepsilon_1^{-1} f'(\eta).\end{aligned}$$

Отсюда имеем:

$$\lambda = -(u+vq-2v\eta)^{-1}[uq + v(q^2+r) - (u+vq)\eta - v\eta^2 + \sqrt{\varepsilon_1^{-1} f'(\eta)}],$$

$$\lambda' = -(u+vq-2v\eta)^{-1}[uq + v(q^2+r) - (u+vq)\eta - v\eta^2 - \sqrt{\varepsilon_1^{-1} f'(\eta)}].$$

Выписывая все сопряженные для λ и λ' и используя (17), находим:

$$N_3(u+vq-2v\eta)\cdot N_3[N_2(m-n\lambda)] = N_3(u+vq-2v\eta)\cdot N_6(m-n\lambda) = \pm 1,$$

и непосредственное вычисление приведет к уравнению

$$\Phi_2(m, n) = \sum_{i=0}^{6} S_i m^{6-i} n^i = \pm 1, \tag{19}$$

где, например, $S_0 = N_3(u+vq-2v\eta)$,

$$\begin{aligned} S_1 &= -(\lambda+\lambda'+\lambda''+\lambda'''+\lambda^{\mathrm{IV}}+\lambda^{\mathrm{V}})N_3(u+vq-2v\eta) = \\ &= 2[2qu^3+(q^2-3r)u^2v-2(2q^3+8qr+9s)uv^2- \\ &\qquad -(3q^4+13q^2r+4r^2+22qs)v^3], \end{aligned}$$

и далее

$$\begin{aligned} S_2 &= 5(q^2-r)u^3-(8q^3+43qr+45s)u^2v-5(5q^4+21q^2r+30qs+4r^2)uv^2- \\ &\quad -5(3q^5+14q^3r+21q^2s+8qr^2+4rs)v^3, \\ S_3 &= -4[5(qr+s)u^3+(5q^4+21q^2r+23qs+5r^2)u^2v+ \\ &\quad +(10q^5+37q^3r+33q^2s+18qr^2+2rs)uv^2+ \\ &\quad +(5q^6+21q^4r+23q^3s+16q^2r^2+8qrs+5s^2)v^3], \\ S_4 &= -[5(q^4+6q^2r+8qs+r^2)u^3+ \\ &\quad +(33q^5+136q^3r+170q^2s+55qr^2+30rs)u^2v+ \\ &\quad +(35q^6+170q^4r+184q^3s+148q^2r^2+130qrs+45s^2)uv^2+ \\ &\quad +(15q^7+80q^5r+110q^4s+80q^3r^2+128q^2rs+35qs^2)v^3], \\ S_5 &= -[4(q^5+5q^3r+7q^2s+2qr^2+rs)u^3+ \\ &\quad +(7q^6+35q^4r+50q^3s+25q^2r^2+34qrs-r^3+18s^2)u^2v+ \\ &\quad +2(4q^7+21q^5r+30q^4s+12q^3+20q^3r^2+35q^2rs+9qs^2+r^2s)uv^2+ \\ &\quad +(3q^8+17q^6r+24q^5s+20q^4r^2+40q^3rs+25q^2s^2-rs^2)v^3], \\ S_6 &= -[(q^6+5q^4r+8q^3s+3q^2r^2+8qrs-r^3+8s^2)u^3+ \\ &\quad +(3q^7+16q^5r+q^4s+27q^3s^2+6q^2rs+14qr^3+24qs^2+5r^2s)u^2v \\ &\quad +(3q^8+17q^6r+26q^5s+20q^4r^2+50q^3rs+39q^2s^2+4qr^2s+rs^2)uv^2+ \\ &\quad +(q^9+6q^7r+9q^6s+8q^5r^2+20q^4rs+15q^3s^2-2qrs^2-s^3)v^3]. \end{aligned}$$

Умножив обе части (19) на $N_3^5(u+vq-2v\eta)$ и произведя замену $\overline{m} = N_3(u+vq-2v\eta)m$, получим:

$$\begin{aligned} \overline{\Phi}_2(\overline{m}, n) &= \overline{m}^6 + \sum_{i=1}^{6} S_i N_3^{i-1}(u+vq-2v\eta)\overline{m}^{6-i}n^i = \\ &= \pm N_3^5(u+vq-2v\eta). \end{aligned} \tag{19'}$$

