Table des matières du tome XIV, fascicule 3

La revue est consacrée à toutes les branches de *l'Arithmétique* et de la *Théorie des Nombres*, ainsi qu'aux *fonctions ayant de l'importance dans ces domaines*.

Prière d'adresser les textes dactylographiés à l'un des rédacteurs de la revue ou bien à la Rédaction de

ACTA ARITHMETICA

Warszawa 1 (Pologne), ul. Śniadeckich 8.

La même adresse est valable pour toute correspondance concernant l'échange de Acta Arithmetica.

Les volumes IV et suivants de ACTA ARITHMETICA sont à obtenir chez

Ars Polona, Warszawa 5 (Pologne), Krakowskie Przedmieście 7.

Prix de ce fascicule 3.00 \$.

Les volumes I-III (reédits) sont à obtenir chez

Johnson Reprint Corp., 111 Fifth Ave., New York, N. Y.

PRINTED IN POLAND

WROCŁAWSKA DRUKARNIA NAUKOWA

ACTA ARITHMETICA
XIV (1968)

Sur la répartition dans $\boldsymbol{R}$ et dans $\boldsymbol{Q}_p$

par

JEAN CHAUVINEAU (Paris)

A la mémoire de mes Parents

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Ce travail, consacré à l'étude des problèmes de répartition, comprend, en fait, deux parties.

Les quatre premiers chapitres traitent de la répartition dans $\boldsymbol{R}$. Le chapitre I introduit et caractérise la notion de (λ, λ')-répartition (mod 1). Dans le chapitre II, on définit l'équirépartition (mod 0), l'équirépartition (mod ∞) et l'équirépartition en moyenne (mod 1). Dans le chapitre III, on construit certaines familles de suites réelles admettant une même répartition (mod 1), et on caractérise les familles de suites équiréparties (mod 1) obtenues par ce procédé. Le chapitre IV introduit et caractérise la notion de répartition (mod 1) continue et périodique relativement à une fonction de répartition donnée sur $[0, 1]$.

Les quatre derniers chapitres concernent, non pas uniquement, mais principalement la répartition dans $\boldsymbol{Q}_p$. Dans le chapitre V, on étudie les isométries dans une extension algébrique finie K de $\boldsymbol{Q}_p$, et on caractérise quelques classes d'isométries dans $\boldsymbol{Q}_p$; les applications isométriques ou homométriques obtenues dans $\boldsymbol{Q}_p$ fournissent des exemples de suites très bien réparties ou équiréparties dans des compacts réguliers de $\boldsymbol{Q}_p$. Le chapitre VI étend aux suites des parties entières, dont on donne d'abord une définition généralisée dans $\boldsymbol{R}$ et dans $\boldsymbol{Q}_p$, le théorème métrique de Koksma concernant l'équirépartition (mod1). Le chapitre VII introduit et caractérise la notion de C-équirépartition (mod 1) dans $\boldsymbol{Q}_p$; on en déduit des conditions suffisantes, qu'on applique à certaines classes de fonctions p-adiques. Enfin, dans le chapitre VIII, on étudie d'une manière générale la répartition des suites entières p-adiques, à partir des fonctions de répartition dans $\boldsymbol{Z}_p$ et des fonctions densité de répartition dans $\boldsymbol{Z}_p$.

Certains de ces résultats ont été annoncés dans [4], [6], [7], [8], [9].

CHAPITRE I

(λ, λ')-RÉPARTITION MODULO 1 DANS $\boldsymbol{R}$

1. Notations. $\boldsymbol{N}$ désigne l'ensemble $\{1, 2, 3, \ldots\}$ des entiers naturels, $\boldsymbol{Z}$ l'anneau des entiers rationnels, $\boldsymbol{Q}$ le corps des rationnels, $\boldsymbol{R}$ le corps des réels, $\boldsymbol{C}$ le corps des complexes, $\boldsymbol{T}$ le cercle unité. La valeur absolue ordinaire est notée $|\ |$. Si E, F sont deux ensembles, on pose $E\setminus F = \{z \in E \mid z \notin F\}$. On désigne par ψ_E la fonction caractéristique d'un ensemble E; lorsque $0 \in E$, on pose $E^* = E\setminus\{0\}$. Si $E \subset \boldsymbol{R}$, où l'inclusion figurée s'entend au sens large, on désigne par E^+ l'ensemble des éléments $\geqslant 0$ de E; en particulier $\boldsymbol{Z}^+ = \boldsymbol{N} \cup \{0\}$. Dans $\overline{\boldsymbol{R}}$, l'infini positif est noté ∞.

Tout $t \in \boldsymbol{R}$ admet une décomposition unique

$$t = [t] + \langle t\rangle \quad \text{où} \quad [t] \in \boldsymbol{Z},\ \langle t\rangle \in [0, 1[.$$

$[t]$ et $\langle t\rangle$ sont dits respectivement *partie entière* et *partie fractionnaire* de t.

Dans les chapitres I, II et IV, la suite $(x_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ désigne une suite de $\boldsymbol{R}$. Si $E \subset [0, 1[$ et si $N \in \boldsymbol{N}$, on désigne par $(N, E)_x$ le nombre des n tels qu'on ait $1 \leqslant n \leqslant N$ et $\langle x_n\rangle \in E$; dans cette notation, la letre x sera couramment sous-entendue. Si $E = [a, b[$, où $0 \leqslant a < b \leqslant 1$, on pose $(N, E)_x = (N, a, b)_x$.

2. Définition 1. Sur tout sous-intervalle $[a, b[$ de $[0, 1[$, où $a < b$, la suite (x_n) admet une densité moyenne inférieure de répartition (mod1)

$$\varrho_*(x, a, b) = \liminf_{N\to\infty} \frac{(N, a, b)}{(b-a)N}$$

et une densité moyenne supérieure de répartition (mod1)

$$\varrho^*(x, a, b) = \limsup_{N\to\infty} \frac{(N, a, b)}{(b-a)N},$$

notations dans lesquelles la lettre x sera couramment sous-entendue.

Soit un couple réel (λ, λ') tel qu'on ait $0 < \lambda \leqslant 1 \leqslant \lambda'$. La suite (x_n) sera dite (λ, λ')-*répartie* [(λ, λ')-r.] (mod1) si, pour tout couple réel (a, b) tel que $0 \leqslant a < b \leqslant 1$, on a

$$(1) \qquad \varrho_*(a, b) \geqslant \lambda \quad \text{et} \quad \varrho^*(a, b) \leqslant \lambda'.$$

Si la première seulement de ces deux conditions est vérifiée, la suite (x_n) sera dite (λ, ∞)-*répartie* [(λ, ∞)-r.] (mod1).

Si la deuxième seulement de ces deux conditions est vérifiée, la suite (x_n) sera dite $(0, \lambda')$-*répartie* [$(0, \lambda')$-r.] (mod1).

3. Premier critère de (λ, λ')-répartition (mod1). Soit $\mathscr{C}(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{R}^+)$ la classe des fonctions à valeurs réelles $\geqslant 0$ continues sur $\boldsymbol{T}$. On a le

Critère 1. *Pour que suite (x_n) soit (λ, ∞)-r.(mod1), il faut et il suffit que, pour toute $f \in \mathscr{C}(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{R}^+)$, on ait*

$$(2) \qquad \liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{1\leqslant n\leqslant N} f(\langle x_n\rangle) \geqslant \lambda \int_0^1 f(t)\,dt.$$

Nécessité. Partageons $[0, 1[$ en intervalles égaux $[a_k, b_k[$, où $k = 1, \ldots, \nu$, et soit m_k la borne inférieure de f sur $[a_k, b_k[$. On a pour $n = 1, \ldots, N$:

$$f(\langle x_n\rangle) \geqslant \sum_{1\leqslant k\leqslant \nu} m_k \psi_{[a_k, b_k[}(\langle x_n\rangle).$$

Sommant de 1 à N, en remarquant que $\sum_{1\leqslant n\leqslant N} \psi_{[a_k, b_k[}(\langle x_n\rangle) = (N, a_k, b_k)$, on obtient

$$\frac{1}{N} \sum_{1\leqslant n\leqslant N} f(\langle x_n\rangle) \geqslant \sum_{1\leqslant k\leqslant \nu} m_k \frac{(N, a_k, b_k)}{N}.$$

Quand $N \to \infty$, la limite inférieure du premier membre est au moins égale à celle du second, qui est elle-même au moins égale à

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant \nu} m_k \liminf_{N\to\infty} \frac{(N, a_k, b_k)}{N} \geqslant \lambda \sum_{1\leqslant k\leqslant \nu} m_k(b_k - a_k);$$

enfin cette dernière quantité, quand $\nu \to \infty$, tend vers $\lambda \int_0^1 f(t)\,dt$, de sorte qu'on a (2).

Suffisance. Soit $0 \leqslant a < b \leqslant 1$; il existe une suite de fonctions l_k de $\mathscr{C}(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{R}^+)$ qui minorent $\psi_{[a,b[}$ sur $\boldsymbol{T}$ et dont l'intégrale sur $[0,1]$ tend vers

$$\int_0^1 \psi_{[a,b[}(t)\,dt = b-a$$

quand $k \to \infty$. On a pour $n = 1, \ldots, N$:

$$\psi_{[a,b[}(\langle x_n \rangle) \geqslant l_k(\langle x_n \rangle),$$

d'où, comme précédemment, en sommant de 1 à N:

$$\frac{(N, a, b)}{N} \geqslant \frac{1}{N} \sum_{1 \leqslant n \leqslant N} l_k(\langle x_n \rangle).$$

Quand $N \to \infty$, la limite inférieure du premier membre est au moins égale à celle du second, elle-même au moins égale à

$$\lambda \int_0^1 l_k(t)\,dt;$$

puisque cette dernière quantité, quand $k \to \infty$, tend vers $\lambda(b-a)$, la première condition (1) est satisfaite.

Un argument analogue donne le

CRITÈRE 1'. *Pour que la suite* (x_n) *soit* $(0, \lambda') - r.(\mathrm{mod}\,1)$, *il faut et il suffit que, pour toute* $f \in \mathscr{C}(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{R}^+)$, *on ait*

$$\limsup_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{1 \leqslant n \leqslant N} f(\langle x_n \rangle) \leqslant \lambda' \int_0^1 f(t)\,dt. \tag{2'}$$

L'ensemble des conditions (2) et (2') fournit donc un premier critère de (λ, λ')-répartition (mod 1).

Remarque. Il est facile de s'assurer que ces conditions (2) et (2') restent nécessaires et suffisantes lorsqu'elles sont vérifiées pour toute $f \in \mathscr{I}(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{R}^+)$, où $\mathscr{I}(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{R}^+)$ désigne la classe des fonctions à valeurs réelles $\geqslant 0$ intégrables au sens de Riemann sur $\boldsymbol{T}$.

4. Deuxième critère de (λ, λ')-répartition (mod 1). On pose, pour tout $t \in \boldsymbol{R}$:

$$e(t) = e^{2i\pi t}$$

et, pour tout $h \in \boldsymbol{Z}$:

$$\sigma_N(x, h) = \frac{1}{N} \sum_{1 \leqslant n \leqslant N} e(hx_n),$$

notation dans laquelle la lettre x sera couramment sous-entendue.

4.1. CRITÈRE 2. *Pour que la suite* (x_n) *soit* $(\lambda, \infty) - r.(\mathrm{mod}\,1)$, *il faut et il suffit que, pour tout entier* $k \geqslant 2$ *et pour tout entier* $l = 1, 2, \ldots, k$, *on ait*

$$\liminf_{N \to \infty} \sum_{h \in \boldsymbol{Z}} \left(\frac{k}{\pi h} \sin \frac{\pi h}{k}\right)^2 e\left(-\frac{hl}{k}\right) \sigma_N(h) \geqslant \lambda. \tag{3}$$

Dans cette série absolument convergente, le terme correspondant à $h = 0$ est, par convention, égal à 1.

Nécessité. Soit $S_{k,l}$ la fonction signal triangle isoscèle de hauteur 1, de base $2/k$, centrée au point l/k de $\boldsymbol{T}$, de sorte qu'on a sur $\boldsymbol{T}$

$$S_{k,l}(t) = \frac{1}{k} \sum_{h \in \boldsymbol{Z}} \left(\frac{k}{\pi h} \sin \frac{\pi h}{k}\right)^2 e\left(h\left(t - \frac{l}{k}\right)\right).$$

Puisque cette série est uniformément convergente sur $\boldsymbol{T}$, on obtient, en intégrant terme à terme:

$$\int_0^1 S_{k,l}(t)\,dt = \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \sum_{h \in \boldsymbol{Z}^*} \left(\frac{k}{\pi h} \sin \frac{\pi h}{k}\right)^2 \frac{1}{2i\pi h} \left[e\left(h\left(t - \frac{l}{k}\right)\right)\right]_0^1 = \frac{1}{k}.$$

Dès lors, prenant $f = S_{k,l} \in \mathscr{C}(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{R}^+)$, (2) donne

$$\liminf_{N \to \infty} \frac{1}{kN} \sum_{1 \leqslant n \leqslant N} \sum_{h \in \boldsymbol{Z}} \left(\frac{k}{\pi h} \sin \frac{\pi h}{k}\right)^2 e\left(-\frac{hl}{k}\right) e(hx_n) \geqslant \frac{\lambda}{k},$$

d'où (3).

Suffisance. On va ramener la suffisance de la condition (3) à celle de la condition (2). Soit $f \in \mathscr{C}(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{R}^+)$; partageons $[0,1]$ en k intervalles égaux, où $k \geqslant 2$, et soit f_k la fonction linéaire par morceaux sur $\boldsymbol{T}$ qui prend les mêmes valeurs que f aux points l/k, où $l = 1, 2, \ldots, k$; cette fonction f_k est une combinaison linéaire à coefficients réels $\geqslant 0$ de fonctions $S_{k,l}$, à savoir

$$f_k = \sum_{1 \leqslant l \leqslant k} f\left(\frac{l}{k}\right) S_{k,l},$$

et la suite (f_k) converge uniformément vers f sur $\boldsymbol{T}$.

Dès lors, supposons la condition (3) satisfaite, c'est-à-dire

$$\liminf_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{1 \leqslant n \leqslant N} S_{k,l}(\langle x_n \rangle) \geqslant \frac{\lambda}{k}.$$

On a

$$\frac{1}{N} \sum_{1 \leqslant n \leqslant N} f_k(\langle x_n \rangle) = \sum_{1 \leqslant l \leqslant k} f\left(\frac{l}{k}\right) \frac{1}{N} \sum_{1 \leqslant n \leqslant N} S_{k,l}(\langle x_n \rangle).$$

Quand $N\to\infty$, la limite inférieure du premier membre est au moins égale à

$$\sum_{1\leqslant l\leqslant k} f\left(\frac{l}{k}\right)\liminf_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{1\leqslant n\leqslant N} S_{k,l}(\langle x_n\rangle)\geqslant\frac{\lambda}{k}\sum_{1\leqslant l\leqslant k} f\left(\frac{l}{k}\right),$$

et d'autre part

$$\int_0^1 f_k(t)\,dt=\sum_{1\leqslant l\leqslant k} f\left(\frac{l}{k}\right)\int_0^1 S_{k,l}(t)\,dt=\frac{1}{k}\sum_{1\leqslant l\leqslant k} f\left(\frac{l}{k}\right),$$

de sorte que f_k vérifie la condition (2).

Soit $\varepsilon>0$; il existe un entier K_ε tel que, pour $k>K_\varepsilon$, on ait, pour $n=1,\ldots,N$:

$$f(\langle x_n\rangle)>f_k(\langle x_n\rangle)-\varepsilon,$$

d'où

$$\frac{1}{N}\sum_{1\leqslant n\leqslant N} f(\langle x_n\rangle)>\frac{1}{N}\sum_{1\leqslant n\leqslant N} f_k(\langle x_n\rangle)-\varepsilon.$$

Quand $N\to\infty$, la limite inférieure du premier membre est au moins égale à

$$\liminf_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{1\leqslant n\leqslant N} f_k(\langle x_n\rangle)-\varepsilon\geqslant\lambda\int_0^1 f_k(t)\,dt-\varepsilon,$$

et cette dernière quantité, quand $k\to\infty$, tend vers $\lambda\int_0^1 f(t)\,dt-\varepsilon$, de sorte qu'on a

$$\liminf_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{1\leqslant n\leqslant N} f(\langle x_n\rangle)\geqslant\lambda\int_0^1 f(t)\,dt-\varepsilon.$$

Puisque $\varepsilon>0$ est arbitrairement petit, il en résulte que f vérifie la condition (2), et le critère 1 montre alors que la suite (x_n) est (λ,∞)-r. (mod 1).

Un argument analogue donne le

CRITÈRE 2′. *Pour que la suite (x_n) soit $(0,\lambda')$-r.* (mod 1), *il faut et il suffit que, pour tout entier $k\geqslant 2$ et pour tout entier $l=1,2,\ldots,k$, on ait*

$$\limsup_{N\to\infty}\sum_{h\in\boldsymbol{Z}}\left(\frac{k}{\pi h}\sin\frac{\pi h}{k}\right)^2 e\left(-\frac{hl}{k}\right)\sigma_N(h)\leqslant\lambda'. \tag{3′}$$

L'ensemble des conditions (3) et (3′) fournit donc un deuxième critère de (λ,λ')-répartition (mod 1).

4.2. Autre forme du deuxième critère. La critère 2 peut encore s'énoncer ainsi:

CRITÈRE 2bis. *Pour que la suite (x_n) soit (λ,∞)-r.* (mod 1), *il faut et il suffit que, pour tout couple réel (δ,τ) tel que $0<\delta\leqslant\frac{1}{2}$ et $0<\tau\leqslant 1$, on ait*

$$\liminf_{N\to\infty}\sum_{h\in\boldsymbol{Z}}\left(\frac{\sin\pi h\delta}{\pi h\delta}\right)^2 e(-h\tau)\,\sigma_N(h)\geqslant\lambda. \tag{4}$$

Cette condition est évidemment suffisante; quant à sa nécessité, elle s'établit comme plus haut celle de (3), en utilisant ici la fonction signal triangle isocèle $S_{(\delta,\tau)}$ de hauteur 1, de base 2δ, centrée au point τ de $\boldsymbol{T}$, de sorte qu'on a sur $\boldsymbol{T}$

$$S_{(\delta,\tau)}(t)=\delta\sum_{h\in\boldsymbol{Z}}\left(\frac{\sin\pi h\delta}{\pi h\delta}\right)^2 e\big(h(t-\tau)\big),$$

et en appliquant (2) à $S_{(\delta,\tau)}\in\mathscr{C}(\boldsymbol{T},\boldsymbol{R}^+)$.

De même, le critère 2′ peut encore s'énoncer ainsi:

CRITÈRE 2′bis. *Pour que la suite (x_n) soit $(0,\lambda')$-r.* (mod 1), *il faut et il suffit que, pour tout couple réel (δ,τ) tel que $0<\delta\leqslant\frac{1}{2}$ et $0<\tau\leqslant 1$, on ait*

$$\limsup_{N\to\infty}\sum_{h\in\boldsymbol{Z}}\left(\frac{\sin\pi h\delta}{\pi h\delta}\right)^2 e(-h\tau)\,\sigma_N(h)\leqslant\lambda'. \tag{4′}$$

L'ensemble des conditions (4) et (4′) fournit donc une autre forme du deuxième critère de (λ,λ')-répartition (mod 1).

5. Cas où $\lambda=\lambda'=1$. Les suites $(1,1)$-r. (mod 1) sont les suites pour lesquelles $\lim_{N\to\infty}\frac{(N,a,b)}{N}=b-a$ quel que soit le couple réel (a,b) tel que $0\leqslant a<b\leqslant 1$, c'est-à-dire les suites *équiréparties* [e.r.] (mod 1). Il est facile de déduire des résultats précédents les critères classiques d'équirépartition (mod 1).

D'abord il résulte des critères 1 et 1′ que *la suite (x_n) est e.r.* (mod 1) *si et seulement si, pour toute $f\in\mathscr{C}(\boldsymbol{T},\boldsymbol{R}^+)$, on a*

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{1\leqslant n\leqslant N} f(\langle x_n\rangle)=\int_0^1 f(t)\,dt, \tag{5}$$

et cette condition reste évidemment nécessaire et suffisante lorsqu'elle est vérifiée pour toute $f\in\mathscr{C}(\boldsymbol{T},\boldsymbol{C})$.

Posons, sous réserve d'existence, pour tout $h \in \boldsymbol{Z}$:

$$c_h(x) = \lim_{N\to\infty} \sigma_N(x, h),$$

où la lettre x sera couramment sous-entendue.

L'ensemble des conditions (4) et (4′) s'écrit ici

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{h\in \boldsymbol{Z}} \left(\frac{\sin \pi h\delta}{\pi h\delta}\right)^2 e(-h\tau)\sigma_N(h) = 1,$$

qui, puisque la série indiquée est uniformément convergente en N, équivaut, si c_h existe pour tout $h \in \boldsymbol{Z}$, à

$$\sum_{h\in \boldsymbol{Z}^*} \left(\frac{\sin \pi h\delta}{\pi h\delta}\right)^2 e(-h\tau)c_h = 0. \tag{6}$$

Dès lors, si la suite (x_n) est e.r. (mod1), la condition (5), où l'on prend $f(t) = e(ht)$, montre que $c_h = 0$ pour tout $h \in \boldsymbol{Z}^*$, et réciproquement, si $c_h = 0$ pour tout $h \in \boldsymbol{Z}^*$, la condition (6) est vérifiée, de sorte que la suite (x_n) est e.r. (mod1). Finalement, *la suite* (x_n) *est e.r.* (mod1) *si et seulement si* $c_h = 0$ *pour tout* $h \in \boldsymbol{Z}^*$, et cette condition reste nécessaire et suffisante lorsqu'elle est vérifiée pour tout $h \in \boldsymbol{N}$, puisque $c_{-h} = \bar{c}_h$. Nous retrouvons ainsi, comme cas particulier de notre étude, le *critère de Weyl* ([24]).