Наконец, если в (15) рассмотреть следующую оставшуюся возможность: $(u+vq)m^2+[u(q^2+r)+v(q^3+2qr+s)]n^2 \equiv 0 \pmod 2$, то это дает: $z = \frac{1}{2}$, и далее приходим к уравнению $\Phi_2(m, n) = \pm 8$, или

$$\overline{\Phi}_2(\overline{m}, n) = \pm 8N_3^5(u+vq-2v\eta). \tag{19''}$$

Подобным же образом можно доказать, что уравнение $\overline{\Phi}_2(\lambda, -1) = 0$, или, что равносильно, уравнение $\Phi_2(\lambda, -1) = 0$, порождающее кольцо 6 степени $O_2(\lambda)$, имеет нечетное число пар комплексных корней. В самом деле, элемент $\lambda \in K_2(\sqrt{\varepsilon_1^{-1} f'(\eta)})$, где K_2 соответствующим образом определено, и если бы все λ были действительны, то это означало бы, что $D_2 > 0$, $D_2' > 0$ и $D_2'' > 0$, но прямое вычисление произведения этих дискриминантов дает

$$\begin{aligned} D_2D_2'D_2'' &= N_3^{-2}(u+vq-2v\eta)N_3^{-1}(\varepsilon_1)f'(\eta)f'(\eta')f'(\eta'') = \\ &= -DN_3^{-2}(u+vq-2v\eta)N_3^{-1}(\varepsilon_1), \end{aligned}$$

а в силу выбора основной единицы ε_1 получим: $D_2D_2'D_2'' < 0$, что противоречит допущению.

Аналогичное противоречие будет иметь место и в предположении наличия двух пар комплексных корней.

Таким образом, уравнение $\Phi_2(\lambda, -1) = 0$ имеет нечетное число пар комплексных корней, и, в силу теоремы Дирихле, в кольце 6 степени $O_2(\lambda)$ либо четыре, либо две основных единицы; следовательно, искомые двучленные элементы $\overline{m}-n\lambda$ кольца $\overline{O}_2(\lambda)$, порожденного уравнением $\overline{\Phi}_2(\lambda, -1) = 0$, будут определены по формулам:

$$\overline{m}-n\lambda = \pm\sigma Q_2(\lambda)\prod_{i=1}^{j}\varepsilon_{i2}^{a_{i2}}, \tag{20}$$

где, соответственно $j = 4$, или 2, и далее $Q_2(\lambda)$ — некоторое целое алгебраическое число из конечного набора попарно неассоциированных элементов кольца $\overline{O}_2(\lambda)$, имеющих данную норму $(1/z)^3N_3^5(u+vq-2v\eta)$; $z = 1$ или $\frac{1}{2}$. Очевидно, при $j = 2$ условие (20) приводит к системе четырех уравнений относительно двух неизвестных показателей степеней a_{12} и a_{22}. Впрочем легко заметить, что если $\Phi_2(\lambda, -1) = 0$ содержит только комплексные корни $\mu_j \pm \nu_j\sqrt{-1}$ $(j = 1, 2, 3)$, то соответствующие уравнения (19) и (19'') известным образом легко решаются в целых числах.

Действительно, в первом случае

$$\begin{aligned} \Phi_2(m, n) &= N_3(u+vq-2v\eta)\cdot\prod_{j=1}^{3}\{[m-(\mu_j+\nu_j\sqrt{-1})n][m-(\mu_j-\nu_j\sqrt{-1})n]\} \\ &= N_3(u+vq-2v\eta)\cdot\prod_{j=1}^{3}[(m-\mu_jn)^2+\nu_j^2n^2]. \end{aligned}$$

Но тогда в правой части (19) знак должен совпадать со знаком $N_3(u+vq-2v\eta)$, а из элементарной оценки $(m-\mu_j n)^2+\nu_j^2 n^2 \geqslant \nu_j^2 n^2$ вытекает, что $n^6\prod_{j=1}^{3}\nu_j^2 \leqslant |N_3^{-1}(u+vq-2v\eta)|$. Отсюда получается следующее ограничение по абсолютной величине для n:

$$|n| \leqslant \sqrt[6]{|N_3^{-1}(u+vq-2v\eta)|\cdot\prod_{j=1}^{3}\nu_j^2} = \sqrt[6]{D^{-1}|N_3(u+vq-2v\eta)|},$$

и все возможные значения n можно перебрать.

Аналогично получается оценка для решений уравнения (19″).

3 случай. α — четно, β — нечетно. Соответствующее рассуждение установит уравнение вида (19), а элемент $\lambda\in K_3(\sqrt{\varepsilon_2^{-1}f'(\eta)})$, причем λ — корень уравнения $\Phi_3(\lambda, -1) = 0$, имеющего нечетное число пар комплексных корней.