6. (λ, λ')-répartition (mod1) au sens strict.

6.1. Définition 2. Soit un couple réel (λ, λ') tel qu'on ait $0 < \lambda \leqslant 1 \leqslant \lambda'$; la suite (x_n) sera dite (λ, λ')-r. (mod1) *au sens strict* si l'on a

$$\inf_{0\leqslant a<b\leqslant 1} \varrho_*(a, b) = \lambda \quad \text{et} \quad \sup_{0\leqslant a<b\leqslant 1} \varrho^*(a, b) = \lambda'.$$

Il résulte aussitôt des conditions (4) et (4′) que la suite (x_n) est (λ, λ')-r. (mod1) au sens strict si et seulement si l'on a à la fois

$$\inf_{\substack{0<\delta\leqslant\frac12\\ 0<\tau\leqslant 1}} \liminf_{N\to\infty} \sum_{h\in \boldsymbol{Z}} \left(\frac{\sin \pi h\delta}{\pi h\delta}\right)^2 e(-h\tau)\sigma_N(h) = \lambda,$$

$$\sup_{\substack{0<\delta\leqslant\frac12\\ 0<\tau\leqslant 1}} \limsup_{N\to\infty} \sum_{h\in \boldsymbol{Z}} \left(\frac{\sin \pi h\delta}{\pi h\delta}\right)^2 e(-h\tau)\sigma_N(h) = \lambda'.$$

6.2. Exemple. Soit $x_n = a\log n$, où $a \in \boldsymbol{R}^*$, $n \in \boldsymbol{N}$. La suite (x_n) s'étudie directement en procédant à des dénombrements.

Supposons d'abord $a > 0$, et posons $\gamma = 1/a$. Le nombre ν_K des n tels que $k+a \leqslant a\log n < k+b$ et $0 \leqslant k \leqslant K$ (k, K entiers) s'écrit, quand $K \to \infty$:

$$\nu_K = \frac{e^{\gamma b} - e^{\gamma a}}{e^{\gamma} - 1} e^{\gamma(K+1)} + O(K).$$

Mais ν_K est aussi le nombre (N, a, b) des n tels que $a \leqslant \langle x_n\rangle < b$ et $1 \leqslant n \leqslant N$ lorsque $N''_K \leqslant N \leqslant N'_{K+1}$, où N'_K désigne le plus grand entier $< e^{\gamma(K+a)}$ et N''_K le plus grand entier $< e^{\gamma(K+b)}$, de sorte que

$$N'_K = e^{\gamma(K+a)} + O(1) \quad \text{et} \quad N''_K = e^{\gamma(K+b)} + O(1).$$

Quand N parcourt $\boldsymbol{N}$, le rapport $\dfrac{(N, a, b)}{N}$ oscille entre la suite des valeurs inférieures ν_K/N'_{K+1} et la suite des valeurs supérieures ν_K/N''_K. Or ces deux suites convergent, la première vers $\dfrac{e^{\gamma(b-a)}-1}{e^{\gamma}-1}$, la seconde vers $\dfrac{e^{\gamma}(1-e^{\gamma(a-b)})}{e^{\gamma}-1}$. On en tire

$$\varrho_*(a, b) = \frac{e^{\gamma(b-a)}-1}{(e^{\gamma}-1)(b-a)} \quad \text{et} \quad \varrho^*(a, b) = \frac{e^{\gamma}(1-e^{\gamma(a-b)})}{(e^{\gamma}-1)(b-a)}.$$

Plus généralement, si $a \in \boldsymbol{R}^*$, ces dernières formules restent vraies, en posant, comme nous le ferons désormais, $\gamma = 1/|a|$.

On a, puisque $\varrho_*(a, b)$ est croissant en $b-a$:

$$\inf_{0\leqslant a<b\leqslant 1} \varrho_*(a, b) = \lim_{0<t\to 0} \frac{e^{\gamma t}-1}{(e^{\gamma}-1)t} = \frac{\gamma}{e^{\gamma}-1},$$

et de même, puisque $\varrho^*(a, b)$ est décroissant en $b-a$:

$$\sup_{0\leqslant a<b\leqslant 1} \varrho^*(a, b) = \lim_{0<t\to 0} \frac{e^{\gamma}(1-e^{-\gamma t})}{(e^{\gamma}-1)t} = \frac{\gamma e^{\gamma}}{e^{\gamma}-1}.$$

Donc *la suite* $n \to a\log n$, *où* $a \in \boldsymbol{R}^*$, *est* $\left(\dfrac{\gamma}{e^{\gamma}-1}, \dfrac{\gamma e^{\gamma}}{e^{\gamma}-1}\right)$*-r.* (mod1) *au sens strict, où* $\gamma = 1/|a|$.

7. Condition suffisante de (λ, λ')-répartition (mod1).

7.1. On pose, pour tout $h \in \boldsymbol{Z}$:

$$C_h(x) = \limsup_{N\to\infty} |\sigma_N(x, h)|$$

où la lettre x sera couramment sous-entendue.

Soit d'autre part

$$A_N(h) = e(-h\tau)\sigma_N(h) + e(h\tau)\sigma_N(-h) \in \boldsymbol{R}.$$

On a évidemment $A_N(h) \geqslant -2|\sigma_N(h)|$, d'où, pour tout $h \in \boldsymbol{Z}$:

$$\liminf_{N\to\infty} A_N(h) \geqslant -2C_h.$$

La condition (4) s'écrit

$$\liminf_{N\to\infty}\sum_{h\geqslant 1}\left(\frac{\sin\pi h\delta}{\pi h\delta}\right)^2 A_N(h)\geqslant\lambda-1,$$

où le premier membre est au moins égal à

$$\sum_{h\geqslant 1}\left(\frac{\sin\pi h\delta}{\pi h\delta}\right)^2\liminf_{N\to\infty}A_N(h)\geqslant -2\sum_{h\geqslant 1}\left(\frac{\sin\pi h\delta}{\pi h\delta}\right)^2 C_h\geqslant -2\sum_{h\geqslant 1}C_h.$$

Si donc $-2\sum_{h\geqslant 1}C_h\geqslant\lambda-1$, alors la condition (4) est vérifiée, et l'on a:

Condition suffisante 1. *Pour que la suite (x_n) soit (λ,∞)-r.* (mod 1) *il suffit qu'on ait*

(7) $$\sum_{h\geqslant 1}C_h\leqslant\frac{1-\lambda}{2}.$$

Utilisant l'inégalité $A_N(h)\leqslant 2|\sigma_N(h)|$, d'où $\limsup_{N\to\infty}A_N(h)\leqslant 2C_h$, on obtient de même, à partir de (4'):

Condition suffisante 1'. *Pour que la suite (x_n) soit $(0,\lambda')$-r.* (mod 1), *il suffit qu'on ait*

(7') $$\sum_{h\geqslant 1}C_h\leqslant\frac{\lambda'-1}{2}.$$

L'ensemble des conditions (7) et (7') fournit donc une condition suffisante de (λ,λ')-répartition (mod 1), à savoir

$$\sum_{h\geqslant 1}C_h\leqslant\min\left(\frac{1-\lambda}{2},\frac{\lambda'-1}{2}\right).$$

7.2. Applications. (a) Soit S_1 la classe des suites (x_n) telles qu'on ait

$$\inf_{0\leqslant a<b\leqslant 1}\varrho_*(a,b)>0.$$

Ces suites possèdent la propriété suivante: le couple (a,b) étant fixé, on a $(N,a,b)\asymp N$ quand $N\to\infty$.

Pour que $(x_n)\in S_1$, il faut et il suffit qu'il existe $\lambda\in]0,1]$ tel que la suite (x_n) soit (λ,∞)-r. (mod 1); dès lors, d'après (7), *il suffit qu'on ait*

(8) $$\sum_{h\geqslant 1}C_h<\frac{1}{2}.$$

(b) Soit S_2 la classe des suites (x_n) telles qu'on ait

$$\sup_{0\leqslant a<b\leqslant 1}\varrho^*(a,b)<\infty.$$

Pour que $(x_n)\in S_2$, il faut et il suffit qu'il existe $\lambda'\in[1,\infty[$ tel que la suite (x_n) soit $(0,\lambda')$-r. (mod 1); dès lors, d'après (7'), *il suffit qu'on ait*

(8') $$\sum_{h\geqslant 1}C_h<\infty.$$

8. Remarque. La condition (8) est évidemment suffisante pour que la suite (x_n) soit *à répartition* (mod 1) *partout dense dans* $[0,1]$ [r.p.d. (mod 1)].

D'autre part, si $I_{k,l}$ désigne l'intervalle de $\boldsymbol{T}$ de longueur $2/k$ et de centre l/k, la suite (x_n) est r.p.d. (mod 1) si et seulement si $\lim_{N\to\infty}(N,I_{k,l})=\infty$ pour tout entier $k\geqslant 2$ et pour tout entier $l=1,2,\ldots,k$, et cette condition équivaut à son tour à $\lim_{N\to\infty}\sum_{1\leqslant n\leqslant N}S_{k,l}(\langle x_n\rangle)=\infty$, car

$$(N,I_{k,l})\geqslant\sum_{1\leqslant n\leqslant N}S_{k,l}(\langle x_n\rangle)\quad\text{et}\quad(N,I_{2k,2l})\leqslant 2\sum_{1\leqslant n\leqslant N}S_{k,l}(\langle x_n\rangle).$$

Il en résulte que *la suite (x_n) est r.p.d.* (mod 1) *si et seulement si, pour tout entier $k\geqslant 2$ et pour tout entier $l=1,2,\ldots,k$, on a*

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{h\in\boldsymbol{Z}}\left(\frac{k}{\pi h}\sin\frac{\pi h}{k}\right)^2 e\left(-\frac{hl}{k}\right)N\sigma_N(h)=\infty.$$

Il est immédiat que ce critère peut encore s'énoncer ainsi: *la suite (x_n) est r.p.d.* (mod 1) *si et seulement si, pour tout couple réel (δ,τ) tel que $0<\delta\leqslant\frac{1}{2}$ et $0<\tau\leqslant 1$, on a*

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{h\in\boldsymbol{Z}}\left(\frac{\sin\pi h\delta}{\pi h\delta}\right)^2 e(-h\tau)N\sigma_N(h)=\infty.$$

CHAPITRE II

RÉPARTITIONS APPARENTÉES À L'ÉQUIRÉPARTITION MODULO 1 DANS $\boldsymbol{R}$

1. Equirépartition (mod 0).

1.1. Définition 1. Soit $m\in\boldsymbol{N}$; rappelons que la suite (x_n) est e.r. $\left(\mathrm{mod}\,\frac{1}{m}\right)$ si et seulement si la suite (mx_n) est e.r. (mod 1).

La suite (x_n) sera dite *équirépartie* [e.r.] (mod 0) si, pour tout couple réel (a,b) tel que $0\leqslant a<b\leqslant 1$, on a

(1) $$\lim_{m\to\infty}\varrho_*(mx,a,b)=\lim_{m\to\infty}\varrho^*(mx,a,b)=1.$$

Si la suite (x_n) est e.r. (mod1), il en est de même de la suite (mx_n) quel que soit $m \in \boldsymbol{N}$; donc alors $\varrho_*(mx, a, b) = \varrho^*(mx, a, b) = 1$ pour tout couple (a, b) envisagé, ce qui entraîne (1). Ainsi *l'équirépartition* (mod0) *est un affaiblissement de l'équirépartition* (mod1).

1.2. Condition suffisante d'équirépartition (mod0)**.** On a le théorème suivant, qui est analogue au théorème de Fejér sur l'équirépartition (mod1):

CONDITION SUFFISANTE 1. *Si f est une fonction à valeurs réelles définie sur $\boldsymbol{N}$ et au voisinage de l'infini positif, strictement monotone, dérivable et à dérivée monotone au voisinage de l'infini positif, si* $\lim\limits_{t\to\infty} f'(t) = 0$ *et si* $t|f'(t)|$ *est borné inférieurement par un réel* > 0 *quand* $t \to \infty$, *alors la suite* $n \to f(n)$ *est e.r.* (mod0).

Remarquons d'abord que les hypothèses faites sur f entraînent $\lim\limits_{t\to\infty} |f(t)| = \infty$. Supposons, pour fixer les idées, que f soit strictement croissante sur $[t_0, \infty[$, et soit φ sa fonction réciproque, elle aussi strictement croissante et dérivable sur $[f(t_0), \infty[$; on a $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi(t) = \infty$, φ' croissante sur $[f(t_0), \infty[$ et $\lim\limits_{t\to\infty}\varphi'(t) = \infty$.

Soit $0 < b \leqslant 1$. Pour un entier naturel assez grand, disons pour $k \geqslant K_m = mK_0$, le nombre des n tels que $k \leqslant mf(n) < k+b$ est

$$\varphi\left(\frac{k+b}{m}\right) - \varphi\left(\frac{k}{m}\right) + O(1) = \frac{b}{m}\varphi'\left(\frac{k+c_k}{m}\right) + O(1),$$

où $0 < c_k < b$. Donc, si $\varphi\left(\frac{K-1}{m}\right) \leqslant N < \varphi\left(\frac{K}{m}\right)$, avec $K > K_m$, le nombre des n tels que $0 \leqslant \langle mf(n)\rangle < b$ et $1 \leqslant n \leqslant N$ est

$$(N, 0, b)_{mf} = O_m(1) + \sum_{k=K_m}^{K-1}\left(\frac{b}{m}\varphi'\left(\frac{k+c_k}{m}\right) + O(1)\right) -$$

$$-\begin{cases} \varphi\left(\dfrac{K-1+b}{m}\right) - N & \text{si} \quad \varphi\left(\dfrac{K-1}{m}\right) \leqslant N < \varphi\left(\dfrac{K-1+b}{m}\right), \\ 0 & \text{si} \quad \varphi\left(\dfrac{K-1+b}{m}\right) \leqslant N < \varphi\left(\dfrac{K}{m}\right). \end{cases}$$

Dans les deux cas, ce dernier terme est $\leqslant \varphi\left(\frac{K}{m}\right) - \varphi\left(\frac{K-1}{m}\right) \leqslant \frac{1}{m}\varphi'\left(\frac{K}{m}\right)$, puisque φ' est croissante, de sorte que

$$(N, 0, b)_{mf} = O_m(1) + \frac{b}{m}\sum_{k=K_m}^{K-1}\varphi'\left(\frac{k+c_k}{m}\right) + O(K) + \frac{1}{m}O\left(\varphi'\left(\frac{K}{m}\right)\right).$$

La somme $\sum\limits_{k=K_m}^{K-1}\varphi'\left(\frac{k+c_k}{m}\right)$ est comprise entre

$$\varphi'\left(\frac{K_m}{m}\right) + \varphi'\left(\frac{K_m+1}{m}\right) + \ldots + \varphi'\left(\frac{K-1}{m}\right)$$

et

$$\varphi'\left(\frac{K_m+1}{m}\right) + \varphi'\left(\frac{K_m+2}{m}\right) + \ldots + \varphi'\left(\frac{K}{m}\right),$$

et l'intégrale

$$\int_{K_m}^{K}\varphi'\left(\frac{t}{m}\right)dt = m\varphi\left(\frac{K}{m}\right) - m\varphi(K_0)$$

est comprise entre les mêmes bornes, dont la différence est $\varphi'(K/m) - \varphi'(K_0)$; on a donc

$$\left|\sum_{k=K_m}^{K-1}\varphi'\left(\frac{k+c_k}{m}\right) - m\varphi\left(\frac{K}{m}\right) + m\varphi(K_0)\right| \leqslant \varphi'\left(\frac{K}{m}\right) - \varphi'(K_0),$$

d'où

$$\sum_{k=K_m}^{K-1}\varphi'\left(\frac{k+c_k}{m}\right) = m\varphi\left(\frac{K}{m}\right) + O\left(\varphi'\left(\frac{K}{m}\right)\right) + O_m(1).$$

On obtient ainsi

$$(N, 0, b)_{mf} = O_m(1) + b\varphi\left(\frac{K}{m}\right) + \frac{1}{m}O\left(\varphi'\left(\frac{K}{m}\right)\right) + O(K).$$

D'autre part

$$N = \varphi\left(\frac{K}{m}\right) + \frac{1}{m}O\left(\varphi'\left(\frac{K}{m}\right)\right).$$

Utilisons maintenant les deux dernières hypothèses de l'énoncé.

Quand $t \to \infty$, on a $f'(t) \to 0$, donc aussi $\frac{f(t)}{t} \to 0$, de sorte que $\frac{K}{m} = o\left(\varphi\left(\frac{K}{m}\right)\right)$; dans les mêmes conditions, il existe $A > 0$ tel que $tf'(t) > A$, donc $\frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} > A$, de sorte que $\varphi'\left(\frac{K}{m}\right) = O\left(\varphi\left(\frac{K}{m}\right)\right)$.

Dès lors, les formules précédentes deviennent

$$(N, 0, b)_{mf} = b\varphi\left(\frac{K}{m}\right) + \frac{1}{m}O\left(\varphi\left(\frac{K}{m}\right)\right) + mo\left(\varphi\left(\frac{K}{m}\right)\right) + O_m(1),$$

$$N = \varphi\left(\frac{K}{m}\right) + \frac{1}{m}O\left(\varphi\left(\frac{K}{m}\right)\right).$$

Traitant de même $(N, 0, a)_{mf}$, où $0 \leqslant a < b$, on obtient finalement

$$\frac{(N, a, b)_{mf}}{N} = \frac{b-a+\frac{1}{m}O(1)+mo(1)+O_m\left(\frac{1}{\varphi(K/m)}\right)}{1+\frac{1}{m}O(1)}.$$

Quand $K \to \infty$, donc quand $N \to \infty$, toutes les limites de ce rapport sont de la forme

$$\frac{b-a+\frac{1}{m}O(1)}{1+\frac{1}{m}O(1)};$$

ainsi, le couple (a, b) étant fixé, $\varrho_*(mf, a, b)$ et $\varrho^*(mf, a, b)$ sont l'une et l'autre de la forme

$$\frac{1+\frac{1}{m}O(1)}{1+\frac{1}{m}O(1)}$$

où les $O(1)$ ne dépendent pas de m; il en résulte qu'on a (1).

1.3. Exemple 1. Soit $f(t) = \alpha \log t$, où $\alpha \in \boldsymbol{R}^*$. Les conditions du théorème précédent sont vérifiées, donc *la suite* $n \to \alpha \log n$, *où* $\alpha \in \boldsymbol{R}^*$, *est e.r.* (mod 0). D'ailleurs, d'après l'étude directe qui a été faite dans I-6.2, on a, en posant $\gamma = 1/|\alpha|$, quand $m \to \infty$:

$$\varrho_*(mf, a, b) = \frac{e^{\gamma(b-a)/m}-1}{(e^{\gamma/m}-1)(b-a)} = \frac{1+O\left(\frac{1}{m}\right)}{1+O\left(\frac{1}{m}\right)} \to 1$$

et

$$\varrho^*(mf, a, b) = \frac{e^{\gamma/m}(1-e^{\gamma(a-b)/m})}{(e^{\gamma/m}-1)(b-a)} = \frac{1+O\left(\frac{1}{m}\right)}{1+O\left(\frac{1}{m}\right)} \to 1.$$

2. Equirépartition (mod ∞).

2.1. Définition 2. Soit $m \in \boldsymbol{N}$; rappelons que la suite (x_n) est e.r. (mod m) si et seulement si la suite $\left(\frac{x_n}{m}\right)$ est e.r. (mod 1).

La suite (x_n) sera dite *équirépartie* [e.r.] (mod ∞) si, pour tout couple réel (a, b) tel que $0 \leqslant a < b \leqslant 1$, on a

$$\lim_{m\to\infty} \varrho_*\left(\frac{x}{m}, a, b\right) = \lim_{m\to\infty} \varrho^*\left(\frac{x}{m}, a, b\right) = 1. \tag{2}$$

D'après A. Ammann [2], appelons *totalement équirépartie* toute suite (x_n) qui est e.r. (mod m) pour tout $m \in \boldsymbol{N}$. Dès lors, si la suite (x_n) est totalement e.r., alors la suite (x_n/m) est e.r. (mod 1) quel que soit $m \in \boldsymbol{N}$; on a donc

$$\varrho_*\left(\frac{x}{m}, a, b\right) = \varrho^*\left(\frac{x}{m}, a, b\right)$$

pour tout couple (a, b) envisagé, ce qui entraîne (2). Ainsi *l'équirépartition* (mod ∞) *est un affaiblissement de l'équirépartition totale.*

2.2. Condition suffisante d'équirépartition (mod ∞). On a, ici encore, un théorème analogue au théorème de Fejér:

Condition suffisante 2. *Si f est une fonction à valeurs réelles définie sur $\boldsymbol{N}$ et au voisinage de l'infini positif, strictement monotone, dérivable et à dérivée monotone au voisinage de l'infini positif, si $|f(t)|/t$ est borné supérieurement quand $t \to \infty$ et si $\lim_{t\to\infty} t|f'(t)| = \infty$, alors la suite $n \to f(n)$ est e.r.* (mod ∞).

Remarquons d'abord que les hypothèses faites sur f entraînent $\lim_{t\to\infty} |f(t)| = \infty$.

Supposons, pour fixer les idées, que f soit strictement croissante sur $[t_0, \infty[$, et soit φ sa fonction réciproque. Soit d'autre part $0 < b \leqslant 1$. Si $\varphi(m(K-1)) \leqslant N < \varphi(mK)$, avec $K > K_0/m$, on établit d'abord, comme dans la démonstration précédente, qu'on a

$$(N, 0, b)_{f/m} = O_m(1) + b\varphi(mK) + mO(\varphi'(mK)) + O(K)$$

avec

$$N = \varphi(mK) + mO(\varphi'(mK)).$$

Quand $t \to \infty$, il existe $A > 0$ tel que $f(t)/t < A$, de sorte que $mK = O(\varphi(mK))$; dans les mêmes conditions, on a $tf'(t) \to \infty$, donc $\varphi(t)/\varphi'(t) \to \infty$, de sorte que $\varphi'(mK) = o(\varphi(mK))$.