Наконец, в 4 случае, когда α и β одновременно нечетны, исследование приведет к уравнению вида (19), далее $\lambda\in K_4(\sqrt{\varepsilon_1^{-1}\varepsilon_2^{-1}f'(\eta)})$, а уравнение $\Phi_4(\lambda, -1) = 0$, корнем которого является λ, имеет снова нечетное число пар комплексных корней.

Резюмируя проведенное в этом параграфе исследование, можно сделать вывод:

Задача определения представлений единицы целочисленными бинарными кубическими формами положительного дискриминанта сводится к задаче нахождения представлений конечного числа целых чисел целочисленными же бинарными формами шестой степени отрицательного дискриминанта. Эти новые формы эффективно определяются, исходя из данной кубической формы, а соответствующие им уравнения имеют хотя бы одну пару комплексных корней, ввиду чего оказывается возможным применение локального метода Сколема вложения поля алгебраических чисел во все его пополнения.

§ 2. Итак, неопределенное уравнение (1) при $D > 0$ сводится к уравнениям вида (11) или (19), а решение последних эквивалентно решению показательных уравнений типа (12) или (20), т.е. искомые двучленные единицы или элементы будут определяться через некоторые степени основных единиц.

Целью этого параграфа является описание практически весьма удобного способа нахождения систем основных единиц, заимствованное из [4] и [5], для алгебраических полей или колец шестой степени, порожденных уравнениями с одной парой комплексных корней. В этом случае, как известно, в поле, соответственно в кольце, содержится четыре основных единицы.

Пусть целочисленное уравнение

$$\Phi(\lambda) = \lambda^6 + \sum_{i=1}^{6} a_i\lambda^{6-i} = 0 \tag{21}$$

имеет 4 действительных и одну пару комплексных сопряженных корней.

С точки зрения теории решеток, уравнение (21) определяет в 6-мерном комплексном пространстве K_6 6-мерную решетку, повторяющуюся умножением, с базисными точками w_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$, т.е. совокупность точек вида $\sum_{i=1}^{6} w_i x_i$, где x_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ — все возможные системы 6 целых рациональных чисел.

Без ограничения общности можно принять, что координаты базисной точки w_6 равны: $(1, 1, 1, 1, 1+\sqrt{-1}, 1-\sqrt{-1})$. Тогда в соответствующем пространству K_6 6-мерном сигнатурном пространстве $R_{4,1}$ данной решетке будет соответствовать решетка $[w]$, также повторяющаяся умножением и характеризующаяся системой ковариантных форм:

$$\begin{aligned} \xi^{(i)} &= \sum_{j=1}^{5} w_j^{(i)} x_j + x_6, \quad i = 1, 2, 3, 4, \\ \eta^{(1)} &= \sum_{j=1}^{5} \varrho_j x_j + x_6, \\ \zeta^{(1)} &= \sum_{j=1}^{5} \sigma_j x_j + 0\cdot x_6. \end{aligned} \tag{22}$$

Всякая точка рассматриваемой решетки имеет координаты, равные значениям форм (22) при определенных целых рациональных значениях x_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$.

Операция нахождения основных единиц поля или кольца (21) предполагает построение вспомогательных последовательностей $\{1\}^{(k)}$, где $k = 1, 2, 3, 4$ или 5. Значения переменных x_i, соответствующие какое-либо точке последовательности $\{1\}^{(k)}$, обозначаются через p_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$.

Укажем алгоритм для вычисления последовательностей $\{1\}^{(k)}$ точек решетки.

Параметр p_1 задается произвольно, остальные параметры p_j $(j = 2, 3, 4, 5, 6)$, отвечающие, например, точкам последовательности $\{1\}^{(1)}$, находятся из следующих неравенств.

Зная p_1, находим значения p_2 из условий:

$$(23)\qquad -d_1 < \sum_{i=1}^{2} \begin{vmatrix} w_i^{(2)} & w_i^{(3)} & w_i^{(4)} & \varrho_i & \sigma_i \\ w_3^{(2)} & w_3^{(3)} & w_3^{(4)} & \varrho_3 & \sigma_3 \\ w_4^{(2)} & w_4^{(3)} & w_4^{(4)} & \varrho_4 & \sigma_4 \\ w_5^{(2)} & w_5^{(3)} & w_5^{(4)} & \varrho_5 & \sigma_5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} p_i < d_1,$$

где $d_1 = \sum_{i=1}^{5} |A_{1i}|$, а A_{1i} — миноры первой строки какого-либо из определителей, входящих в условия (23).