Dès lors, les formules précédentes deviennent

$$(N, 0, b)_{f/m} = b\varphi(mK) + mo(\varphi(mK)) + \frac{1}{m}O(\varphi(mK)) + O_m(1),$$

$$N = \varphi(mK) + mo(\varphi(mK)).$$

Traitant de même $(N, 0, a)_{f/m}$, où $0 \leqslant a < b$, on obtient

$$\frac{(N, a, b)_{f/m}}{N} = \frac{b-a+mo(1)+\dfrac{1}{m}O(1)+O_m\left(\dfrac{1}{\varphi(mK)}\right)}{1+mo(1)}.$$

Quand $K \to \infty$, donc quand $N \to \infty$, toutes les limites de ce rapport sont de la forme $b-a+\dfrac{1}{m}O(1)$; ainsi, le couple (a, b) étant fixé, $\varrho_*\left(\dfrac{f}{m}, a, b\right)$ et $\varrho^*\left(\dfrac{f}{m}, a, b\right)$ sont l'une et l'autre de la forme

$$1+\frac{1}{m}O(1)$$

où le $O(1)$ ne dépend pas de m; il en résulte qu'on a (2).

2.3. Exemple 2. Soit $f(t) = at$, où $a \in \boldsymbol{R}^*$. Les conditions du théorème précédent sont vérifiées, donc *la suite $n \to an$, où $a \in \boldsymbol{R}^*$, est e.r.* (mod ∞); de façon plus précise:

(a) si $a \in \boldsymbol{R}\setminus\boldsymbol{Q}$, la suite (an) est totalement e.r., donc aussi e.r. (mod ∞);

(b) si $a \in \boldsymbol{Q}^*$, la suite (an) est e.r. (mod ∞), sans être e.r. (mod 1). D'ailleurs une étude directe montre qu'on a

$$1-\frac{2|a|}{m(b-a)} \leqslant \varrho_*\left(\frac{f}{m}, a, b\right) \leqslant \varrho^*\left(\frac{f}{m}, a, b\right) \leqslant 1+\frac{2|a|}{m(b-a)},$$

de sorte que $\varrho_*\left(\dfrac{f}{m}, a, b\right)$ et $\varrho^*\left(\dfrac{f}{m}, a, b\right)$ tendent l'une et l'autre vers 1 quand $m \to \infty$.

3. Équirépartition en moyenne (mod 1).

3.1. Définition 3. La suite (x_n) sera dite *équirépartie en moyenne* (mod 1) si, pour tout couple réel (a, b) tel que $0 \leqslant a < b \leqslant 1$, on a

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{1\leqslant M\leqslant N} \frac{(M, a, b)}{M} = b-a.$$

Ainsi *l'équirépartition en moyenne* (mod 1) *est un affaiblissement de l'équirépartition* (mod 1).

3.2. Critères d'équirépartition en moyenne (mod 1). On a d'abord le

Critère 1. *Pour que la suite (x_n) soit e.r. en moyenne* (mod 1), *il faut et il suffit que, pour toute $f \in \mathscr{C}(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{C})$, on ait*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{1\leqslant M\leqslant N} \frac{1}{M} \sum_{1\leqslant n\leqslant M} f(\langle x_n\rangle) = \int_0^1 f(t)\,dt. \tag{3}$$

Il suffit évidemment d'établir la propriété pour les fonctions de $\mathscr{C}(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{R})$, et pour cela d'utiliser la méthode classique.

La nécessité se démontre en partageant $[0, 1[$ en ν intervalles égaux $[a_k, b_k[$, où $k = 1, \ldots, \nu$, et en encadrant f entre les deux fonctions en escalier qui, sur chacun des sous-intervalles $[a_k, b_k[$, sont respectivement égales à la borne inférieure et à la borne supérieure de f sur ce sous-intervalle. Après deux sommations par rapport à n, puis à M, on fera tendre d'abord N vers l'infini, puis ν vers l'infini.

La suffisance se démontre en considérant deux suites de fonctions l_k, L_k de $\mathscr{C}(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{R})$ qui encadrent la fonction caractéristique $\psi_{[a,b[}$, où $0 \leqslant a < b \leqslant 1$, sur $\boldsymbol{T}$, et dont les intégrales sur $[0, 1]$ tendent l'une et l'autre vers $b-a$ quand $k \to \infty$.

Critère 2. *Pour que la suite (x_n) soit e.r. en moyenne* (mod 1), *il faut et il suffit que, pour tout $h \in \boldsymbol{Z}^*$, on ait*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{1\leqslant M\leqslant N} \sigma_M(h) = 0. \tag{4}$$

(On utilise ici la définition de $\sigma_M(h)$ donnée dans I-4.)

La nécessité résulte de (3), où l'on prend $f(t) = e(ht)$, $h \in \boldsymbol{Z}^*$.

Pour établir la suffisance, suivant la méthode classique, on utilise le fait que toute $f \in \mathscr{C}(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{C})$ peut être approchée uniformément sur $\boldsymbol{T}$ par une suite de polynômes trigonométriques f_k; dès lors, si la condition (4) est remplie, on s'assure aisément que f_k satisfait à (3), donc aussi f satisfait à (3), et la suite (x_n) est e.r. en moyenne (mod 1).

4. Presque équirépartition en moyenne (mod 1).

4.1. Définition 4. Soit $\mathscr{N}$ la classe des applications strictement croissantes de $\boldsymbol{N}$ dans $\boldsymbol{N}$. D'après I. I. Šapiro-Pyateckiĭ [19], appelons *presque équirépartie* [p.e.r.] (mod 1) toute suite (x_n) possédant la propriété suivante: il existe $\varphi \in \mathscr{N}$ telle que, pour tout couple réel (a, b) vérifiant $0 \leqslant a < b \leqslant 1$, on ait

$$\lim_{N\to\infty} \frac{(\varphi(N), a, b)}{\varphi(N)} = b-a.$$

Pour que la suite (x_n) soit p.e.r. (mod 1), il faut et il suffit qu'il existe $\varphi \in \mathscr{N}$ telle que, pour tout $h \in \boldsymbol{Z}^*$, on ait

$$\lim_{N\to\infty} \sigma_{\varphi(N)}(h) = 0.$$

De manière analogue, la suite (x_n) sera dite *presque équirépartie en moyenne* (mod 1) s'il existe $\varphi \in \mathscr{N}$ telle que, pour tout couple réel (a, b)

vérifiant $0 \leqslant a < b \leqslant 1$, on ait

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{1\leqslant M\leqslant N} \frac{(\varphi(M), a, b)}{\varphi(M)} = b-a.$$

Pour que la suite (x_n) soit p.e.r. en moyenne (mod1), il faut et il suffit qu'il existe $\varphi \in \mathcal{N}$ telle que, pour tout $h \in \boldsymbol{Z}^*$, on ait

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{1\leqslant M\leqslant N} \sigma_{\varphi(M)}(h) = 0.$$

4.2. EXEMPLE 3. Soit $x_n = a\log n$, où $a \in \boldsymbol{R}$.

La formule sommatoire d'Euler nous donne, pour tout $N \in \boldsymbol{N}$ et pour tout $h \in \boldsymbol{Z}$:

$$\sum_{1\leqslant n\leqslant N} e(ha\log n)$$
$$= \int_1^N e(ha\log t)\,dt + \tfrac{1}{2}\big(1+e(ha\log N)\big) - 2i\pi ha \int_1^N \big(\tfrac{1}{2} - \langle t\rangle\big)\, e(ha\log t)\frac{dt}{t}.$$

Au second membre, le premier terme est égal à

$$\left[\frac{te(ha\log t)}{2i\pi ha+1}\right]_1^N = \frac{Ne(ha\log N)-1}{2i\pi ha+1}$$

et, quand $N\to\infty$, le deuxième et le troisième terme s'écrivent respectivement $O(1)$ et $O(\log N)$, de sorte que

$$\sigma_N(h) = \frac{e(ha\log N)}{2i\pi ha+1} + O\left(\frac{\log N}{N}\right). \tag{5}$$

(a) Quelle que soit $\varphi \in \mathcal{N}$, on a

$$\lim_{N\to\infty} |\sigma_{\varphi(N)}(h)| = (4\pi^2h^2a^2+1)^{-1/2},$$

donc *la suite $n \to a\log n$, où $a \in \boldsymbol{R}$, n'est pas p.e.r.* (mod1).

(b) On a d'après (5), quand $N\to\infty$:

$$\frac{1}{N} \sum_{1\leqslant M\leqslant N} \sigma_M(h) = \frac{\sigma_N(h)}{2i\pi ha+1} + o(1)$$

et, en appliquant (5) de nouveau:

$$\frac{1}{N} \sum_{1\leqslant M\leqslant N} \sigma_M(h) = \frac{1}{2i\pi ha+1}\left(\frac{e(ha\log N)}{2i\pi ha+1} + O\left(\frac{\log N}{N}\right)\right) + o(1)$$
$$= \frac{e(ha\log N)}{(2i\pi ha+1)^2} + o(1).$$

Le module du premier membre tend vers $(4\pi^2h^2a^2+1)^{-1}$ quand $N\to\infty$; donc *la suite $n\to a\log n$, où $a\in\boldsymbol{R}$, n'est pas e.r. en moyenne* (mod1).

(c) Prenant $\varphi(M) = k^M$, où k entier $\geqslant 2$, on a, d'après (5), quand $N\to\infty$:

$$\frac{1}{N} \sum_{1\leqslant M\leqslant N} \sigma_{k^M}(h) = \frac{1}{2i\pi ha+1}\, \frac{1}{N} \sum_{1\leqslant M\leqslant N} e(haM\log k) + o(1).$$

Supposons $a \neq 0$, et choisissons k de manière que $a\log k$ soit irrationnel (par exemple, si $a\log 2$ est irrationnel, on prendra $k=2$, et si $a\log 2$ est rationnel, on prendra $k=3$). Alors le premier terme, au second membre précédent, est égal, si $h\neq 0$, à

$$\frac{1}{2i\pi ha+1}\, \frac{e(haN\log k)-1}{e(ha\log k)-1}\, \frac{e(ha\log k)}{N} = O\left(\frac{1}{N}\right),$$

de sorte que $\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{1\leqslant M\leqslant N} \sigma_{k^M}(h) = 0$ pour tout $h\in\boldsymbol{Z}^*$.

Ainsi *la suite $n\to a\log n$, où $a\in\boldsymbol{R}^*$, est p.e.r. en moyenne* (mod1).

CHAPITRE III

RÉPARTITION MODULO 1 DANS $\boldsymbol{R}$ DES SUITES DÉFINIES PAR CERTAINES FONCTIONS PÉRIODIQUES

1. Construction et étude des suites u.

1.1. Soit F une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle $I = \,]t_1, t_2[$ de longueur *irrationnelle* ω, et soit F^* la fonction *périodique*, de période ω, qui est égale à F sur I. Pour la commodité du langage, on supposera que $t_1+\omega\boldsymbol{Z}$, qui ne peut contenir au plus qu'un seul entier rationnel, ne contient aucun entier naturel, de sorte que $F^*(n)$ est défini sur $\boldsymbol{N}$.

On pose alors, pour tout $n\in\boldsymbol{N}$:

$$v_n = \frac{n-t_1}{\omega} \quad \text{et} \quad u_n = F^*(n) = F(n-\omega[v_n]),$$

et on se propose d'étudier la répartition (mod 1) de la suite (u_n). La fonction réciproque de F, lorsqu'elle existe, sera notée Φ.

1.2. PROPOSITION 1. *Si F satisfait aux conditions* (C) *suivantes*:

(C1) *F est continue et strictement monotone sur I*;

(C2) $|F(t)|\to\infty$ *quand* $t_1<t\to t_1$ *et quand* $t_2>t\to t_2$;

alors la suite (u_n) *admet une fonction de répartition* (mod 1) *continue sur* $[0,1]$ *dont la valeur en tout point* $a \in [0,1]$ *est*

$$\chi(a) = \frac{1}{\omega} \sum_{k\in\mathbf{Z}} |\Phi(k+a) - \Phi(k)|. \tag{1}$$

Supposons, pour fixer les idées, que F soit strictement croissante sur I, de sorte que Φ est continue et strictement croissante sur $\mathbf{R}$, avec $\lim_{t\to-\infty} \Phi(t) = t_1$ et $\lim_{t\to\infty} \Phi(t) = t_2$.

Soit $0 \leqslant a < b \leqslant 1$ et soit $k \in \mathbf{Z}$. Pour que $k+a \leqslant F^*(n) < k+b$, il faut et il suffit qu'on ait $\Phi(k+a) \leqslant n - \omega[v_n] < \Phi(k+b)$, c'est-à-dire $A_k \leqslant \langle v_n \rangle < B_k$, en posant

$$A_k = \frac{\Phi(k+a) - t_1}{\omega} \quad \text{et} \quad B_k = \frac{\Phi(k+b) - t_1}{\omega}.$$

Il en résulte que

$$(N, a, b)_u = \sum_{k\in\mathbf{Z}} (N, A_k, B_k)_v,$$

où $0 < \ldots \leqslant A_{k-1} < B_{k-1} \leqslant A_k < B_k \leqslant \ldots < 1$.

Soit $H \in \mathbf{N}$; on a

$$\frac{1}{N} \sum_{-H\leqslant k\leqslant H} (N, A_k, B_k)_v \leqslant \frac{1}{N} \sum_{k\in\mathbf{Z}} (N, A_k, B_k)_v$$
$$\leqslant \frac{1}{N} \sum_{-H\leqslant k\leqslant H} (N, A_k, B_k)_v + \frac{1}{N}(N, 0, A_{-H})_v + \frac{1}{N}(N, B_H, 1)_v.$$

Puisque ω est irrationnel, la suite (v_n) est e.r. (mod 1) et, quand $N \to \infty$, on obtient

$$\sum_{-H\leqslant k\leqslant H} (B_k - A_k) \leqslant \liminf_{N\to\infty} \frac{(N, a, b)_u}{N} \leqslant \limsup_{N\to\infty} \frac{(N, a, b)_u}{N}$$
$$\leqslant \sum_{-H\leqslant k\leqslant H} (B_k - A_k) + A_{-H} + 1 - B_H.$$

La série $\sum_{k\in\mathbf{Z}} (B_k - A_k)$ est convergente, de somme $\leqslant 1$, et $A_{-H} + 1 - B_H \to 0$ quand $H \to \infty$. Dès lors, soit $\varepsilon > 0$; pour H assez grand, le premier membre des inégalités précédentes est $> \sum_{k\in\mathbf{Z}} (B_k - A_k) - \varepsilon$, et leur dernier membre est $< \sum_{k\in\mathbf{Z}} (B_k - A_k) + \varepsilon$, ce qui exige, puisque $\varepsilon > 0$ est arbitrairement petit, qu'on ait

$$\lim_{N\to\infty} \frac{(N, a, b)_u}{N} = \sum_{k\in\mathbf{Z}} (B_k - A_k).$$

Si F est strictement décroissante sur I, la différence $B_k - A_k$ est remplacée par son opposée dans la formule précédente.

On a donc

$$\lim_{N\to\infty} \frac{(N, a, b)_u}{N} = \frac{1}{\omega} \sum_{k\in\mathbf{Z}} |\Phi(k+b) - \Phi(k+a)|,$$

d'où notamment (1).

De plus, χ est continue sur $[0,1]$, car c'est la somme d'une série uniformément convergente de fonctions continues sur $[0,1]$.

1.3. Proposition 2. *Si* F *satisfait aux conditions* (C') *suivantes*:

(C'1) F *est continûment dérivable et* F' *de signe constant sur* I;

(C'2) (C2);

(C'3) *la série* $\sum_{k\in\mathbf{Z}} \Phi'(k+t)$ *est uniformément convergente sur* $[0,1]$;

alors la suite (u_u) *admet une fonction densité de répartition* (mod1) *continue sur* $[0,1]$ *dont la valeur en tout point* $a \in [0,1]$ *est*

$$\varrho(a) = \frac{1}{\omega} \sum_{k\in\mathbf{Z}} |\Phi'(k+a)|. \tag{2}$$

D'abord la suite (u_n) admet la fonction de répartition (mod1) définie par (1). De plus Φ' est continue et de signe constant sur $\mathbf{R}$, avec $\lim_{|t|\to\infty} \Phi'(t) = 0$. Puisque la série $\frac{1}{\omega} \sum_{k\in\mathbf{Z}} |\Phi'(k+a)|$, dérivée terme à terme de la série (1), est une série uniformément convergente de fonctions continues sur $[0,1]$, la fonction χ est continûment dérivable sur $[0,1]$, et l'on a (2). On notera que $\varrho(0) = \varrho(1)$.

2. Famille de suites $\mathscr{U}(\varphi)$. Soit φ une application de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ possédant les *propriétés* (P) suivantes:

(P1) φ *est continue et de signe constant sur* $\mathbf{R}$; soit ε son signe;

(P2) *l'intégrale* $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\,dt$ *est convergente et irrationnelle*; soit $\varepsilon\omega$ sa valeur $(\omega > 0)$;

(P3) *la série* $\sum_{k\in\mathbf{Z}} \varphi(k+t)$ *est uniformément convergente sur* $[0,1]$.

Soit $\tau \in \mathbf{R}$ et posons $\Phi_\tau(t) = \int_0^t \varphi(s)\,ds + \tau$. La fonction Φ_τ est continue et strictement monotone sur $\mathbf{R}$, avec $\lim_{t\to-\infty} \Phi_\tau(t) = -\int_{-\infty}^0 \varphi(s)\,ds + \tau$, soit τ_1, et $\lim_{t\to\infty} \Phi_\tau(t) = \int_0^\infty \varphi(s)\,ds + \tau$, soit τ_2. Il en résulte que Φ_τ admet une fonction réciproque F_τ continue et strictement monotone sur $I =]\tau_1, \tau_2[$ si $\varepsilon = 1$ [resp. $I =]\tau_2, \tau_1[$ si $\varepsilon = -1$], de longueur $|\tau_2 - \tau_1| = \left|\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\,dt\right| = \omega$ irrationnel > 0. Puisque $\Phi_\tau' = \varphi$ est continue et de signe constant sur $\boldsymbol{R}$, la fonction F_τ est continûment dérivable et F_τ' de signe constant sur I.

D'autre part $|F_\tau(t)| \to \infty$ quand $t \to \tau_1$ et quand $t \to \tau_2$ (du côté convenable).

Finalement, on voit que F_τ satisfait aux condition (C'). Dès lors, quand τ parcourt $\boldsymbol{R}$, toutes les suites $n \to u_n(\varphi, \tau) = F_\tau^*(n)$ admettent une même fonction densité de répartition (mod 1) continue sur $[0, 1]$ dont la valeur en tout point $a \in [0, 1]$ est

$$\varrho(a) = \frac{\varepsilon}{\omega} \sum_{k \in \boldsymbol{Z}} \varphi(k + a), \tag{3}$$

avec $\varepsilon = \operatorname{sgn}\varphi$ et $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\,dt = \varepsilon\omega$.

$\mathscr{U}(\varphi)$ désignera la famille de suites $\{u(\varphi, \tau)\}_{\tau \in \boldsymbol{R}}$ ainsi associée à toute fonction φ possédant les propriétés (P).

Exemple 1. Soit $\varphi(t) = \lambda e^{-\alpha|t|}$, où $\lambda \in \boldsymbol{R}$, α réel > 0, $\dfrac{\lambda}{\alpha}$ irrationnel; ici $\varepsilon = \operatorname{sgn}\lambda$ et $\omega = 2\dfrac{|\lambda|}{\alpha}$; on a donc, pour tout $a \in [0, 1]$:

$$\varrho(a) = \frac{\alpha}{2} \sum_{k \in \boldsymbol{Z}} e^{-\alpha|k+a|} = \frac{\alpha \operatorname{ch} \alpha(a - \frac{1}{2})}{2 \operatorname{sh} \frac{1}{2}\alpha}.$$

On notera que $\varrho(a) = \varrho(1 - a)$.

3. Sommation de la série $\varrho(a)$. On considère ici les familles de suites associées à la restriction à $\boldsymbol{R}$ d'une fonction d'une variable complexe, en supposant évidemment que cette restriction prenne ses valeurs dans $\boldsymbol{R}$.

Soit φ une fonction d'une variable complexe possédant les *propriétés* (Q) suivantes, qui sont compatibles:

(Q1) *φ applique $\boldsymbol{R}$ dans $\boldsymbol{R}$ et la restriction de φ à $\boldsymbol{R}$ possède les propriétés* (P);

(Q2) *φ est une fonction méromorphe sur $\boldsymbol{C}$ où elle admet un nombre fini de pôles tous simples*;

(Q3) $\varphi(z) \to 0$ *quand* $|z| \to \infty$.

D'abord φ présente au moins un pôle dans $\boldsymbol{C}$, sinon, étant holomorphe et bornée sur $\boldsymbol{C}$ d'après (Q3), cette fonction serait constante, et d'ailleurs cette constante serait nulle, ce qui, d'après (P1), est impossible. D'après (Q1), tous les pôles de φ sont imaginaires, et d'ailleurs deux à deux imaginaires conjugués; on désigne par (b_k, b_{-k}), où $k = 1, \ldots, K$, ces couples de pôles simples imaginaires conjugués. Il existe un système de $2K$ contours simples rectifiables, répartis en couples (Γ_k, Γ_{-k}), où $k = 1, \ldots, K$, extérieurs les uns aux autres, ne rencontrant pas la droite réelle, deux à deux symétriques par rapport à celle-ci, et tels que Γ_k [resp. Γ_{-k}] entoure le pôle b_k [resp. b_{-k}]; on désigne par L la réunion des $2K$ contours précédents.