Для каждой пары значений p_1, p_2 значения p_3 находим из условий:

$$(24)\qquad -d_2 < \sum_{i=1}^{3} \begin{vmatrix} w_i^{(3)} & w_i^{(4)} & \varrho_i & \sigma_i \\ w_4^{(3)} & w_4^{(4)} & \varrho_4 & \sigma_4 \\ w_5^{(3)} & w_5^{(4)} & \varrho_5 & \sigma_5 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} p_i < d_2,$$

где $d_2 = \sum_{i=1}^{4} |A_{2i}|$, а A_{2i} — миноры первой строки какого-либо из определителей условий (24).

Исходя из значений p_1, p_2 и p_3, находим значения p_4 из условий:

$$(25)\qquad -d_3 < \sum_{i=1}^{4} \begin{vmatrix} w_i^{(4)} & \varrho_i & \sigma_i \\ w_5^{(4)} & \varrho_5 & \sigma_5 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} p_i < d_3,$$

где $d_3 = 2|\sigma_5| + |w_5^{(4)} - \sigma_5|$.

Далее по системе значений p_j $(j = 1, 2, 3, 4)$ найдем значения p_5 из условий:

$$(26)\qquad -1 < \sum_{j=1}^{5} \sigma_j p_j < 1.$$

Наконец, для каждой вычисленной системы значений p_j $(j = 1, 2, 3, 4, 5)$ значения p_6 находятся из условий:

$$(27)\qquad \begin{aligned} &-1 < \sum_{j=1}^{5} w_j^{(i)} p_j + p_6 < 1, \qquad i = 2, 3, 4, \\ &-1 < \sum_{j=1}^{5} \varrho_j p_j + p_6 < 1. \end{aligned}$$

Заметим, что для того, чтобы найденные точки были в последовательности $\{1\}^{(1)}$, необходимо выполнение дополнительного условия:

$$(28)\qquad \Big(\sum_{j=1}^{5} \varrho_j p_j + p_6\Big)^2 + \Big(\sum_{j=1}^{5} \sigma_j p_j\Big)^2 < 1.$$

Неравенства (23)-(28) определяют условия расположения точек решетки в последовательности $\{1\}^{(1)}$.

Непосредственное нахождение системы основных единиц в этой последовательности $\{1\}^{(1)}$ опирается на соответствующую теорему (см. [5], стр. 146-147).

§ 3. В заключение исследования рассмотрим вопрос о нахождении показателей степеней, обращающих правые части показательных уравнений вида (12) и (20) в двучленные единицы, или элементы кольца. Сначала изучим задачу отыскания двучленных единиц.

С этой целью предположим, что единицы ε_{ij} $(i = 1, 2, 3, 4)$, вычисленные на основании § 2, составляют систему основных единиц кольца 6 степени $O_j(\lambda)$.

Пусть p — нечетное, простое число. Тогда можно подобрать такие целые положительные показатели β_{ij} $(i = 1, 2, 3, 4)$, что будут справедливы сравнения: $\varepsilon_{ij}^{\beta_{ij}} \equiv 1 \pmod p$ $(i = 1, 2, 3, 4)$.

Представим теперь искомые двучленные единицы по формуле

$$(29)\qquad m - n\lambda = \pm \sigma \prod_{i=1}^{4} \varepsilon_{ij}^{x_i\beta_{ij} + \gamma_i},$$

где σ — снова особенная единица, значения же γ_i пробегают полную систему неотрицательных вычетов по соответствующему $\operatorname{mod} \beta_{ij}$, а значит, γ_i подчинены условиям:

$$0 \leqslant \gamma_i < \beta_{ij} \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Заметим, что решение поставленной задачи вытекает из определения тех показателей степеней, которые обращают правую часть (29) в двучленные элементы кольца $O_j(\lambda)$ по $\operatorname{mod} p$.

Для этого непосредственно вычисляются все $\prod_{i=1}^{4} \beta_{ij}$ возможностей степеней вида $\prod_{i=1}^{4} \varepsilon_{ij}^{\gamma_i}$, и отбираются комбинации, сохраняющие условие двучленности по $\operatorname{mod} p$, т.е. те комбинации, для которых выполняется сравнение

$$\prod_{i=1}^{4} \varepsilon_{ij}^{\gamma_i} \equiv M_1 + M_2\lambda \pmod p,$$

где M_1 и M_2 — целые рациональные числа.