Soit $a \in [0, 1]$ et soit $N \in \boldsymbol{N}$; posant $z = x + iy$, on désigne par C le contour rectangulaire

$$x = a \pm (N + \tfrac{1}{2}) \quad \text{et} \quad |y| \leqslant N + \tfrac{1}{2},$$
$$|x - a| \leqslant N + \tfrac{1}{2} \quad \text{et} \quad y = \pm (N + \tfrac{1}{2}),$$

où N est choisi assez grand pour que L soit à l'intérieur de C.

La fonction G définie par

$$G(z) = \pi\varphi(z) \operatorname{cotg} \pi(z - a)$$

est méromophe sur l'ouvert multiplement connexe de frontière $L \cup C$ et continue sur cette frontière, avec les seuls pôles simples $z_k = a + k$, où $-N \leqslant k \leqslant N$ (car φ ne s'annule pas sur $\boldsymbol{R}$). Le résidu de G au pôle z_k est, en posant $u = \pi(z - a - k)$:

$$\varphi(a + k) \cos \pi k \lim_{u \to 0} \frac{u}{(-1)^k \sin u} = \varphi(a + k).$$

Intégrant G le long de $L \cup C$ et appliquant le théorème des résidus, il vient

$$\int\limits_{C^+} G(z)\,dz - \int\limits_{L^+} G(z)\,dz = 2i\pi \sum_{-N \leqslant k \leqslant N} \varphi(a + k).$$

Soit $A > 1$; pour N assez grand, on a $|\operatorname{cotg} \pi(z - a)| < A$ sur C.

D'autre part, puisque φ est holomorphe au voisinage du point à l'infini de $\boldsymbol{C}$ et s'annule en ce point, on a, pour $|z|$ assez grand, $\varphi(z) = \sum\limits_{k \geqslant 1} a_k/z^k$; mais, sur la droite réelle, l'intégrale $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\,dt$ est convergente, ce qui exige $a_1 = 0$; il en résulte que le point à l'infini de $\boldsymbol{C}$ est un zéro au moins double de φ, et il existe $B > 0$ tel que, pour N assez grand, on ait

$$|\varphi(z)| < \frac{B}{|z|^2} \leqslant \frac{B}{(N - \frac{1}{2})^2} \quad \text{sur } C.$$

Ainsi donc, pour N assez grand, on a

$$\left| \int\limits_{C^+} G(z)\,dz \right| \leqslant \frac{\pi AB}{(N - \frac{1}{2})^2}\, 8(N + \tfrac{1}{2}).$$

Quand $N \to \infty$, le second membre précédent tend vers 0, la formule des résidus donne, pour la famille de suites $\mathscr{U}(\varphi|\boldsymbol{R})$:

$$\varrho(a) = \frac{i\varepsilon}{2\omega} \int_{L^+} \varphi(z) \operatorname{cotg} \pi(z-a)\, dz, \tag{4}$$

où $\varepsilon = \operatorname{sgn}(\varphi|\boldsymbol{R})$.

Soit alors r_k le résidu de φ relatif au pôle simple b_k; on a $r_{-k} = \bar{r}_k$. Les zéros de $\operatorname{cotg}\pi(z-a)$ étant tous réels, la fonction G est méromorphe sur l'ouvert simplement connexe de frontière Γ_k et continue sur cette frontière, avec le seul pôle simple b_k, et le résidu de G/π relatif à ce pôle simple est $r_k \operatorname{cotg}\pi(b_k - a)$. On a donc

$$\int_{\Gamma_k^+} \varphi(z) \operatorname{cotg}\pi(z-a)\, dz = 2i\pi r_k \operatorname{cotg}\pi(b_k - a),$$

d'où, d'après (4):

$$\begin{aligned}\varrho(a) &= \frac{i\varepsilon}{2\omega} \sum_{1 \leqslant |k| \leqslant K} 2i\pi r_k \operatorname{cotg}\pi(b_k - a) \\ &= -\frac{\varepsilon\pi}{\omega} \sum_{1 \leqslant k \leqslant K} \big(r_k \operatorname{cotg}\pi(b_k - a) + \bar{r}_k \operatorname{cotg}\pi(\bar{b}_k - a)\big).\end{aligned}$$

Dès lors un calcul simple donne finalement, pour la famille de suites $\mathscr{U}(\varphi|\boldsymbol{R})$:

$$\varrho(a) = -\frac{2\varepsilon\pi}{\omega} \sum_{1 \leqslant k \leqslant K} \frac{\mathscr{I}r_k \operatorname{sh} 2\pi \mathscr{I}b_k - \mathscr{R}r_k \sin 2\pi(a - \mathscr{R}b_k)}{\operatorname{ch} 2\pi\mathscr{I}b_k - \cos 2\pi(a - \mathscr{R}b_k)}, \tag{5}$$

où $\varepsilon = \operatorname{sgn}(\varphi|\boldsymbol{R})$. (Ici, $\mathscr{R}$ et $\mathscr{I}$ sont les symboles usuels de la partie réelle et de la partie imaginaire d'un complexe.)

On notera que si $\mathscr{R}r_k = 0$ et $2\mathscr{R}b_k \in \boldsymbol{Z}$ pour $k = 1, \ldots, K$, alors on a $\varrho(a) = \varrho(1-a)$.

Exemple 2. Soit $\varphi(z) = \dfrac{a}{\lambda(a^2+z^2)}$, où $a \in \boldsymbol{R}^*$, $\lambda \in \boldsymbol{R}$, λ/π irrationnel; ici $\varepsilon = \operatorname{sgn} a\lambda$, $\omega = \pi/|\lambda|$, $K = 1$; les deux pôles simples de φ sont $b_1 = ia$, $b_{-1} = -ia$, avec les résidus respectifs $r_1 = -i/2\lambda$, $r_{-1} = i/2\lambda$; on a donc, pour tout $a \in [0,1]$;

$$\varrho(a) = \frac{|\operatorname{sh} 2\pi a|}{\operatorname{ch} 2\pi a - \cos 2\pi a} \tag{6}$$

et $\varrho(a) = \varrho(1-a)$.

Les primitives de φ sur $\boldsymbol{R}$ étant $\Phi_\tau(t) = \dfrac{1}{\lambda}\operatorname{Arctg}\dfrac{t}{a} + \tau$, on a ici $F_\tau^*(t) = a \operatorname{tg} \lambda(t-\tau)$; posant $\mu = -\lambda\tau$, on voit que la famille $\mathscr{U}(\varphi|\boldsymbol{R})$ est ici constituée par les suites $n \to a\operatorname{tg}(\lambda n + \mu)$, où μ parcourt $\boldsymbol{R}$. Ainsi *la suite $n \to a\operatorname{tg}(\lambda n+\mu)$, où $a \in \boldsymbol{R}^*$, $\lambda \in \boldsymbol{R}$, λ/π irrationnel, admet la fonction densité de répartition* (mod 1) *définie par* (6) *sur* $[0,1]$.

4. Série de Fourier de $\varrho(a)$. Suivant la notation introduite dans I-5, soient $c_h(u)$ les coefficients de Weyl communs à toutes les suites (u_n) de la famille $\mathscr{U}(\varphi|\boldsymbol{R})$, définis, pour tout $h \in \boldsymbol{Z}$, par

$$c_h(u) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{1 \leqslant n \leqslant N} e(hu_n).$$

On sait que, pour tout $h \in \boldsymbol{Z}$, on a

$$c_h(u) = \int_0^1 e(ht)\varrho(t)\, dt.$$

Mais, d'après (3), on a, pour tout $t \in [0,1]$:

$$\varrho(t) = \frac{\varepsilon}{\omega} \sum_{k \in \boldsymbol{Z}} \varphi(k+t).$$

Donc

$$c_h(u) = \frac{\varepsilon}{\omega} \int_0^1 \Big(\sum_{k\in\boldsymbol{Z}} \varphi(k+t)\Big) e(ht)\, dt,$$

ou encore, puisque la série indiquée est uniformément convergente sur $[0,1]$:

$$c_h(u) = \frac{\varepsilon}{\omega} \sum_{k\in\boldsymbol{Z}} \int_0^1 \varphi(k+t) e(ht)\, dt.$$

Posant $k+t = \theta$, on obtient

$$c_h(u) = \frac{\varepsilon}{\omega} \sum_{k\in\boldsymbol{Z}} \int_k^{k+1} \varphi(\theta) e\big(h(\theta-k)\big)\, d\theta = \frac{\varepsilon}{\omega} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\theta) e(h\theta)\, d\theta.$$

Soit ψ la transformée de Fourier de φ, définie par

$$\psi(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e(ts)\varphi(t)\, dt,$$

de sorte que

$$\psi(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, dt = \varepsilon\omega.$$

On voit qu'on a en résumé, pour tout $h \in \boldsymbol{Z}$ et pour toutes les suites de la famille $\mathscr{U}(\varphi|\boldsymbol{R})$:

$$c_h(u) = \frac{\psi(h)}{\psi(0)}. \tag{7}$$

Enfin, on sait que ces coefficients de Weyl sont aussi les coefficients de la série de Fourier de $\varrho(a)$; on a donc, pour tout $a \in [0, 1]$ et pour la famille de suites $\mathscr{U}(\varphi|\boldsymbol{R})$:

$$\varrho(a) = \frac{1}{\psi(0)} \sum_{|h|\geqslant 0} \psi(h) e(-ha).$$

Exemple 3. Reprenant l'exemple 2, on a

$$\psi(s) = \frac{\pi \operatorname{sgn} a}{\lambda} e^{-2\pi|as|} \quad \text{et} \quad u_n = a\operatorname{tg}(\lambda n + \mu),$$

d'où la relation

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{1\leqslant n\leqslant N} e\big(ha\operatorname{tg}(\lambda n+\mu)\big) = e^{-2\pi|ah|}$$

vérifiée pour $h \in \boldsymbol{Z}$ et $a, \lambda, \mu \in \boldsymbol{R}$, λ/π irrationnel; enfin, pour tout $a \in [0, 1]$, on a

$$\varrho(a) = \sum_{|h|\geqslant 0} e^{-2\pi|ha|} e(-ha) = 1 + 2\sum_{h\geqslant 1} e^{-2\pi h|a|} \cos 2\pi h a.$$

5. Caractérisation des familles $\mathscr{U}(\varphi)$ de suites e.r. (mod 1). D'après (7), on a aussitôt:

Critère 1. *Pour que $\mathscr{U}(\varphi)$ soit une famille de suites e.r.* (mod 1), *il faut et il suffit que $\psi(k) = 0$ pour tout $k \in \boldsymbol{Z}^*$.*

Mais nous allons indiquer une méthode qui permet de caractériser de façon élémentaire les familles $\mathscr{U}(\varphi)$ de suites e.r. (mod 1).

Conditions nécessaires. Puisque $\varrho(a) = 1$, on a, pour tout $a \in [0, 1]$:

$$\sum_{k\in\boldsymbol{Z}} \varphi(k+a) = \varepsilon\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\,dt.$$

Posons, pour tout $t \in \boldsymbol{R}$:

$$g(t) = \sum_{k\leqslant [t]-1} \varphi(k + \langle t\rangle)$$

et soit Δg la première différence finie de g:

$$\Delta g(t) = g(t+1) - g(t) = \varphi([t] + \langle t\rangle) = \varphi(t).$$

D'après (P1), Δg est continue et de signe constant sur $\boldsymbol{R}$.

D'autre part, g est bornée sur $\boldsymbol{R}$, car $|g(t)| < \sum_{k\in\boldsymbol{Z}} |\varphi(k + \langle t\rangle)| = \omega$. Dès lors la suite $k \to g(t+k)$, où $k \in \boldsymbol{Z}$, qui est strictement monotone et bornée, est convergente quand $k \to \infty$ et quand $k \to -\infty$; elle est même, dans ces conditions, d'après (P3), uniformément convergente sur $[0, 1]$.

Soit $K \in \boldsymbol{N}$; on a

$$\sum_{-K\leqslant k\leqslant K} \varphi(t+k) = g(t+K+1) - g(t-K). \tag{8}$$

Quand $K \to \infty$, le premier membre tend vers $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\,dt$, intégrale convergente et irrationnelle d'après (P2), et le second membre tend vers $\lim_{k\to\infty} g(t+k) - \lim_{k\to-\infty} g(t+k)$, de sorte que cette différence est constante sur $[0, 1]$, finie et irrationnelle.

En résumé, si $\mathscr{U}(\varphi)$ est une famille de suites e.r. (mod 1), il existe une application g de $\boldsymbol{R}$ dans $\boldsymbol{R}$ telle que $\varphi = \Delta g$ et qui possède les *propriétés* (E) suivantes:

(E1) *Δg est continue et de signe constant sur $\boldsymbol{R}$;*

(E2) *la différence $\lim_{k\to\infty} g(t+k) - \lim_{k\to-\infty} g(t+k)$ est constante sur* $[0, 1]$, *finie et irrationnelle;*

(E3) *la suite $k \to g(t+k)$ est uniformément convergente sur* $[0, 1]$ *quand $k \to \infty$ et quand $k \to -\infty$.*

$\mathscr{E}$ désignera la classe des applications de $\boldsymbol{R}$ dans $\boldsymbol{R}$ qui possèdent les propriétés (E).

Conditions suffisantes. Soit $g \in \mathscr{E}$ et posons $\varphi = \Delta g$. Il est immédiat que φ possède les propriétés (P1) et (P3). Compte tenu de (E2), la relation (8) montre, quand $K \to \infty$, que la somme $\sum_{k\in\boldsymbol{Z}} \varphi(t+k) = \lim_{k\to\infty} g(t+k) - \lim_{k\to-\infty} g(t+k)$ est constante sur $[0, 1]$, ce qui permet d'écrire

$$\sum_{k\in\boldsymbol{Z}} \varphi(t+k) = \int_0^1 \sum_{k\in\boldsymbol{Z}} \varphi(s+k)\,ds.$$

Puisque φ est continue sur $\boldsymbol{R}$ et que la série figurant sous le signe d'intégration est uniformément convergente sur $[0, 1]$, on obtient, en posant $s + k = \theta$:

$$\sum_{k\in\boldsymbol{Z}} \varphi(t+k) = \sum_{k\in\boldsymbol{Z}} \int_0^1 \varphi(s+k)\,ds = \sum_{k\in\boldsymbol{Z}} \int_k^{k+1} \varphi(\theta)\,d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\theta)\,d\theta.$$

Cette intégrale, finalement égale à $\lim_{k\to\infty} g(t+k) - \lim_{k\to-\infty} g(t+k)$, est convergente et, d'après (E2), irrationnelle; ainsi φ possède la propriété (P2).

En résumé, φ possède les propriétés (P); de plus, pour la famille de suites $\mathscr{U}(\varphi)$, on a, pour tout $a\in[0,1]$:

$$\varrho(a) = \frac{\varepsilon}{\omega}\sum_{k\in Z}\varphi(k+a) = \frac{\varepsilon}{\omega}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\,dt = 1,$$

de sorte que toutes les suites de cette famille sont e.r. (mod 1).

On a donc finalement le

CRITÈRE 2. *Pour que $\mathscr{U}(\varphi)$ soit une famille de suites e.r.* (mod 1), *il faut et il suffit qu'il existe $g\in\mathscr{E}$ telle que $\varphi = \Delta g$.*

EXEMPLE 4. Soit $g(t) = \lambda\,\mathrm{th}\,at$, où $a\in\boldsymbol{R}^*$, λ irrationnel; alors $\mathscr{U}(\Delta g)$ est une famille de suites e.r. (mod 1).

Les primitives de Δg étant

$$\Phi_\tau(t) = \frac{\lambda}{a}\log\frac{\mathrm{ch}\,a(t+1)}{\mathrm{ch}\,at}+\tau,$$

on a ici, sur $]\tau-|\lambda|,\tau+|\lambda|[$:

$$F_\tau(t) = \frac{1}{2a}\log\frac{e^{a(t-\tau)/\lambda}-e^{-a}}{e^{a}-e^{a(t-\tau)/\lambda}}$$

et $\omega = 2|\lambda|$. Posant $v_n = \dfrac{n}{2|\lambda|}+\mu$, avec $\mu = \dfrac{1}{2}-\dfrac{\tau}{2|\lambda|}$, et $\varepsilon = \mathrm{sgn}\,\lambda$, les suites e.r. (mod 1) ainsi obtenues sont les suites

$$n\to\frac{1}{2a}\log\frac{e^{2a\varepsilon\langle v_n\rangle}-e^{a(\varepsilon-1)}}{e^{a(\varepsilon+1)}-e^{2a\varepsilon\langle v_n\rangle}},$$

où μ parcourt $\boldsymbol{R}$.

CHAPITRE IV

RÉPARTITIONS MODULO 1 CONTINUES ET PÉRIODIQUES DANS *R*

1. DÉFINITION. Soit χ_0 une fonction de répartition dans $[0,1]$ continue sur $[0,1]$, et soit un réel a tel qu'on ait $0<a\leqslant 1$. La suite (x_n) est dite *a-continûment et périodiquement répartie* [a-c.p.r.] (mod 1) *relativement à* χ_0 si elle admet une fonction de répartition (mod 1), soit χ, continue sur $[0,1]$ et telle que $\chi-\chi_0$ soit la restriction à $[0,1]$ d'une fonction périodique, définie sur $\boldsymbol{R}$, de période a.

Cette définition exprime que χ, supposée d'abord continue sur $[0,1]$, vérifie de plus la condition suivante: pour tout $t\in[0,1-a]$, on a

$$\chi(t+a)-\chi_0(t+a) = \chi(t)-\chi_0(t). \tag{1}$$

Si $a=1$, la condition (1) se réduit (ici $t=0$) à $\chi(1)-\chi_0(1) = \chi(0)=\chi_0(0)$, qui est satisfaite; les suites 1-c.p.r. (mod 1) relativement à χ_0 s'identifient donc, quelle que soit χ_0, aux suites qui admettent une fonction de répartition (mod 1) continue sur $[0,1]$.

Dans le cas où la suite (x_n) est a-c.p.r. (mod 1) relativement à la fonction identique sur $[0,1]$, on dira simplement qu'elle est *a-continûment et périodiquement répartie* [a-c.p.r.] (mod 1). La condition (1) devient alors: pour tout $t\in[0,1-a]$, on a

$$\chi(t+a) = \chi(t)+a. \tag{1'}$$

Si de plus χ est dérivable sur $[0,1]$, la suite (x_n) admet alors une fonction densité de répartition (mod 1), soit ϱ, qui est la restriction à $[0,1]$ d'une fonction périodique, définie sur $\boldsymbol{R}$, de période a.

2. Critères de a-c.p. **répartition** (mod 1) **relativement à** χ_0.

2.1. Soit χ une fonction de répartition dans $[0,1]$ continue sur $[0,1]$.

(a) Rappelons d'abord un résultat classique: *pour que la suite (x_n) admette χ comme fonction de répartition* (mod 1), *il faut et il suffit qu'on ait, pour tout $h\in\boldsymbol{Z}$*:

$$c_h = \int_0^1 e(ht)\,d\chi(t). \tag{2}$$

La définition de c_h, ou explicitement $c_h(x)$, a été introduite dans I-5.

(b) Soit $\sum_{|h|\geqslant 0}\lambda_h e(-ht)$ la série de Fourier de $F(t) = \chi(t)-t$ sur $[0,1]$; *pour que la suite (x_n) admette χ comme fonction de répartition* (mod 1), *il faut et il suffit qu'on ait, pour tout $h\in\boldsymbol{Z}^*$*:

$$c_h = -2i\pi h\lambda_h. \tag{3}$$

Remarquons d'abord que F est continue et à variation bornée sur $[0,1]$. D'après (2), pour que la suite (x_n) admette χ comme fonction de répartition (mod 1), il faut et il suffit qu'on ait, pour tout $h\in\boldsymbol{Z}^*$:

$$c_h = \int_0^1 e(ht)\,dF(t)+\int_0^1 e(ht)\,dt,$$

c'est-à-dire, puisque la dernière intégrale est nulle:

$$c_h = \int_0^1 e(ht)\,dF(t),$$

et cette condition s'écrit encore

$$c_h = [e(ht)F(t)]_0^1-2i\pi h\int_0^1 e(ht)F(t)\,dt.$$

Mais le premier terme du second membre est nul, car $F(0) = F(1) = 0$, et, d'après la formule d'Euler-Fourier, l'intégrale qui figure au second membre est égale à λ_h; on obtient donc finalement la condition (3).

2.2. Soit alors $\sum_{|h|\geqslant 0} \gamma_h e(-ht)$ la série de Fourier de $F_0(t) = \chi_0(t)-t$ sur $[0,1]$. On désigne par $\mathscr{G}_a$ la classe des fonctions g à valeur réelles, continues et à variation bornée sur $[1-a,1]$, telles que

$$g(1-a) = g(1) = 0 \quad \text{et} \quad \int_{1-a}^{1} g(s)\,ds = 0.$$

Critère 1. *Pour que la suite* (x_n) *soit a-c.p.r.* (mod 1) *relativement à* χ_0, *il faut et il suffit que* c_h *existe pour tout* $h \in \boldsymbol{Z}$, *qu'on ait*

$$\lim_{H\to\infty} \frac{1}{H} \sum_{1\leqslant h\leqslant H} |c_h| = 0 \tag{4}$$

et qu'il existe $g \in \mathscr{G}_a$ *telle qu'on ait, pour tout* $h \in \boldsymbol{Z}$:

$$(c_h + 2i\pi h\gamma_h)\big(e(-ha)-1\big) + ih\int_{1-a}^{1} g(s)e(hs)\,ds = 0. \tag{5}$$

D'abord pour que la suite (x_n) admette une fonction de répartition (mod 1), soit χ, continue sur $[0,1]$, il faut et il suffit, d'après un théorème de N. Wiener [25] et de I. Schoenberg [20], que c_h existe pour tout $h \in \boldsymbol{Z}$ et qu'on ait (4). Alors on a, pour tout $t \in [0,1]$:

$$\chi(t) - \chi_0(t) = \sum_{|h|\geqslant 0} (\lambda_h - \gamma_h) e(-ht),$$

de sorte que la condition (1) s'écrit: pour tout $t \in [0, 1-a]$, on a

$$\sum_{|h|\geqslant 1} (\lambda_h - \gamma_h)\big(e(-ha)-1\big)e(-ht) = 0. \tag{6}$$

1° Supposons (6) satisfaite pour tout $t \in [0, 1-a]$ et posons, pour tout $t \in [1-a, 1]$:

$$g(t) = \sum_{|h|\geqslant 1} (\lambda_h - \gamma_h)\big(e(-ha)-1\big)e(-ht),$$

puis

$$G(t) = 0 \quad \text{sur} \quad [0, 1-a], \qquad G(t) = g(t) \quad \text{sur} \quad [1-a, 1].$$

La fonction G est réelle, continue et à variation bornée sur $[0,1]$, avec $G(0) = G(1) = 0$, et l'on a, pour tout $t \in [0,1]$:

$$G(t) = \sum_{|h|\geqslant 1} (\lambda_h - \gamma_h)\big(e(-ha)-1\big)e(-ht). \tag{7}$$

Mais le coefficient de $e(-ht)$ dans ce développement en série de Fourier de $G(t)$ sur $[0,1]$ est aussi

$$\int_0^1 G(s)e(hs)\,ds = \int_{1-a}^{1} g(s)e(hs)\,ds;$$

on a donc, pour tout $h \in \boldsymbol{Z}^*$:

$$(\lambda_h - \gamma_h)\big(e(-ha)-1\big) = \int_{1-a}^{1} g(s)e(hs)\,ds. \tag{8}$$

Or la fonction g est réelle, continue et à variation bornée sur $[1-a, 1]$, avec $g(1-a) = g(1) = 0$ et, puisque la série de Fourier de G est intégrable terme à terme sur $[0,1]$:

$$\int_{1-a}^{1} g(s)\,ds = \int_0^1 G(s)\,ds = \sum_{|h|\geqslant 1} (\lambda_h - \gamma_h)\big(e(-ha)-1\big)\int_0^1 e(-hs)\,ds = 0.$$

En résumé, on voit qu'il existe $g \in \mathscr{G}_a$ telle qu'on ait (8) pour tout $h \in \boldsymbol{Z}^*$.

2° Réciproquement, supposons qu'il existe $g \in \mathscr{G}_a$ telle qu'on ait (8) pour tout $h \in \boldsymbol{Z}^*$; compte tenu de $\int_{1-a}^{1} g(s)\,ds = 0$, on a alors, pour tout $t \in [0,1]$:

$$\sum_{|h|\geqslant 1} (\lambda_h - \gamma_h)\big(e(-ha)-1\big)e(-ht) = \sum_{|h|\geqslant 0} e(-ht)\int_{1-a}^{1} g(s)e(hs)\,ds,$$

et, si l'on pose $G(t) = 0$ sur $[0, 1-a]$, $G(t) = g(t)$ sur $[1-a, 1]$, de sorte que G est continue et à variation bornée sur $[0,1]$, avec $G(0) = G(1) = 0$, le second membre de la relation précédente égale

$$\sum_{|h|\geqslant 0} e(-ht)\int_0^1 G(s)e(hs)\,ds = G(t).$$

Il en résulte qu'on a (7) sur $[0,1]$, d'où (6) sur $[0, 1-a]$.

La démonstration s'achève en remarquant que, compte tenu de (3), la condition (8) posée pour tout $h \in \boldsymbol{Z}^*$ équivaut (en y remplaçant g par $g/2\pi$) à la condition (5) posée pour tout $h \in \boldsymbol{Z}$.

2.3. Si $a = 1/q$, où $q \in \boldsymbol{N}$, on dispose du

Critère 2. *Soit* $q \in \boldsymbol{N}$; *pour que la suite* (x_n) *soit* $(1/q)$*-c.p.r.* (mod 1) *relativement à* χ_0, *il faut et il suffit que* c_h *existe pour tout* $h \in \boldsymbol{Z}$, *qu'on ait*

$$\lim_{K\to\infty} \frac{1}{K} \sum_{1\leqslant k\leqslant K} |c_{kq}| = 0 \tag{9}$$

et qu'on ait, pour tout $h \in \boldsymbol{Z}\setminus q\boldsymbol{Z}$:

$$c_h = -2i\pi h\gamma_h. \tag{10}$$

Comme précédemment, pour que la suite (x_n) admette une fonction de répartition (mod 1), soit χ, continue sur $[0,1]$, il faut et il suffit que c_h existe pour tout $h\in\boldsymbol{Z}$ et qu'on ait (4).

Pour que, de plus, la condition (1) soit satisfaite, il faut et il suffit que la fonction somme de la série de Fourier de $\chi-\chi_0$ sur $[0,1]$, à savoir la fonction S définie sur $\boldsymbol{R}$ par

$$S(t)=\sum_{|h|\geqslant 0}(\lambda_h-\gamma_h)e(-ht),$$

admette la période $1/q$; donc il faut et il suffit qu'on ait, pour tout $t\in[0,1]$:

$$\sum_{|h|\geqslant 1}(\lambda_h-\gamma_h)\left(e\left(-\frac{h}{q}\right)-1\right)e(-ht)=0.$$

Mais cette condition équivaut à la suivante: pour tout $h\in\boldsymbol{Z}^*$, on a

$$(\lambda_h-\gamma_h)\left(e\left(-\frac{h}{q}\right)-1\right)=0,$$

qui, compte tenu de (3), est satisfaite si et seulement si l'on a (10) pour tout $h\in\boldsymbol{Z}\setminus q\boldsymbol{Z}$.

Enfin, compte tenu de (10), la condition (4) s'écrit

$$\frac{1}{H}\sum_{\substack{1\leqslant h\leqslant H\\ h\equiv 0 \pmod q}}|c_h|+\frac{2\pi}{H}\sum_{\substack{1\leqslant h\leqslant H\\ h\not\equiv 0 \pmod q}}h|\gamma_h|\to 0 \quad \text{quand } H\to\infty.$$

Or, d'après un théorème classique, puisque F_0 est continue et à variation bornée sur $[0,1]$, avec $F_0(0)=F_0(1)$, on a

$$\lim_{H\to\infty}\frac{1}{H}\sum_{1\leqslant h\leqslant H}h|\gamma_h|=0.$$

Posant $K=\left[\frac{H}{q}\right]$, il en résulte que la condition (4) se réduit ici à la condition (9), ce qui achève la démonstration.

Si $q=1$, la condition (10) s'évanouit; reste alors la condition (9), ici confondue avec (4), qui exprime que la suite (x_n) admet une fonction de répartition (mod 1) continue sur $[0,1]$.

On remarquera que les suites qui sont $\frac{1}{q}$-c.p.r. (mod 1) relativement à χ_0 quel que soit $q\in\boldsymbol{N}$ s'identifient aux suites qui admettent χ_0 comme fonction de répartition (mod 1).

2.4. Cas où χ_0 est la fonction identique sur $[0,1]$. Si $\chi_0(t)=t$ sur $[0,1]$, alors $\gamma_h=0$ pour tout $h\in\boldsymbol{Z}$, d'où les corollaires suivants:

CRITÈRE 1′. *Pour que la suite* (x_n) *soit* a*-c.p.r.* (mod 1), *il faut et il suffit que* c_h *existe pour tout* $h\in\boldsymbol{Z}$, *qu'on ait* (4) *et qu'il existe* $g\in\mathscr{G}_a$ *telle qu'on ait, pour tout* $h\in\boldsymbol{Z}$:

$$c_h\big(e(-ha)-1\big)+ih\int_{1-a}^{1}g(s)e(hs)\,ds=0. \tag{5′}$$

CRITÈRE 2′. *Soit* $q\in\boldsymbol{N}$; *pour que la suite* (x_n) *soit* $(1/q)$*-c.p.r.* (mod 1), *il faut et il suffit que* c_h *existe pour tout* $h\in\boldsymbol{Z}$, *qu'on ait* (9) *et qu'on ait* $c_h=0$ *pour tout* $h\in\boldsymbol{Z}\setminus q\boldsymbol{Z}$.

On remarquera que les suites qui sont $\frac{1}{q}$-c.p.r. (mod 1) quel que soit $q\in\boldsymbol{N}$ s'identifient aux suites e.r. (mod 1).

3. EXEMPLE. Soit une suite $(x_n)_{n\in\boldsymbol{Z}^+}$ telle que la suite (qx_n), où $q\in\boldsymbol{N}$, admette une fonction de répartition (mod 1) continue sur $[0,1]$, et posons

$$y_n=\frac{rn}{q}+x_{[n/q]},\quad \text{où}\quad r\in\boldsymbol{Z}^* \text{ et } (q,r)=1.$$

Calculons ici, pour $h\in\boldsymbol{Z}$ et $N\geqslant q+1$:

$$\sigma_N(y,h)=\frac{1}{N}\sum_{0\leqslant n\leqslant N-1}e\left(\frac{hrn}{q}\right)e(hx_{[n/q]}).$$

Soit M le quotient entier de $N-1$ par q:

$$Mq\leqslant N-1<(M+1)q.$$

On a alors $N\sigma_N(y,h)=A_M(h)+B_M(h)$, en posant

$$A_M(h)=\sum_{0\leqslant n\leqslant Mq-1}e\left(\frac{hrn}{q}\right)e(hx_{[n/q]}),$$

$$B_M(h)=\sum_{Mq\leqslant n\leqslant N-1}e\left(\frac{hrn}{q}\right)e(hx_{[n/q]}).$$

En évaluant la participation dans $A_M(h)$ des termes pour lesquels on a $n\equiv l \pmod q$, où $l=0,\ldots,q-1$, on obtient

$$A_M(h)=\sum_{0\leqslant l\leqslant q-1}e\left(\frac{hrl}{q}\right)\sum_{0\leqslant m\leqslant M-1}e(hx_m),$$

et d'autre part on a $|B_M(h)|\leqslant N-Mq\leqslant q$, de sorte que $\frac{B_M(h)}{N}\to 0$ quand $N\to\infty$.

1° Si $h \not\equiv 0 (\mathrm{mod}\, q)$, alors

$$A_M(h) = 0 \quad \text{et} \quad \sigma_N(y, h) = \frac{B_M(h)}{N} \to 0 \quad \text{quand } N \to \infty;$$

ainsi on a $c_h(y) = 0$ pour tout $h \in \boldsymbol{Z} \setminus q\boldsymbol{Z}$.

2° Si $h \equiv 0 (\mathrm{mod}\, q)$, soit $h = kq$, alors

$$\frac{A_M(kq)}{M} = \frac{q}{M} \sum_{0 \leqslant m \leqslant M-1} e(kqx_m) \to qc_k(qx) \quad \text{quand } M \to \infty,$$

et

$$\sigma_N(y, kq) = \frac{M}{N} \frac{A_M(kq)}{M} + \frac{B_M(kq)}{N} \to c_k(qx) \quad \text{quand } N \to \infty;$$

ainsi on a $c_{kq}(y) = c_k(qx)$ pour tout $k \in \boldsymbol{Z}$ et, puisque la suite (qx_n) admet une fonction de répartition (mod1) continue sur $[0, 1]$:

$$\lim_{K\to\infty} \frac{1}{K} \sum_{1 \leqslant k \leqslant K} |c_{kq}(y)| = \lim_{K\to\infty} \frac{1}{K} \sum_{1 \leqslant k \leqslant K} |c_k(qx)| = 0.$$

Finalement, *si la suite* (qx_n), *où* $q \in \boldsymbol{N}$, *admet une fonction de répartition* (mod1) *continue sur* $[0, 1]$, *alors la suite* $n \to \dfrac{rn}{q} + x_{[n/q]}$, *où* $r \in \boldsymbol{Z}^*$ *et* $(q, r) = 1$, *est* $\dfrac{1}{q}$*-c.p.r.* (mod1).

CHAPITRE V

HOMOMÉTRIE ET RÉPARTITION DANS Q_p OU DANS UNE EXTENSION ALGÉBRIQUE FINIE DE Q_p

1. Notations. Nous utilisons en p-adique les notations suivantes: p désigne un nombre premier, $\boldsymbol{Q}_p$ le corps des nombres p-adiques, $\boldsymbol{Z}_p$ l'anneau des entiers de $\boldsymbol{Q}_p$, $\boldsymbol{U}_p$ le groupe des unités de $\boldsymbol{Q}_p$. Dans ce chapitre V, qui concerne parfois des corps p-adiques plus vastes, K désigne une extension algébrique finie de $\boldsymbol{Q}_p$, A l'anneau des entiers de K, G le groupe des unités de K. Rappelons que K est complet, que sa valuation est discrète, que son corps des restes $\overline{K}$ est fini, et que K est localement compact; q désigne l'indice de ramification de K, et p^s le cardinal de $\overline{K}$. On note $|\ |_p$ la valeur absolue p-adique choisie telle que $|p|_p = \dfrac{1}{p}$, et on pose $v(x) = -\log_p |x|_p$ si $x \in K^*$, $v(0) = \infty$. Enfin ζ désigne une racine $(p-1)$-ième primitive de 1 dans $\boldsymbol{Q}_p$.

Soit $(x_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$ une suite de K; si $E \subset K$ et $N \in \boldsymbol{N}$, on désigne par $(N, E)_x$ le nombre des n tels que $1 \leqslant n \leqslant N$ et $x_n \in E$; dans cette notation, la lettre x sera éventuellement sous-entendue. Si E est la boule $a + p^{k/q}A$, où $a \in K$, $k \in \boldsymbol{Z}$, on pose

$$E = B_{k/q}(a) \quad \text{et} \quad (N, E)_x = \left(N, a, \frac{k}{q}\right)_x.$$

Soit M un compact de K; s'agissant de la répartition des suites de M, on utilise les abréviations indiquées ci-dessous:

(a) suites *à répartition partout dense* [r.p.d.] dans M;

(b) suites *équiréparties* [e.r.] dans M;

(c) suites *très bien réparties* [t.b.r.] dans M, lorsque M est un compact régulier.

La notion de suite t.b.r. dans un compact valué régulier a été introduite par Y. Amice [1].

2. Détermination de certaines classes d'isométries dans K.

2.1. Soit une suite $(a_k)_{k \in \boldsymbol{Z}^+}$ de K telle que $\lim\limits_{k\to\infty} |a_k|_p = 0$; on pose, pour tout $x \in A$:

$$f(x) = \sum_{k \geqslant 0} a_k x^k. \tag{1}$$

Formons, pour $x \in A$, $y \in A$:

$$f(x) - f(y) = (x - y)\Big(a_1 + \sum_{k \geqslant 2} a_k z_k\Big),$$

en posant $z_k = x^{k-1} + x^{k-2}y + \ldots + xy^{k-2} + y^{k-1}$.

Les conditions

$$a_0 \in A, \quad a_1 \in G, \quad a_k \in p^{1/q}A \quad \textit{pour } k \geqslant 2 \tag{2}$$

fournissent une classe d'isométries analytiques de A, car alors $v(a_k z_k) \geqslant \dfrac{1}{q}$ pour $k \geqslant 2$, de sorte qu'on a

$$v\big(f(x) - f(y)\big) = v(x - y) \quad \text{pour} \quad x \in A,\ y \in A.$$

En particulier, plus précisément, on voit aussitôt que les conditions $a_0 \in A$, $a_1 \in G$ caractérisent les isométries du premier degré de A, et que *les conditions $a_0 \in A$, $a_1 \in G$, $a_2 \in p^{1/q}A$ caractérisent les isométries du second degré de A.*

2.2. Soit une suite $(a_k)_{k \in \boldsymbol{Z}^+}$ de K telle que $|a_k|_p = o(p^{k/q})$ quand $k \to \infty$; on pose (1) pour tout $x \in p^{1/q}A$. On déduit aussitôt de la propriété précédente par homothétie que *les conditions*

$$a_0 \in p^{1/q}A, \quad a_1 \in G, \quad a_k \in p^{(2-k)/q}A \quad \textit{pour} \quad k \geqslant 2 \tag{3}$$

fournissent une classe d'isométries analytiques de $p^{1/q}A$.

2.3. Soit f définie par (1) pour tout $x \in A$, et appelons boules maximales de A les p^s boules distinctes $a+p^{1/q}A$, où $a \in A$.

Les conditions

$$(4) \qquad a_1 \in G, \quad a_k \in A \text{ si } p \mid k, \quad a_k \in p^{1/q}A \text{ si } p \nmid k \text{ et } k \neq 1$$

fournissent une classe d'applications isométriques par boules maximales de A dans A.

En effet, z_k se met sous la forme $z_k = kx^{k-1}+(x-y)t_k$, où $t_k \in A$; si l'on suppose $x-y \in p^{1/q}A$, alors on a, pour $k \geqslant 2$:

$$v(a_k z_k) > v(a_k) \geqslant 0 \text{ si } p \mid k, \quad v(a_k z_k) \geqslant v(a_k) > 0 \text{ si } p \nmid k,$$

d'où $v(f(x)-f(y)) = v(x-y)$ pour $x \in A,\ y \in A,\ x-y \in p^{1/q}A$.

2.4. Soit une suite $(a_k)_{k \in \mathbf{Z}}$ de K telle que $\lim\limits_{|k|\to\infty} |a_k|_p = 0$; on pose, pour tout $x \in G$:

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} a_k x^k.$$

Les conditions suivantes: *il existe $m \in \mathbf{Z}\setminus p\mathbf{Z}$ tel que*

$$(5) \qquad a_m \in G, \quad a_k \in p^{1/q}A \quad \text{pour} \quad k \neq m$$

fournissent une classe d'applications isométriques par boules maximales de G dans G.

En effet, formons, pour $x \in G,\ y \in G$:

$$f(x)-f(y) = (x-y)\Big(-\sum_{k\geqslant 1} \frac{a_{-k}z_k}{x^k y^k} + \sum_{k \geqslant 1} a_k z_k\Big),$$

en posant $z_1 = 1$ et comme plus haut $z_k = x^{k-1}+x^{k-2}y+\ldots+xy^{k-2}+y^{k-1}$ pour $k \geqslant 2$, de sorte que $z_k = kx^{k-1}+(x-y)t_k$, où $t_k \in A$; si l'on suppose $x-y \in p^{1/q}A$, alors on a, pour $k \geqslant 1$:

$$v(z_k) = 0 \text{ si } p \nmid k, \quad v(z_k) > 0 \text{ si } p \mid k.$$

Posant $u_k = a_k z_k$ et $u_{-k} = -\dfrac{a_{-k}z_k}{x^k y^k}$ pour $k \geqslant 1$, on a alors, pour $n \neq 0$:

$$v(u_n) = v(a_n) \text{ si } p \nmid n, \quad v(u_n) > v(a_n) \text{ si } p \mid n.$$

Les condition (5) entraînent $v(u_m) = v(a_m) = 0$ et $v(u_n) \geqslant v(a_n) > 0$ pour $n \neq 0,\ n \neq m$, de sorte que $\sum\limits_{n\neq 0} u_n \in G$ et l'on a

$$v(f(x)-f(y)) = v(x-y) \quad \text{pour} \quad x \in G,\ y \in G,\ x-y \in p^{1/q}A.$$

3. Caractérisation de certaines classes d'isométries dans Q_p.

3.1. Soit

$$f(x) = a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3, \quad \text{où} \quad x \in \mathbf{Z}_p,\ a_i \in \mathbf{Z}_p \text{ pour } i = 0,1,2,3.$$

Pour que f soit une isométrie de $\mathbf{Z}_p$, il faut et il suffit qu'on ait, pour tout $x \in \mathbf{Z}_p$, pour tout $y \in \mathbf{Z}_p$:

$$a_1+a_2(x+y)+a_3(x^2+xy+y^2) \in \mathbf{U}_p,$$

c'est-à-dire encore, si a_i désigne un représentant de la classe modulo p de a_i, qu'on ait, quels que soient $k, h = 0, 1, \ldots, p-1$:

$$(6) \qquad a_1+a_2(k+h)+a_3(k^2+kh+h^2) \not\equiv 0 \pmod p.$$

Toutes les congruences et incongruences qu'on va écrire s'entendront modulo p.

1° Si $a_3 \equiv 0$, les conditions (6) s'écrivent $a_1+a_2 l \not\equiv 0$ quel que soit $l = 0, 1, \ldots, p-1$, et on voit aussitôt qu'elles sont satisfaites si et seulement si $a_1 \not\equiv 0$ et $a_2 \equiv 0$.

2° Si $a_3 \not\equiv 0$, supposons $p \neq 2$, de sorte que $(4a_3, p) = 1$; alors, multipliant par $4a_3$, les (6) équivalent à

$$(2a_3k+a_3h+a_2)^2 \not\equiv a_2^2-4a_1a_3-2a_2a_3h-3a_3^2h^2$$

quels que soient $k, h = 0, 1, \ldots, p-1$. Mais, h étant fixé, $2a_3k+a_3h+a_2$ décrit un système complet de résidus modulo p, de sorte que les conditions précédentes équivalent à

$$(6') \qquad 3a_3^2h^2+2a_2a_3h+4a_1a_3-a_2^2+l^2 \not\equiv 0$$

quels que soient $h, l = 0, 1, \ldots, p-1$. Supposons de plus $p \neq 3$; alors, multipliant par 3, les (6′) équivalent à

$$(3a_3h+a_2)^2 \not\equiv 4a_2^2-12a_1a_3-3l^2$$

quels que soient $h, l = 0, 1, \ldots, p-1$. Mais, l étant fixé, $3a_3h+a_2$ décrit un système complet de résidus modulo p, de sorte que les conditions précédentes équivalent à

$$(6'') \qquad 4a_2^2-12a_1a_3 \not\equiv j^2+3l^2$$

quels que soient $j, l = 0, 1, \ldots, (p-1)/2$.

Soit $\mathscr{R}$ l'ensemble des résidus quadratiques de p, soit $\mathscr{N}$ l'ensemble des non résidus quadratiques de p.