Формулу (29) для таких комбинаций очевидным образом можно свести к совокупности определенных систем уравнений вида

$$(30)\qquad \sum_{i=0}^{\infty} p^i f_{i,j}(x_1, x_2, x_3, x_4) = c_j, \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

где $f_{i,j}(x_1, x_2, x_3, x_4)$ — целочисленные многочлены от неизвестных показателей степеней x_i $(i = 1, 2, 3, 4)$.

Решение систем (30) опирается на следующие теоремы, доказательства которых основаны на элементарных соображениях делимости.

Теорема 1. *Если p — нечетное, простое число и определитель $|a_{ji}|$ $(i, j = 1, 2, \ldots, k)$ равен $\Delta \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$, то система уравнений относительно неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_k$*

$$(31)\qquad \sum_{j=1}^{k} a_{ij}x_j + p \sum_{r_1+\ldots+r_k=2} \prod_{j=1}^{k} \binom{x_j}{r_j} m_{il}^{(1)} + p^2 \sum_{r_1+\ldots+r_k=3} \prod_{j=1}^{k} \binom{x_j}{r_j} m_{il}^{(2)} + \ldots + \\ + p^{\tau} \sum_{r_1+\ldots+r_k=\tau+1} \prod_{j=1}^{k} \binom{x_j}{r_j} m_{il}^{(\tau)} + \ldots = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k;$$

где $r_j \geqslant 0$, a_{ij} и $m_{il}^{(\tau)}$ — произвольные целые числа, имеет единственное решение в целых числах, а именно: $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0$.

Теорема 2. *Пусть 1) p — нечетное, простое число, 2) определитель $|a_{ij}|$ $(i, j = 1, 2, \ldots, k)$ равен $\Delta \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, p)$ и далее 3) правые части уравнений системы (31) равны b_i, где b_i не все одновременно обращаются в нуль. Тогда соответствующая система уравнений (31) с условиями 1), 2) и 3) имеет единственное решение в целых p-адических числах, а значит не более одного целого рационального решения для $x_1, x_2, \ldots, x_k$.*

Теорема 3. *Если определитель $|a_{ij}|$ $(i, j = 1, 2, \ldots, k)$ есть нечетное число, то система уравнений*

$$(32)\qquad \sum_{j=1}^{k} a_{ij}x_j + 4 \sum_{r_1+\ldots+r_k=2} \prod_{j=1}^{k} \binom{x_j}{r_j} m_{il}^{(1)} + 4^2 \sum_{r_1+\ldots+r_k=3} \prod_{j=1}^{k} \binom{x_j}{r_j} m_{il}^{(2)} + \ldots + \\ + 4^{\tau} \sum_{r_1+\ldots+r_k=\tau+1} \prod_{j=1}^{k} \binom{x_j}{r_j} m_{il}^{(\tau)} + \ldots = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, k;$$

где $r_j \geqslant 0$, a_{ij} и $m_{il}^{(\tau)}$ — произвольные целые числа, имеет единственное решение в целых числах, а именно: $x_1 = x_2 = \ldots = x_k = 0$.

Теорема 4. *Пусть 1) определитель $|a_{ij}|$ $(i, j = 1, 2, \ldots, k)$ равен нечетному числу и 2) правые части уравнений системы (32) равны b_i, где b_i не все одновременно обращаются в нуль. Тогда соответствующая*

система уравнений (32) с условиями 1) и 2) имеет единственное решение в целых 4-адических числах, а значит, не более одного целого рационального решения для $x_1, x_2, \ldots, x_k$.

Аналогичным же образом решается вопрос о нахождении двучленных элементов кольца.

Литература

[1] Б. Н. Делоне и Д. К. Фаддеев, *Теория иррациональностей третьей степени*, Москва-Ленинград 1940.

[2] T. Nagell, *Darstellung ganzen Zahlen durch binäre kubische Formen mit negativer Diskriminante*, Math. Zeitschrift 28 (1928), стр. 10-29.

[3] Th. Skolem, *Ein Verfahren zur Behandlung gewisser exponentialer Gleichungen und diophantische Gleichungen*, 8$^{\underline{\text{de}}}$ Skand. Math. Kongress, Stockholm (1934), стр. 163-188.

[4] К. К. Биллевич, *Об единицах алгебраических полей третьего и четвертого порядков*, Мат. сборник, 40 (82), 1 (1956), стр. 123-136.

[5] — *Теорема об единицах алгебраических полей n-го порядка*, Мат. сборник, 64 (106), 1 (1964), стр. 145-152.

[6] К. Ф. Гаусс, *Труды по теории чисел*, Москва 1959, стр. 444-445.

Reçu par la Rédaction le 23. 3. 1967