Si $3 \in \mathscr{N}$, alors j^2 décrit $\mathscr{R}^+ = \mathscr{R} \cup \{0\}$ et $3l^2$ décrit $\mathscr{N}^+ = \mathscr{N} \cup \{0\}$; il est clair que j^2+3l^2 décrit l'ensemble de toutes les classes modulo p.

Si $3 \in \mathscr{R}$, alors j^2 décrit $\mathscr{R}^+$ et $3l^2$ décrit aussi $\mathscr{R}^+$; dans ces conditions, j^2+3l^2 décrit encore l'ensemble de toutes les classes modulo p, car, quel que soit l'ensemble E de $(p+1)/2$ classes modulo p toutes distinctes, où $p\neq 2$, on a $E+E=\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}$.

Ainsi, dans tous les cas, les conditions (6″) ne sont satisfaites pour aucun triplet (a_1, a_2, a_3), de sorte que le cas envisagé au 2° ne donne aucune isométrie de $\boldsymbol{Z}_p$, si $p>3$. Il est facile de s'assurer directement qu'il n'en donne aucune non plus si $p=2$. Finalement:

Si $p\neq 3$, les conditions $a_0\in\boldsymbol{Z}_p$, $a_1\in\boldsymbol{U}_p$, $a_2\in p\boldsymbol{Z}_p$, $a_3\in p\boldsymbol{Z}_p$ caractérisent les isométries du troisième degré de $\boldsymbol{Z}_p$ à coefficients dans $\boldsymbol{Z}_p$.

Si $p=3$, l'étude directe montre que le cas envisagé au 2° ajoute, aux isométries du troisième degré de $\boldsymbol{Z}_3$ obtenues d'abord, celles, et celles-là seulement, qui sont fournies par les conditions $a_0\in\boldsymbol{Z}_3$, $a_1\in h+3\boldsymbol{Z}_3$, $a_2\in 3\boldsymbol{Z}_3$, $a_3\in h+3\boldsymbol{Z}_3$, où $h=1,2$.

3.2. Soit

$$f(x)=a_0+a_1x+bx^{p^m},\quad \text{où}\quad x\in\boldsymbol{Z}_p;\ a_0,\ a_1,\ b\in\boldsymbol{Q}_p;\ m\in\boldsymbol{N}.$$

Supposons satisfaites les conditions suffisantes (4), qui s'écrivent ici $a_0\in\boldsymbol{Z}_p$, $a_1\in\boldsymbol{U}_p$, $b\in\boldsymbol{Z}_p$. D'après Fermat, on a $x^{p^m}\in x+p\boldsymbol{Z}_p$, de sorte que $f(x)\in a_0+(a_1+b)x+p\boldsymbol{Z}_p$ pour tout $x\in\boldsymbol{Z}_p$.

Si $a_1+b\in p\boldsymbol{Z}_p$, alors f applique isométriquement chaque boule maximale de $\boldsymbol{Z}_p$ sur la boule $a_0+p\boldsymbol{Z}_p$.

Si $a_1+b\in\boldsymbol{U}_p$, alors f opère une permutation sur l'ensemble des boules maximales de $\boldsymbol{Z}_p$, et f est une isométrie de $\boldsymbol{Z}_p$. Ainsi les conditions $a_0\in\boldsymbol{Z}_p$, $a_1\in\boldsymbol{U}_p$, $a_1+b\in\boldsymbol{U}_p$ sont suffisantes pour que f soit une isométrie de $\boldsymbol{Z}_p$. Elles sont aussi nécessaires, car, si f est une isométrie de $\boldsymbol{Z}_p$, la fonction polynomiale g, définie sur $\boldsymbol{Z}_p$ par $f(x)-a_0=xg(x)$, prend ses valeurs dans $\boldsymbol{U}_p$, et l'on a

$$f(0)=a_0\in\boldsymbol{Z}_p,\qquad g(0)=a_1\in\boldsymbol{U}_p,\qquad g(1)=a_1+b\in\boldsymbol{U}_p.$$

Finalement:

Les conditions $a_0\in\boldsymbol{Z}_p$, $a_1\in\boldsymbol{U}_p$, $a_1+b\in\boldsymbol{U}_p$ caractérisent les isométries de $\boldsymbol{Z}_p$ de la forme $x\to a_0+a_1x+bx^{p^m}$, où $m\in\boldsymbol{N}$.

3.3. Soit $f(x)=x^m$, où $x\in\boldsymbol{U}_p$, $m\in\boldsymbol{Z}$. D'après les (5), si $(m,p)=1$, alors f est une application isométrique par boules maximales de $\boldsymbol{U}_p$ dans $\boldsymbol{U}_p$. Si de plus le nombre $\dfrac{p-1}{(m,p-1)}$ des résidus modulo p de degré $|m|$ atteint son maximum $p-1$, c'est-à-dire si $(m,p-1)=1$, alors f opère une permutation sur l'ensemble des boules maximales de $\boldsymbol{U}_p$, et f est une isométrie de $\boldsymbol{U}_p$.

Posons

$$E_p=\{k\in\boldsymbol{Z}^*\mid (k,p)=(k,p-1)=1\}.$$

La condition $m\in E_p$, suffisante pour que f soit une isométrie de $\boldsymbol{U}_p$, est aussi nécessaire, car, si f est une isométrie de $\boldsymbol{U}_p$, d'abord il existe $p-1$ résidus modulo p de degré $|m|$, de sorte que $(m,p-1)=1$; d'autre part, on a

$$x^m-y^m=(x-y)z_m=(x-y)\big(mx^{m-1}+(x-y)t_m\big)\quad \text{pour}\quad x\in\boldsymbol{U}_p,\ y\in\boldsymbol{U}_p,$$

où $t_m\in\boldsymbol{Z}_p$, d'où, si de plus $x-y\in p\boldsymbol{Z}_p$:

$$v(x^m-y^m)\geqslant v(x-y)+\min\big(v(m),1\big),$$

et, puisque le premier membre est égal à $v(x-y)$, cela exige $v(m)=0$, c'est-à-dire $(m,p)=1$.

Ainsi $x\to x^m$, où $m\in\boldsymbol{Z}$, est une isométrie de $\boldsymbol{U}_p$ si et seulement si $m\in E_p$.

Il en résulte que, si $m\in E_p$, la fonction f est univalente sur $\boldsymbol{U}_p$; elle admet alors une fonction réciproque, qui est elle aussi une isométrie de $\boldsymbol{U}_p$. Donc, si $m\in E_p$, tout $x\in\boldsymbol{U}_p$ admet une seule racine m-ième dans $\boldsymbol{U}_p$, qu'on notera $x^{1/m}$, et *$x\to x^{1/m}$, où $m\in E_p$, est une isométrie de $\boldsymbol{U}_p$.*

4. Exemples d'applications isométriques ou homométriques dans $\boldsymbol{Q}_p$. On s'intéresse ici aux fonctions non polynomiales. On suppose $p\neq 2$ (sauf dans 4.1), et on pose $B_{h,k}=hp^k+p^{k+1}\boldsymbol{Z}_p$, où $h=1,\dots,p-1$ et $k\in\boldsymbol{Z}$.

4.1. (a) $x\to x|x|_p$ est une application homométrique de $B_{h,k}$ sur $h+p\boldsymbol{Z}_p$.

(b) $x\to x^m|x|_p^{m-1}$, où $m\in E_p$, prolongée par continuité à l'origine, est une isométrie de $\boldsymbol{Z}_p$.

4.2. (a) Soit

$$\exp x-1=\sum_{k\geqslant 1}\frac{x^k}{k!},$$

série convergente sur $p\boldsymbol{Z}_p$; on a $a_0=0$, $a_1=1$ et pour $k\geqslant 2$:

$$v(a_k)=-v(k!)\geqslant\frac{1-k}{p-1}>1-k,$$

d'où $v(a_k)\geqslant 2-k$; donc $x\to\exp x$ est une application isométrique de $p\boldsymbol{Z}_p$ sur $1+p\boldsymbol{Z}_p$.

(b) On voit de même que $x\to x\exp x$ est une isométrie de $p\boldsymbol{Z}_p$.

4.3. (a) La fonction logarithmique, définie sur $1+p\boldsymbol{Z}_p$ comme fonction réciproque de la fonction exponentielle, peut être prolongée de manière assez naturelle sur $\boldsymbol{Q}_p^*$. On sait qu'à tout $x\in\boldsymbol{U}_p$ est associée une racine $(p-1)$-ième de 1, bien déterminée, qui sera notée ζ_x, telle que $\zeta_x x\in 1+p\boldsymbol{Z}_p$. Dès lors, la fonction F définie sur $\boldsymbol{Q}_p^*$ par

$$F(x)=\log\zeta_{x|x|_p}x|x|_p$$

vérifie la relation fonctionnelle $F(x)+F(y) = F(xy)$; elle fournit donc *un prolongement de la fonction logarithmique sur* $\boldsymbol{Q}_p^*$, dont les zéros sont les nombres $\zeta^h p^k$, où $h = 1, \ldots, p-1$ et $k \in \boldsymbol{Z}$. C'est cette fonction prolongée qu'en p-adique nous noterons log désormais.

Si $x, y \in B_{h,k}$, on a, puisque $x/y \in 1+p\boldsymbol{Z}_p$:

$$v(\log x - \log y) = v\left(\log \frac{x}{y}\right) = v\left(\frac{x}{y} - 1\right) = v(x-y)-k;$$

donc $x \to \log x$ est une application homométrique de $B_{h,k}$ sur $p\boldsymbol{Z}_p$.

(b) Il existe une application homométrique de $B_{h,k}$ sur $p\boldsymbol{Z}_p$ qui transforme x en $\log x$, et, d'après 4.2 (b), il existe une isométrie de $p\boldsymbol{Z}_p$ qui transforme $\log x$ en

$$\log x \exp \log x = \zeta_{x|x|_p} x |x|_p \log x.$$

Or, quand x parcourt $B_{h,k}$, d'abord $\zeta_{x|x|_p}$ est constant dans $\boldsymbol{U}_p$ et $|x|_p = p^{-k}$ est aussi constant; donc il existe une application homométrique de $p\boldsymbol{Z}_p$ sur $p^{k+1}\boldsymbol{Z}_p$ qui transforme $\log x \exp \log x$ en $x \log x$. Finalement $x \to x\log x$ est une application isométrique de $B_{h,k}$ sur $p^{k+1}\boldsymbol{Z}_p$.

(c) Soit $a \in \boldsymbol{U}_p - 1$ et soit

$$ax + \log(1+x) = (a+1)x + \sum_{k \geqslant 2} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k},$$

série convergente sur $p\boldsymbol{Z}_p$; on a $a_0 = 0$, $a_1 = a+1 \in \boldsymbol{U}_p$ et $v(a_k) = -v(k)$ pour $k \geqslant 2$; la condition $-v(k) \geqslant 2-k$ est vérifiée pour $k = 2$ et pour $k = 3$, et elle l'est aussi pour $k \geqslant 4$, car alors on a $\log k < k-2$, de sorte que

$$-v(k) \geqslant -\frac{\log k}{\log p} > -\log k > 2-k.$$

Ainsi $x \to ax + \log(1+x)$, où $a \in \boldsymbol{U}_p - 1$, est une isométrie de $p\boldsymbol{Z}_p$.

4.4. Soit $a \in \boldsymbol{U}_p$ et soit

$$(1+x)^a - 1 = \sum_{k \geqslant 1} \binom{a}{k} x^k,$$

série convergente sur $p\boldsymbol{Z}_p$; on a $a_0 = 0$, $a_1 = a \in \boldsymbol{U}_p$ et pour $k \geqslant 2$:

$$v(a_k) = v\left(\binom{a}{k}\right) \geqslant -v(k!),$$

d'où, on l'a vu, $v(a_k) \geqslant 2-k$; donc $x \to x^a$, où $a \in \boldsymbol{U}_p$, est une isométrie de $1+p\boldsymbol{Z}_p$.

4.5 (a) Soit $a \in 1+p\boldsymbol{U}_p$, de sorte que $v(\log a) = v(a-1) = 1$. Il existe une application homométrique de $\boldsymbol{Z}_p$ sur $p\boldsymbol{Z}_p$ qui transforme x en $x\log a$, et, d'après 4.2 (a), il existe une application isométrique de $p\boldsymbol{Z}_p$ sur $1+p\boldsymbol{Z}_p$ qui transforme $x\log a$ en $\exp(x\log a) = a^x$; donc $x \to a^x$, où $a \in 1+p\boldsymbol{U}_p$, est une application homométrique de $\boldsymbol{Z}_p$ sur $1+p\boldsymbol{Z}_p$.

(b) On voit de même, en utilisant 4.2 (b), que $x \to xa^x$, où $a \in 1+p\boldsymbol{U}_p$, est une isométrie de $\boldsymbol{Z}_p$.

(c) On voit de même, en utilisant 4.3 (b), que $x \to x^x$ est une isométrie de $1+p\boldsymbol{Z}_p$.

4.6. Définissant $\sin x$ et $\cos x$ à l'aide des séries entières habituelles, ici convergentes sur $p\boldsymbol{Z}_p$, et utilisant les conditions suffisantes (3), on obtient:

(a) $x \to \sin x$ est une isométrie de $p\boldsymbol{Z}_p$;

(b) $x \to x\cos x$ est une isométrie de $p\boldsymbol{Z}_p$;

(c) $x \to \operatorname{tg} x$ est une isométrie de $p\boldsymbol{Z}_p$, car, si $x, y \in p\boldsymbol{Z}_p$, on a

$$v(\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y) = v\left(\frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y}\right) = v\big(\sin(x-y)\big) = v(x-y).$$

5. Répartition dans A de certaines suites polynomiales à coefficients dans A.

5.1. Considérons d'abord les suites $n \to x_n = a_0 + a_1 n + a_2 n^2$, où $a_0, a_1, a_2 \in \boldsymbol{Z}_p$; supposons $p \neq 2$ et soit α_i un représentant de la classe modulo p de a_i. Soit d'autre part $h = 0, 1, \ldots, p-1$, et considérons la congruence

$$\alpha_0 + \alpha_1 n + \alpha_2 n^2 \equiv h \pmod{p},$$

qui exprime que $x_n \in B_1(h)$. Si $\alpha_2 \not\equiv 0 \pmod{p}$, alors $(4\alpha_2, p) = 1$ et cette congruence équivaut à

$$(2\alpha_2 n + \alpha_1)^2 \equiv 2\alpha_2 h + \alpha_1^2 - 4\alpha_0\alpha_1 \pmod{p}.$$

Quand n parcourt $\boldsymbol{N}$, alors $(2\alpha_2 n + \alpha_1)^2$ décrit $\mathscr{R}^+$ (pour cette notation, cf. 3.1); il existe donc h tel que cette dernière congruence n'admette aucune solution, donc tel que $(N, h, 1)_x = 0$ pour tout $N \in \boldsymbol{N}$.

Il en résulte que, si la suite (x_n) est r.p.d. dans $\boldsymbol{Z}_p$, alors $a_2 \in p\boldsymbol{Z}_p$, et dès lors $a_1 \in \boldsymbol{U}_p$, sinon cette suite serait répartie dans $a_0 + p\boldsymbol{Z}_p$.

Mais les conditions $a_1 \in \boldsymbol{U}_p$, $a_2 \in p\boldsymbol{Z}_p$ sont suffisantes pour que $t \to a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ soit une isométrie de $\boldsymbol{Z}_p$, donc pour que la suite (x_n) soit t.b.r. dans $\boldsymbol{Z}_p$. Finalement:

Si $p \neq 2$, les conditions $a_0 \in \boldsymbol{Z}_p$, $a_1 \in \boldsymbol{U}_p$, $a_2 \in p\boldsymbol{Z}_p$ caractérisent à la fois les suites du second degré en n, à coefficients dans $\boldsymbol{Z}_p$, qui sont (a) *ou bien r.p.d. dans $\boldsymbol{Z}_p$,* (b) *ou bien e.r. dans $\boldsymbol{Z}_p$,* (c) *ou bien t.b.r. dans $\boldsymbol{Z}_p$.*

On va voir que l'équivalence entre ces trois modes de répartition est, en p-adique, une circonstance assez remarquable.

5.2. Envisageons maintenant l'extension algébrique finie K de $\boldsymbol{Q}_p$, et soit $\omega = (\omega_0, \ldots, \omega_{s-1})$ une base de $\bar{K}$ considéré comme espace vectoriel de dimension s sur le corps $\boldsymbol{Z}/p\boldsymbol{Z}$ des entiers modulo p.

A tout $n \in \boldsymbol{N}$ on associe les $c_l(n)$, où $l \in \boldsymbol{Z}^+$, définis par

$$n = \sum_{l \geqslant 0} c_l(n) p^l \quad \text{où} \quad 0 \leqslant c_l(n) \leqslant p-1 \quad \text{pour tout } l \in \boldsymbol{Z}^+,$$

c'est-à-dire qu'on écrit n dans le système de numération à base p, et on construit la suite (u_n) de A, dite *suite associée à la base ω de $\bar{K}$*, en posant

$$u_n = \sum_{l \geqslant 0} c_l(n)\, \omega_{s\langle\frac{l}{s}\rangle}\, p^{\frac{1}{q}\left[\frac{l}{s}\right]}.$$

Par construction même, *la suite (u_n) est t.b.r. dans A*. Quel que soit $k \in \boldsymbol{N}$, les ks premiers „chiffres" de $n+p^{ks}$ sont respectivement égaux aux ks premiers „chiffres" de n:

$$c_l(n+p^{ks}) = c_l(n) \quad \text{pour } l = 0, 1, \ldots, ks-1, \text{ pour } n, k \in \boldsymbol{N}.$$

On en déduit aussitôt que $u_{n+p^{ks}} \in u_n + p^{k/q}A$ et plus généralement, en élevant à la puissance $j \in \boldsymbol{N}$:

$$u^j_{n+p^{ks}} \in u^j_n + p^{k/q}A \quad \text{pour} \quad n, k, j \in \boldsymbol{N}.$$

Soit alors $f(X) = \sum_{0 \leqslant j \leqslant m} a_j X^j$ un polynôme formel en X à coefficients dans A.

1° On a

$$f(u_{n+p^{ks}}) = \sum_{0 \leqslant j \leqslant m} a_j u^j_{n+p^{ks}} \in f(u_n) + p^{k/q}A,$$

d'où, quels que soit $a \in A$, $n \in \boldsymbol{N}$, $k \in \boldsymbol{N}$:

$$f(u_n) \in a + p^{k/q}A \Leftrightarrow f(u_{n+p^{ks}}) \in a + p^{k/q}A.$$

On en tire immédiatement

$$\left(Hp^{ks}, a, \frac{k}{q}\right)_{f \circ u} = H\left(p^{ks}, a, \frac{k}{q}\right)_{f \circ u} \quad \text{pour} \quad a \in A,\ H \in \boldsymbol{N},\ k \in \boldsymbol{N}.$$

Dès lors, pour que la suite $(f(u_n))$ soit t.b.r. dans A, il faut et il suffit que l'on ait

$$\left(p^{ks}, a, \frac{k}{q}\right)_{f \circ u} = 1 \quad \text{pour tout } a \in A, \text{ pour tout } k \in \boldsymbol{N}.$$

2° Soit $N \in \boldsymbol{N}$ et posons $H = \left[\dfrac{N}{p^{ks}}\right]$, de sorte que $Hp^{ks} \leqslant N < (H+1)p^{ks}$. On a alors

$$H\left(p^{ks}, a, \frac{k}{q}\right)_{f \circ u} \leqslant \left(N, a, \frac{k}{q}\right)_{f \circ u} \leqslant (H+1)\left(p^{ks}, a, \frac{k}{q}\right)_{f \circ u},$$

d'où l'on tire, quels que soient $a \in A$, $k \in \boldsymbol{N}$:

$$\lim_{N \to \infty} \left(N, a, \frac{k}{q}\right)_{f \circ u} = \infty \Leftrightarrow \left(p^{ks}, a, \frac{k}{q}\right)_{f \circ u} \geqslant 1.$$

Dès lors, pour que le suite $(f(u_n))$ soit r.p.d. dans A, il faut et il suffit que l'on ait

$$\left(p^{ks}, a, \frac{k}{q}\right)_{f \circ u} \geqslant 1 \quad \text{pour tout } a \in A, \text{ pour tout } k \in \boldsymbol{N},$$

et cette condition équivaut évidemment à celle qu'on a obtenue à la fin du 1°.

Posant, pour tout $k \in \boldsymbol{N}$:

$$C_k = \Big\{ \sum_{0 \leqslant j \leqslant k-1} \sum_{0 \leqslant i \leqslant s-1} h_{i,j}\, \omega_i\, p^{j/q} \Big\}_{h_{i,j} = 0, 1, \ldots, p-1},$$

on obtient finalement le

THÉORÈME. *Soit K une extension algébrique finie de $\boldsymbol{Q}_p$ et soit $(u_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$ la suite associée à une base ω du corps des restes de K; pour une suite polynomiale en u_n à coefficients dans l'anneau A des entiers de K, soit $(f(u_n))_{n \in \boldsymbol{N}}$, les trois propriétés* (a) *être r.p.d. dans A*, (b) *être e.r. dans A*, (c) *être t.b.r. dans A, sont équivalentes, et pour que cette suite les possède, il faut et il suffit que, pour tout $a \in C_k$, pour tout $k \in \boldsymbol{N}$, on ait*

$$\left(p^{ks}, a, \frac{k}{q}\right)_{f \circ u} = 1. \tag{7}$$

Si $K = \boldsymbol{Q}_p$, alors $A = \boldsymbol{Z}_p$, $q = s = 1$; prenant $\omega_0 = 1$, on a $u_n = n$, $f \circ u = f$, $C_k = \{0, 1, \ldots, p^k - 1\}$, et on obtient le

COROLLAIRE. *Pour une suite polynomiale en n à coefficient dans $\boldsymbol{Z}_p$, soit $(f(n))_{n \in \boldsymbol{N}}$, les trois propriétés* (a) *être r.p.d. dans $\boldsymbol{Z}_p$*, (b) *être e.r. dans $\boldsymbol{Z}_p$*, (c) *être t.b.r. dans $\boldsymbol{Z}_p$, sont équivalentes, et pour que cette suite les possède, il faut et il suffit que, pour tout $h = 0, 1, \ldots, p^k - 1$, pour tout $k \in \boldsymbol{N}$, on ait*

$$(p^k, h, k)_f = 1. \tag{7'}$$

6. Exemples de très bonne répartition ou d'équirépartition dans des compacts réguliers de Q_p.

6.1. Les applications isométriques qui ont été signalées fournissent immédiatement des suites t.b.r. dans des compacts réguliers de Q_p. Nous nous contentons d'en donner quelques exemples dans le tableau ci-dessous, où l'on s'intéresse aux suites non polynomiales en n, et où ν_n désigne le n-ième entier naturel non divisible par p.

Les suites $n \to$	où	sont t.b.r. dans
$\nu_n^m,\ \nu_n^{1/m}$	$m \in E_p$	U_p
$n^m\lvert n\rvert_p^{m-1},\ n^{1/m}\lvert n\rvert_p^{1/m-1}$	$m \in E_p$	Z_p
$\exp pn$	$p \neq 2$	$1+pZ_p$
$n\exp pn,\ n\cos pn$	$p \neq 2$	Z_p
$\sin pn,\ \mathrm{tg}\, pn$	$p \neq 2$	pZ_p
$\log(a+pn),\ (a+pn)\log(a+pn)$	$a \in U_p,\ p \neq 2$	pZ_p
$apn+\log(1+pn)$	$a \in U_p-1,\ p \neq 2$	pZ_p
$(1+pn)^a$	$a \in U_p,\ p \neq 2$	$1+pZ_p$
a^n	$a \in 1+pU_p,\ p \neq 2$	$1+pZ_p$
$(a_0+a_1 n)\,a^n$	$a \in 1+pU_p,\ a_0 \in Z_p,\ a_1 \in U_p,\ p \neq 2$	Z_p
$(1+pn)^{1+pn}$		$1+pZ_p$

La justification indiquée pour le dernier résultat de ce tableau suppose $p \neq 2$; mais on peut s'assurer directement que la suite $n \to \frac{1}{2}\big((1+2n)^{1+2n}-1\big)$ est t.b.r. dans Z_2, en développant et montrant que, quel que soit $k \in N$, ses 2^k premiers termes sont respectivement répartis dans les mêmes classes modulo 2^k que les 2^k premiers termes d'une certaine suite polynomiale en n, soit $\big(f_k(n)\big)$, t.b.r. dans Z_2.

6.2. De même, certaines applications homométriques permettent de construire facilement des suites qui sont e.r. dans certains compacts réguliers de Q_p sans y être t.b.r.; en voici quelques exemples:

Les suites $n \to$	où	sont e.r. dans
$(n\lvert n\rvert_p)^m,\ (n\lvert n\rvert_p)^{1/m}$	$m \in E_p$	U_p
$\log \nu_n,\ \nu_n \log \nu_n$	$p \neq 2$	pZ_p
$\log n,\ n\lvert n\rvert_p \log n$	$p \neq 2$	pZ_p

Mais, supposant $p \neq 2$, la suite $(n\log n)$ n'est pas e.r. dans pZ_p; pour la suite homothétique $(x_n) = \left(\dfrac{n\log n}{p}\right)$, on trouve, pour $\gamma \in Z_p$, k entier $> v(\gamma)$:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{(N,\gamma,k)_x}{N} = \frac{(p-1)\big(v(\gamma)+1\big)}{p^{k+1}},$$

de sorte que la suite (x_n) admet en tout point $\gamma \in Z_p$ une densité de répartition dans Z_p (cf. VIII-2.1):

$$\varrho(\gamma) = \frac{(p-1)\big(v(\gamma)+1\big)}{p}.$$

7. Quelques suites remarquables de U_p ou de Z_p. Introduisons encore quelques notations. Si $x \in U_p$, on désigne par $\zeta_{(x)}$ la racine $(p-1)$-ième de 1 qui appartient à la boule $x+pZ_p$, de sorte que $\zeta_{(1)} = 1$ et $\zeta_x\zeta_{(x)} = 1$. Si z est une racine $(p-1)$-ième quelconque de 1, on désigne par $\mathscr{G}(z)$ le groupe cyclique engendré multiplicativement par z; son ordre est donc un diviseur de $p-1$; on a $\mathscr{G}(\zeta_x) = \mathscr{G}(\zeta_{(x)})$ pour $x \in U_p$, et $\mathscr{G}(\zeta)$ est le groupe des racines $(p-1)$-ièmes de 1.

On suppose $p \neq 2$.

7.1. On peut résumer de la manière suivante les résultats obtenus par Y. Amice [1] concernant la répartition de la suite (a^n):

Si $p \neq 2$, pour la suite (a^n), où $a \in Q_p$, les trois propriétés (a) *être r.p.d. dans U_p,* (b) *être e.r. dans U_p,* (c) *être t.b.r. dans U_p, sont équivalentes, et pour que cette suite les possède, il faut et il suffit que $a \in \zeta + pU_p$.*

Plus généralement, si $a \in \zeta_{(h)} + p^k U_p$, où $h = 1, 2, \ldots, p-1$ et $k \in N$, alors la suite (a^n) est t.b.r. dans

$$\bigcup_{1 \leqslant l \leqslant p-1} (\zeta_{(h)}^l + p^k Z_p) = \mathscr{G}(\zeta_h) + p^k Z_p;$$

autrement dit, puisque $k = v(\zeta_a a - 1)$, on a:

Si $p \neq 2$, la suite (a^n), où $a \in U_p \diagdown \mathscr{G}(\zeta)$, est t.b.r. dans $\mathscr{G}(\zeta_a) + p^{v(\zeta_a a-1)} Z_p$.

7.2. Soit $x_n = (a_0 + a_1 n)\,a^n$, où $a \in \zeta + pU_p$, $a_0 \in U_p$, $a_1 \in pU_p$; la suite (x_n) est répartie dans U_p.

1° Prenons $\gamma \in U_p$, $k \in N$, $H \in Z^+$, et calculons le nombre $\big(H(p-1)p^{k-1}, \gamma, k\big)_x$ des n tels qu'on ait à la fois

$$1 \leqslant n \leqslant H(p-1)p^{k-1} \tag{8}$$

et

$$(a_0 + a_1 n)\,\zeta^n \exp(n \log a) \in \gamma + p^k Z_p. \tag{9}$$

Pour que la condition (9) soit satisfaite, il faut et il suffit qu'on ait à la fois

$$\zeta^n = \zeta_{(\gamma)}\zeta_{a_0} \tag{9'}$$

et

(9″) $$(a_0\zeta_{a_0}+a_1\zeta_{a_0}n)\exp(n\log a)\in\gamma\zeta_\gamma+p^k\boldsymbol{Z}_p.$$

La condition (9′) exprime qu'il existe $n_\gamma = 1, 2, \ldots, p-1$ et $m\in\boldsymbol{Z}$ tels que

$$n = n_\gamma+(m-1)(p-1),$$

et on s'assure sans peine que la condition (8) équivaut alors à

$$1\leqslant m\leqslant Hp^{k-1}.$$

D'autre part la condition (9″) équivaut à

$$\log\left(1+\frac{a_1n}{a_0}\right)+n\log a\in\log\frac{\gamma}{a_0}+p^k\boldsymbol{Z}_p,$$

c'est-à-dire encore

$$u_m\in\log\frac{\gamma}{a_0}+p^k\boldsymbol{Z}_p,$$

en posant

$$y_m = \frac{a_1}{a_0}\big(n_\gamma+(m-1)(p-1)\big)\quad\text{ et }\quad u_m = \log(1+y_m)+\frac{a_0\log a}{a_1}y_m.$$

On a donc, quels que soient $\gamma\in\boldsymbol{U}_p$, $k\in\boldsymbol{N}$, $H\in\boldsymbol{Z}^+$:

(10) $$\big(H(p-1)p^{k-1},\gamma,k\big)_x = \left(Hp^{k-1},\log\frac{\gamma}{a_0},k\right)_u.$$

2° Dès lors, si $a_0\log a/a_1\in\boldsymbol{U}_p-1$, c'est-à-dire si $a\in\zeta\exp(-a_1/a_0)+p\boldsymbol{U}_p$, on sait (cf. 4.3 (c)) que $y\to\log(1+y)+(a_0\log a/a_1)y$ est une isométrie de $p\boldsymbol{Z}_p$; puisque la suite (y_m) est t.b.r. dans $p\boldsymbol{Z}_p$, la suite (u_m) l'est aussi, et le second membre de (10) égale H. On a donc, pour tout $\gamma\in U_p$, pour tout $k\in\boldsymbol{N}$, pour tout $H\in\boldsymbol{Z}^+$:

$$\big(H(p-1)p^{k-1},\gamma,k\big)_x = H,$$

d'où le résultat suivant:

Si $p\neq 2$, la suite $n\to(a_0+a_1n)a^n$, où $a_0\in\boldsymbol{U}_p$, $a_1\in p\boldsymbol{U}_p$, $a\in(\zeta+p\boldsymbol{U}_p)\cap\cap\left(\zeta\exp\left(-\frac{a_1}{a_0}\right)+p\boldsymbol{U}_p\right)$, est t.b.r. dans $\boldsymbol{U}_p$.

On remarquera que ζ et $\zeta\exp(-a_1/a_0)$ appartiennent à deux boules disjointes de rayon p^{-2} de la boule $\zeta+p\boldsymbol{Z}_p$.

7.3. On sait (cf. 4.3 (b)) que $x\to x\log x$ est une application isométrique de $h+p\boldsymbol{Z}_p$, où $h = 1, 2, \ldots, p-1$, sur $p\boldsymbol{Z}_p$; puisque le transformé de $\zeta_{(h)}$ est 0, on voit que, plus généralement, $x\to x\log x$ est une application isométrique de $\zeta_{(h)}+p^k\boldsymbol{Z}_p$, où $h = 1, 2, \ldots, p-1$ et $k\in\boldsymbol{N}$, sur $p^k\boldsymbol{Z}_p$.

Il en résulte que, si la suite (x_n) est e.r. dans $\bigcup_{h\in H}(\zeta_{(h)}+p^k\boldsymbol{Z}_p)$, où $k\in\boldsymbol{N}$ et où H désigne une partie non vide de $\{1, 2, \ldots, p-1\}$, alors la suite $(x_n\log x_n)$ est e.r. dans $p^k\boldsymbol{Z}_p$.

Prenons maintenant $x_n = a^n$, où $a\in\boldsymbol{U}_p\setminus\mathscr{G}(\zeta)$; on sait (cf. 7.1) que la suite (a^n) est t.b.r. dans $\mathscr{G}(\zeta_a)+p^{v(\zeta_a a-1)}\boldsymbol{Z}_p$; on en conclut que la suite $(na^n\log a)$ est e.r. dans $p^{v(\zeta_a a-1)}\boldsymbol{Z}_p$, et, puisque $v(\log a) = v(\zeta_a a-1)$, la suite (na^n) est e.r. dans $\boldsymbol{Z}_p$.

On s'assure aisément que ce résultat reste d'ailleurs vrai si $a\in\mathscr{G}(\zeta)$. Finalement on obtient:

Si $p\neq 2$, la suite (na^n), où $a\in\boldsymbol{U}_p$, est e.r. dans $\boldsymbol{Z}_p$.

Dans le cas où l'on a plus particulièrement $a\in 1+p\boldsymbol{U}_p$, la suite (na^n) est t.b.r. dans $\boldsymbol{Z}_p$ (cf. 6.1).

7.4. Soit $\nu_n(q)$ le n-ième entier naturel non divisible par q, où q entier $\geqslant 2$, et soit $a\in\zeta+p\boldsymbol{U}_p$. Remarquons que, si $(q, p-1) = 1$, alors ζ^q est une racine $(p-1)$-ième primitive de 1, et si de plus $(q, p) = 1$, alors $a^q\in\zeta^q+p\boldsymbol{U}_p$; il en résulte que, si $q\in E_p$, alors la suite (a^{qn}) est t.b.r. dans $\boldsymbol{U}_p$. On en déduit sans peine le résultat suivant:

Si $p\neq 2$, la suite $n\to a^{\nu_n(q)}$, où $a\in\zeta+p\boldsymbol{U}_p$ et $q\in E_p\cap(\boldsymbol{N}+1)$, est e.r. dans $\boldsymbol{U}_p$.

Cette suite n'est d'ailleurs pas t.b.r. dans $\boldsymbol{U}_p$.

7.5. Soit $v_q(n)$ l'exposant de la plus haute puissance de q divisant n, où q entier $\geqslant 2$, et considérons la suite $n\to a^np^{v_q(n)}$, où $a\in\zeta+p\boldsymbol{U}_p$ et $q\in E_p$, qui est répartie dans $\boldsymbol{Z}_p$. D'après 7.4, quel que soit $k\in\boldsymbol{Z}^+$, la sous-suite $m\to p^ka^{q^k\nu_m(q)}$, fournie par les n tels que $v_q(n) = k$, est e.r. dans $p^k\boldsymbol{U}_p$. On en déduit aisément le résultat suivant:

Si $p\neq 2$, la suite $n\to a^np^{v_q(n)}$, où $a\in\zeta+p\boldsymbol{U}_p$ et $q\in E_p\cap(\boldsymbol{N}+1)$, admet en tout point $\gamma\in\boldsymbol{Z}_p$ une densité de répartition dans $\boldsymbol{Z}_p$ (cf. VIII-2.1):

$$\varrho(\gamma) = \frac{q-1}{p-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{v(\gamma)+1}.$$

CHAPITRE VI

THÉORÈME DE KOKSMA POUR LES PARTIES ENTIÈRES DANS $\boldsymbol{R}$ ET DANS $\boldsymbol{Q}_p$

On se propose, dans ce chapitre, de montrer que le théorème métrique de Koksma concernant l'équirépartition (mod 1) s'étend aux suites des parties entières, dont on va donner une définition généralisée, d'abord dans $\boldsymbol{R}$, puis dans $\boldsymbol{Q}_p$.

1. Notations et définitions utilisées dans $\boldsymbol{R}$. On désigne par $\boldsymbol{r}$ un système de représentants du groupe quotient $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ des réels modulo 1; notamment, $\boldsymbol{r}$ pourra être l'intervalle $\boldsymbol{r}_0 = [0, 1[$. Tout $x \in \boldsymbol{R}$ admet une décomposition unique

$$x = [x]_{\boldsymbol{r}} + \langle x \rangle_{\boldsymbol{r}} \quad \text{où} \quad [x]_{\boldsymbol{r}} \in \boldsymbol{Z},\ \langle x \rangle_{\boldsymbol{r}} \in \boldsymbol{r}.$$

$[x]_{\boldsymbol{r}}$ s'appellera *partie entière de x relative à $\boldsymbol{r}$*.

On a en particulier $[x]_{\boldsymbol{r}_0} = [x]$ et $\langle x \rangle_{\boldsymbol{r}_0} = \langle x \rangle$, de sorte que

$$\langle x \rangle_{\boldsymbol{r}} \equiv \langle x \rangle \ (\mathrm{mod}\, 1).$$

Rappelons qu'on pose, pour tout $x \in \boldsymbol{R}$:

$$e(x) = e^{2i\pi x}$$

d'où résultent, sur $\boldsymbol{R}$, les inégalités

$$|e(x) - 1| \leqslant 2\pi \min(\langle x \rangle, 1 - \langle x \rangle) \leqslant 2\pi |x|.$$

Notre étude dans $\boldsymbol{R}$ utilise deux définitions dues à I. Niven [18]. Soit une suite $(x_n)_{n \in N}$ de $\boldsymbol{Z}$. Si $N \in \boldsymbol{N}$, k entier $\geqslant 2$ et $h = 0, 1, \ldots, k-1$, on désigne par $(N, h, k)_x$ le nombre des n tels qu'on ait $1 \leqslant n \leqslant N$ et $x_n \equiv h \,(\mathrm{mod}\, k)$.

(a) La suite (x_n) de $\boldsymbol{Z}$ est dite *équirépartie* [e.r.]$(\mathrm{mod}\, k)$ *dans* $\boldsymbol{Z}$ si, pour tout $h = 0, 1, \ldots, k-1$, on a

$$\lim_{N \to \infty} \frac{(N, h, k)_x}{N} = \frac{1}{k}.$$

Pour qu'il en soit ainsi, rappelons-le, il faut et il suffit qu'on ait, pour tout $h = 1, \ldots, k-1$:

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{1 \leqslant n \leqslant N} e\left(\frac{hx_n}{k}\right) = 0.$$

(b) La suite (x_n) de $\boldsymbol{Z}$ est dite *équirépartie* [e.r.] *dans* $\boldsymbol{Z}$ si elle est e.r. $(\mathrm{mod}\, k)$ dans $\boldsymbol{Z}$ pour tout entier $k \geqslant 2$.

2. Théorème de Koksma dans $\boldsymbol{R}$.

2.1. Désignons par $\mathscr{A}$ l'algèbre des réunions finies d'intervalles quelconques (éventuellement ponctuels) de $\boldsymbol{R}$. Soient $E \in \mathscr{A}$, $F \in \mathscr{A}$ et soit ω un réel > 0; on dira que E et F sont congrus $(\mathrm{mod}\, \omega)$, et on écrira $E \equiv F (\mathrm{mod}\, \omega)$, s'il existe une partition finie de E en intervalles quelconques I_h, une partition finie de F en intervalles quelconques J_h, et une suite finie d'entiers rationnels a_h, où $h = 1, \ldots, H$, telles qu'on ait $I_h = J_h + a_h \omega$ pour tout $h = 1, \ldots, H$. Dans ces conditions, les ensembles E et F, qui sont évidemment mesurables au sens de Riemann [mesurables-$\mathscr{R}$], ont des mesures-$\mathscr{R}$ égales.

Lemme 1. *Soit $\boldsymbol{r}$ un système de représentants de $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ tel que $\boldsymbol{r} \in \mathscr{A}$; pour que la suite (x_n) de $\boldsymbol{R}$ soit e.r.* $(\mathrm{mod}\, 1)$ *dans $\boldsymbol{R}$, il faut et il suffit que, pour tout entier $k \geqslant 2$, la suite $([kx_n]_{\boldsymbol{r}})$ soit e.r.* $(\mathrm{mod}\, k)$ *dans $\boldsymbol{Z}$.*

Notons d'abord qu'on a $\boldsymbol{r} \equiv [0, 1[\, (\mathrm{mod}\, 1)$, et $\boldsymbol{r}$ est de mesure 1.

Nécessité. Supposons que la suite (x_n) soit e.r. $(\mathrm{mod}\, 1)$ dans $\boldsymbol{R}$; pour cela, il faut et il suffit que la suite $(\langle x_n \rangle_{\boldsymbol{r}})$ soit e.r. dans $\boldsymbol{r}$, donc encore que la suite $(k \langle x_n \rangle_{\boldsymbol{r}})$ soit e.r. dans $k\boldsymbol{r}$.

La partition $\mathscr{P}$ de $\boldsymbol{R}$ en k ensembles $\boldsymbol{r} + k\boldsymbol{Z} + l$, où $l = 0, 1, \ldots, k-1$, fournit une partition de $k\boldsymbol{r}$ en k ensembles $A(l) \in \mathscr{A}$ respectivement congrus $(\mathrm{mod}\, k)$ à $\boldsymbol{r} + l$. Fixons l, et considérons les $k \langle x_n \rangle_{\boldsymbol{r}}$ qui sont répartis dans $A(l)$, de mesure 1; puisque $A(l) \equiv \boldsymbol{r} + l (\mathrm{mod}\, k)$, les $[k \langle x_n \rangle_{\boldsymbol{r}}]_{\boldsymbol{r}}$ correspondants sont tous congrus à $l (\mathrm{mod}\, k)$. Dès lors, l'équirépartition des $k \langle x_n \rangle_{\boldsymbol{r}}$ dans $k\boldsymbol{r}$, de mesure k, entraîne l'équirépartition $(\mathrm{mod}\, k)$ des $[k \langle x_n \rangle_{\boldsymbol{r}}]_{\boldsymbol{r}}$ dans $\boldsymbol{Z}$.

Mais on a

$$[k \langle x_n \rangle_{\boldsymbol{r}}]_{\boldsymbol{r}} = [kx_n - k[x_n]_{\boldsymbol{r}}]_{\boldsymbol{r}} = [kx_n]_{\boldsymbol{r}} - k[x_n]_{\boldsymbol{r}} \equiv [kx_n]_{\boldsymbol{r}} \ (\mathrm{mod}\, k).$$

Donc enfin la suite $([kx_n]_{\boldsymbol{r}})$ est e.r. $(\mathrm{mod}\, k)$ dans $\boldsymbol{Z}$.

Suffisance. Posant ici, pour k entier $\geqslant 2$ et $h = 1, \ldots, k-1$:

$$s_N(h, k) = \frac{1}{N} \sum_{1 \leqslant n \leqslant N} e\left(\frac{h}{k} [kx_n]_{\boldsymbol{r}}\right),$$

$$s'_N(h, k) = \frac{1}{N} \sum_{1 \leqslant n \leqslant N} e(hx_n) \left(e\left(-\frac{h}{k} \langle kx_n \rangle_{\boldsymbol{r}}\right) - 1\right),$$

on a

$$s_N(h, k) = \sigma_N(h) + s'_N(h, k),$$

d'où

$$|\sigma_N(h)| \leqslant |s_N(h, k)| + |s'_N(h, k)|.$$

Puisqu'il appartient à $\mathscr{A}$, le système de représentants $\boldsymbol{r}$ est borné; posant $M = \sup_{t \in \boldsymbol{r}} |t|$, on obtient

$$|s'_N(h, k)| \leqslant \frac{1}{N} \sum_{1 \leqslant n \leqslant N} \left|1 - e\left(\frac{h}{k} \langle kx_n \rangle_{\boldsymbol{r}}\right)\right| \leqslant \frac{1}{N} \sum_{1 \leqslant n \leqslant N} \frac{2\pi h}{k} |\langle kx_n \rangle_{\boldsymbol{r}}| \leqslant \frac{2\pi h M}{k},$$

de sorte que

$$|\sigma_N(h)| \leqslant |s_N(h, k)| + \frac{2\pi h M}{k}.$$

Si la suite $([kx_n]_{\boldsymbol{r}})$ est e.r. $(\mathrm{mod}\, k)$ dans $\boldsymbol{Z}$ pour tout entier $k \geqslant 2$, alors, pour tout $h \in \boldsymbol{N}$ et pour tout entier $k > h$, on a $\lim_{N \to \infty} s_N(h, k) = 0$, et la limite supérieure de $|\sigma_N(h)|$ quand $N\to\infty$ est au plus égale à $2\pi hM/k$ cela exige, puisque, h étant fixé, k est arbitrairement grand, qu'on ait $\lim\limits_{N\to\infty}\sigma_N(h)=0$ pour tout $h\in\boldsymbol{N}$, et la suite (x_n) est e.r. (mod 1) dans $\boldsymbol{R}$

2.2. Ce lemme étant établi, soit I un intervalle de $\boldsymbol{R}$ et soit une suite (f_n) d'applications dérivables de I dans $\boldsymbol{R}$; on pose $F_{m,n}=f_m-f_n$.

Introduisons les deux conditions suivantes:

(K1) *Pour tout couple d'entiers naturels (m,n), où $m\neq n$, la fonction $F'_{m,n}$ est monotone et de signe constant sur I.*

(K2) *Il existe un réel $c>0$ tel que, pour tout couple d'entiers naturels (m,n), où $m\neq n$, on ait $|F'_{m,n}(x)|\geqslant c$ pour tout $x\in I$.*

On sait ([14]) que, si ces conditions sont satisfaites, alors la suite $\big(f_n(x)\big)$ de $\boldsymbol{R}$ est e.r. (mod 1) pour presque tous les $x\in I$, c'est-à-dire sauf pour ceux qui appartiennent à une partie de I dont la mesure de Lebesgue [mesure-$\mathscr{L}$] est nulle, et il en est de même de la suite $\left(\dfrac{f_n(x)}{k}\right)$, où k entier $\geqslant 2$. Dès lors, soit $\boldsymbol{r}\in\mathscr{A}$; d'après le lemme 1 (nécessité de la condition), pour tout entier $k\geqslant 2$, la suite $\big([f_n(x)]_{\boldsymbol{r}}\big)$ est e.r. (mod k) dans $\boldsymbol{Z}$ pour presque tous les $x\in I$. Puisqu'une réunion dénombrable d'ensembles de mesure-$\mathscr{L}$ nulle est elle-même de mesure-$\mathscr{L}$ nulle, il en résulte que l'ensemble des $x\in I$ tels que la suite $\big([f_n(x)]_{\boldsymbol{r}}\big)$ ne soit pas e.r. dans $\boldsymbol{Z}$ a une mesure-$\mathscr{L}$ nulle, et le théorème de Koksma dans $\boldsymbol{R}$ peut être complété comme suit:

Théorème 1. *Soit $\boldsymbol{r}$ un système de représentants de $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ tel que $\boldsymbol{r}\in\mathscr{A}$, soit I un intervalle de $\boldsymbol{R}$ et soit une suite (f_n) d'applications dérivables de I dans $\boldsymbol{R}$; si I et f_n vérifient les conditions* (K1) *et* (K2), *alors, pour presque tous les $x\in I$, la suite $\big(f_n(x)\big)$ est e.r.* (mod 1) *dans $\boldsymbol{R}$ et la suite $\big([f_n(x)]_{\boldsymbol{r}}\big)$ est e.r. dans $\boldsymbol{Z}$.*

3. Notations et définitions utilisées dans $\boldsymbol{Q}_p$. L'ensemble des rationnels qui, après réduction, ont pour dénominateur une puissance entière $\geqslant 0$ de p sera noté $\boldsymbol{Q}_{(p)}$.

On désigne par $\boldsymbol{r}_p$ un système de représentants du groupe quotient $\boldsymbol{Q}_p/\boldsymbol{Z}_p$ des p-adiques modulo 1, qui est isomorphe au groupe $\boldsymbol{Q}_{(p)}/\boldsymbol{Z}$; notamment, $\boldsymbol{r}_p$ pourra être l'ensemble $\boldsymbol{r}_{p,0}=[0,1[\,\cap\boldsymbol{Q}_{(p)}$.

Tout $x\in\boldsymbol{Q}_p$ admet une décomposition unique

$$x=[x]_{\boldsymbol{r}_p}+\langle x\rangle_{\boldsymbol{r}_p}\quad\text{où}\quad [x]_{\boldsymbol{r}_p}\in\boldsymbol{Z}_p,\ \langle x\rangle_{\boldsymbol{r}_p}\in\boldsymbol{r}_p.$$

$[x]_{\boldsymbol{r}_p}$ s'appellera *partie entière de x relative à $\boldsymbol{r}_p$*.

En particulier, posant $[x]_{\boldsymbol{r}_{p,0}}=[x]_p$ et $\langle x\rangle_{\boldsymbol{r}_{p,0}}=\langle x\rangle_p$, de sorte que

$$\langle x\rangle_{\boldsymbol{r}_p}\equiv\langle x\rangle_p\ (\mathrm{mod}\,1),$$

on obtient la décomposition unique

$$x=[x]_p+\langle x\rangle_p\quad\text{où}\quad [x]_p\in\boldsymbol{Z}_p,\ \langle x\rangle_p\in\boldsymbol{r}_{p,0}.$$

$[x]_p$ et $\langle x\rangle_p$ sont dits respectivement *partie entière p-adique* et *partie principale p-adique* de x.

On a, pour $x_1,x_2,y\in\boldsymbol{Q}_p$:

$$\langle(x_1+x_2)y\rangle_p\equiv\langle x_1y\rangle_p+\langle x_2y\rangle_p\ (\mathrm{mod}\,1),$$

et $x\to\langle xy\rangle_p$, où $y\in\boldsymbol{Q}_p$, est un homomorphisme continu du groupe additif $\boldsymbol{Q}_p$ dans le groupe additif $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$; de plus on a

$$(x_1-x_2)y\in\boldsymbol{Z}_p\Rightarrow\langle x_1y\rangle_p=\langle x_2y\rangle_p\quad\text{pour}\quad x_1,x_2,y\in\boldsymbol{Q}_p$$

et

$$\langle xy\rangle_p=\langle x\langle y\rangle_p\rangle_p\quad\text{pour}\quad x\in\boldsymbol{Z}_p,\ y\in\boldsymbol{Q}_p.$$

Enfin on pose, pour tout $x\in\boldsymbol{Q}_p$:

$$e_p(x)=e^{2i\pi\langle x\rangle_p}.$$

Si $x\in\boldsymbol{Q}_{(p)}$, alors on a $[x]=[x]_p$ et $\langle x\rangle=\langle x\rangle_p$, donc aussi $e(x)=e_p(x)$.

Notre étude dans $\boldsymbol{Q}_p$ utilise d'abord deux définitions qui sont les analogues p-adiques des définitions de I. Niven mentionnées plus haut (cf. 1). Etant donnée une suite $(x_n)_{n\in\boldsymbol{N}}$ de $\boldsymbol{Z}_p$, rappelons que, si $N\in\boldsymbol{N}$, $a\in\boldsymbol{Z}_p$, $k\in\boldsymbol{N}$, on désigne par $(N,a,k)_x$ le nombre des n tels qu'on ait $1\leqslant n\leqslant N$ et $x_n\in a+p^k\boldsymbol{Z}_p$.

(a) La suite (x_n) de $\boldsymbol{Z}_p$ est dite *équirépartie d'ordre k* [k-e.r.] *dans* $\boldsymbol{Z}_p$ si, pour tout $a\in\boldsymbol{Z}_p$, on a

$$\lim_{N\to\infty}\frac{(N,a,k)_x}{N}=\frac{1}{p^k}.$$

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit (cf. VIII-3.1) qu'on ait, pour tout $h=1,\dots,p^k-1$:

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{1\leqslant n\leqslant N}e_p\left(\frac{hx_n}{p^k}\right)=0.$$

(b) La suite (x_n) de $\boldsymbol{Z}_p$ est dite *équirépartie* [e.r.] *dans* $\boldsymbol{Z}_p$ si elle est k-e.r. dans $\boldsymbol{Z}_p$ pour tout $k\in\boldsymbol{N}$.

D'autre part, nous introduisons la notion d'équirépartition (mod 1) dans $\boldsymbol{Q}_p$:

La suite (x_n) de $\boldsymbol{Q}_p$ est dite *équirépartie* [e.r.] (mod 1) *dans* $\boldsymbol{Q}_p$ si la suite $(\langle x_n\rangle_p)$ est e.r. dans $[0,1]$.

Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit, puisque $e(h\langle x_n\rangle_p)=e_p(hx_n)$, qu'on ait $\lim\limits_{N\to\infty}\sigma_N(h)=0$ pour tout $h\in\boldsymbol{N}$, en posant ici

$$\sigma_N(x,h)=\frac{1}{N}\sum_{1\leqslant n\leqslant N}e_p(hx_n).$$

4. Théorème de Koksma dans Q_p.

4.1. LEMME 2. *Soit $\boldsymbol{r}_p$ un système de représentants de $\boldsymbol{Q}_p/\boldsymbol{Z}_p$ inclus dans un système de représentants $\boldsymbol{r}$ de $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ tel que $\boldsymbol{r}\in\mathscr{A}$; pour que la suite (x_n) de $\boldsymbol{Q}_p$ soit e.r.* (mod 1) *dans $\boldsymbol{Q}_p$, il faut et il suffit que, pour tout $k\in\boldsymbol{N}$, la suite $([p^k x_n]_{\boldsymbol{r}_p})$ soit k-e.r. dans $\boldsymbol{Z}_p$.*

Nécessité. Supposons que la suite (x_n) soit e.r. (mod 1) dans $\boldsymbol{Q}_p$; pour cela, il faut et il suffit que la suite $(\langle x_n\rangle_{\boldsymbol{r}_p})$ soit e.r. dans $\boldsymbol{r}$, donc encore que la suite $(p^k\langle x_n\rangle_{\boldsymbol{r}_p})$ soit e.r. dans $p^k\boldsymbol{r}$.

La partition $\mathscr{P}$ de $\boldsymbol{R}$ en p^k ensembles $\boldsymbol{r}+p^k\boldsymbol{Z}+l$, où $l=0,1,\ldots$ $\ldots,p^k-1$, fournit une partition de $p^k\boldsymbol{r}$ en p^k ensembles $A(l)\in\mathscr{A}$ respectivement congrus $(\mathrm{mod}\,p^k)$ à $\boldsymbol{r}+l$. Fixons l, et considérons les $p^k\langle x_n\rangle_{\boldsymbol{r}_p}$ qui sont répartis dans $A(l)$, de mesure 1; puisque $A(l)\equiv\boldsymbol{r}+l(\mathrm{mod}\,p^k)$, les $[p^k\langle x_n\rangle_{\boldsymbol{r}_p}]_{\boldsymbol{r}}$ correspondants sont tous congrus à $l(\mathrm{mod}\,p^k)$. Dès lors, l'équirépartition des $p^k\langle x_n\rangle_{\boldsymbol{r}_p}$ dans $p^k\boldsymbol{r}$, de mesure p^k, entraîne l'équirépartition $(\mathrm{mod}\,p^k)$ des $[p^k\langle x_n\rangle_{\boldsymbol{r}_p}]_{\boldsymbol{r}}$ dans $\boldsymbol{Z}$.

Or, si $t\in\boldsymbol{Q}_{(p)}$, on a $[t]_{\boldsymbol{r}}=[t]_{\boldsymbol{r}_p}$; donc ici $[p^k\langle x_n\rangle_{\boldsymbol{r}_p}]_{\boldsymbol{r}}=[p^k\langle x_n\rangle_{\boldsymbol{r}_p}]_{\boldsymbol{r}_p}$, de sorte que l'équirépartition $(\mathrm{mod}\,p^k)$ des $[p^k\langle x_n\rangle_{\boldsymbol{r}_p}]_{\boldsymbol{r}}$ dans $\boldsymbol{Z}$ équivaut à l'équirépartition d'ordre k des $[p^k\langle x_n\rangle_{\boldsymbol{r}_p}]_{\boldsymbol{r}_p}$ dans $\boldsymbol{Z}_p$.

Mais on a

$$[p^k\langle x_n\rangle_{\boldsymbol{r}_p}]_{\boldsymbol{r}_p}=[p^k x_n-p^k[x_n]_{\boldsymbol{r}_p}]_{\boldsymbol{r}_p}=[p^k x_n]_{\boldsymbol{r}_p}-p^k[x_n]_{\boldsymbol{r}_p}\in[p^k x_n]_{\boldsymbol{r}_p}+p^k\boldsymbol{Z}_p.$$

Donc enfin la suite $([p^k x_n]_{\boldsymbol{r}_p})$ est k-e.r. dans $\boldsymbol{Z}_p$.

Suffisance. Posant ici, pour $k\in N$ et $h=1,\ldots,p^k-1$:

$$s_N(h,k)=\frac{1}{N}\sum_{1\leqslant n\leqslant N}e_p\left(\frac{h}{p^k}[p^k x_n]_{\boldsymbol{r}_p}\right),$$

$$s'_N(h,k)=\frac{1}{N}\sum_{1\leqslant n\leqslant N}e_p(hx_n)\left(e\left(-\frac{h}{p^k}\langle p^k x_n\rangle_{\boldsymbol{r}_p}\right)-1\right),$$

on a

$$s_N(h,k)=\sigma_N(h)+s'_N(h,k),$$

d'où

$$|\sigma_N(h)|\leqslant|s_N(h,k)|+|s'_N(h,k)|.$$

Si on pose comme précédemment $M=\sup\limits_{t\in\boldsymbol{r}}|t|$, on trouve ici $|s'_N(h,k)|$ $\leqslant\dfrac{2\pi hM}{p^k}$, de sorte que

$$|\sigma_N(h)|\leqslant|s_N(h,k)|+\frac{2\pi hM}{p^k}.$$

Si la suite $([p^k x_n]_{\boldsymbol{r}_p})$ est k-e.r. dans $\boldsymbol{Z}_p$ pour tout $k\in\boldsymbol{N}$, alors, pour tout $h\in\boldsymbol{N}$ et pour tout entier $k>\dfrac{\log h}{\log p}$, on a $\lim\limits_{N\to\infty}s_N(h,k)=0$, et la limite supérieure de $|\sigma_N(h)|$ quand $N\to\infty$ est au plus égale à $\dfrac{2\pi hM}{p^k}$; cela exige, puisque h étant fixé, k est arbitrairement grand, qu'on ait $\lim\limits_{N\to\infty}\sigma_N(h)=0$ pour tout $h\in\boldsymbol{N}$, et la suite (x_n) est e.r. (mod 1) dans $\boldsymbol{Q}_p$.

4.2. Le lemme étant établi, soit B une boule de $\boldsymbol{Q}_p$ et soit une suite (f_n) d'applications continues de B dans $\boldsymbol{Q}_p$; on pose $F_{m,n}=f_m-f_n$. Soit d'autre part E un ensemble de couples d'entiers naturels (m,n) contenant la diagonale de $\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}$; on pose, pour tout $N\in\boldsymbol{N}$:

$$E_N=\mathrm{card}\{(m,n)\in E\mid\ m\leqslant N\ \text{et}\ n\leqslant N\}.$$

Introduisons les deux conditions suivantes:

(C1) *A tout couple d'entiers naturels $(m,n)\notin E$ est associé un entier rationnel $\lambda_{m,n}$ tel qu'on ait, pour $x\in B$, $y\in B$:*

$$|F_{m,n}(x)-F_{m,n}(y)|_p=p^{\lambda_{m,n}}|x-y|_p$$

et tel que $\lambda_{m,n}\to\infty$ quand $\max(m,n)\to\infty$.

(C2) *La série de terme général E_N/N^3 est convergente.*

On sait ([3]) que, si ces conditions sont satisfaites, alors la suite $(f_n(x))$ de $\boldsymbol{Q}_p$ est e.r. (mod 1) dans $\boldsymbol{Q}_p$ pour presque tous les $x\in B$, c'est-à-dire sauf pour ceux qui appartiennent à une partie de B dont la mesure de Haar [mesure-$\mathscr{H}$] est nulle, et il en est de même de la suite $\left(\dfrac{f_n(x)}{p^k}\right)$, où $k\in\boldsymbol{N}$. Dès lors, soient $\boldsymbol{r}\in\mathscr{A}$ et $\boldsymbol{r}_p\subset\boldsymbol{r}$; d'après le lemme 2 (nécessité de la condition), pour tout $k\in\boldsymbol{N}$, la suite $([f_n(x)]_{\boldsymbol{r}_p})$ est k-e.r. dans $\boldsymbol{Z}_p$ pour presque tous les $x\in B$.

Il en résulte que l'ensemble des $x\in B$ tels que la suite $([f_n(x)]_{\boldsymbol{r}_p})$ ne soit pas e.r. dans $\boldsymbol{Z}_p$ a une mesure-$\mathscr{H}$ nulle, et le théorème de Koksma dans $\boldsymbol{Q}_p$ peut être complété comme suit:

THÉORÈME 2. *Soit $\boldsymbol{r}_p$ un système de représentants de $\boldsymbol{Q}_p/\boldsymbol{Z}_p$ inclus dans un système de représentants $\boldsymbol{r}$ de $\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$ tel que $\boldsymbol{r}\in\mathscr{A}$, soit B une boule de $\boldsymbol{Q}_p$ et soit une suite (f_n) d'applications continues de B dans $\boldsymbol{Q}_p$; si E, B, f_n vérifient les conditions* (C1) *et* (C2), *alors, pour presque tous les $x\in B$, la suite $(f_n(x))$ est e.r.* (mod 1) *dans $\boldsymbol{Q}_p$ et la suite $([f_n(x)]_{\boldsymbol{r}_p})$ est e.r. dans $\boldsymbol{Z}_p$.*

5. Applications du théorème de Koksma dans Q_p. Il est entendu que, dans ce dernier paragraphe, $\boldsymbol{r}_p$ est de la forme que lui assigne le théorème 2.

5.1. Démontrons d'abord le

COROLLAIRE. *Soit une suite* (a_n) *de* Q_p *telle que* $\lim\limits_{n\to\infty} v(a_n) = -\infty$; *s'il existe un couple réel* (c, s) *vérifiant* $c \geqslant 0$ *et* $0 \leqslant s < 1$, *tel qu'à partir d'un certain rang en* m *et d'un certain rang en* n, *on ait*

$$|m-n| > c\max(m^s, n^s) \Rightarrow v(a_m) \neq v(a_n),$$

alors, pour presque tous les $x \in Q_p$, *la suite* $n \to a_n x$ *est e.r.* (mod1) *dans* Q_p *et la suite* $n \to [a_n x]_{r_p}$ *est e.r. dans* Z_p.

Prenant $f_n(x) = a_n x$, on a

$$|F_{m,n}(x) - F_{m,n}(y)|_p = p^{\lambda_{m,n}}|x-y|_p,$$

en posant $\lambda_{m,n} = -v(a_m - a_n)$.

Si $v(a_m) \neq v(a_n)$, on a $\lambda_{m,n} = -\min\bigl(v(a_m), v(a_n)\bigr) \to \infty$ quand $\max(m, n) \to \infty$. Ainsi (C1) est vérifiée en prenant

$$E = \{(m, n) \mid v(a_m) = v(a_n)\}.$$

Comme par hypothèse

$$v(a_m) = v(a_n) \Rightarrow |m-n| \leqslant c\max(m^s, n^s)$$

pour, disons, $m > m_0$ et $n > n_0$, on voit que

$$E \subset F = \{(m, n) \mid m \leqslant m_0 \text{ ou } n \leqslant n_0 \text{ ou } |m-n| \leqslant c\max(m^s, n^s)\}.$$

Supposons $m \leqslant N$, $n \leqslant N$; le nombre des couples (m, n) vérifiant la première condition indiquée est $m_0 N$; de même, celui des couples (m, n) vérifiant la seconde est $n_0 N$; enfin, celui des couples (m, n) vérifiant la troisième est au plus égal à $N(2cN^s+1) = O(N^{s+1})$. Donc on a, avec des notations évidentes:

$$E_N \leqslant F_N = O(N^{s+1})$$

et (C2) est vérifiée, puisque $s < 1$.

En particulier, appliquant ce corollaire avec $s = 0$, $c = p-1$, on voit que, *pour presque tous les* $x \in Q_p$, *la suite*

$$n \to \frac{x}{(a+1)^k(a+2)^k \dots (a+n)^k}$$

où $k \in N$, $a \in Z_p \setminus (Z^-)^*$, *est e.r.* (mod1) *dans* Q_p *et la suite associée*

$$n \to \left[\frac{x}{(a+1)^k(a+2)^k \dots (a+n)^k}\right]_{r_p}$$

est e.r. dans Z_p.

5.2. Soit $f_n(x) = xn^k a^n$, où $k \in Z$, $a \in Q_p \setminus Z_p$. On a

$$|F_{m,n}(x) - F_{m,n}(y)|_p = p^{\lambda_{m,n}}|x-y|_p,$$

en posant $\lambda_{m,n} = -v(m^k a^m - n^k a^n)$.

Si $kv(m) + mv(a) \neq kv(n) + nv(a)$, on a

$$\lambda_{m,n} = -\min\bigl(kv_m + mv(a), kv(n) + nv(a)\bigr),$$

d'où

$$\lambda_{m,n} \geqslant -\min\left(mv(a) + \frac{k\log m}{\log p}, nv(a) + \frac{k\log n}{\log p}\right).$$

Puisque $v(a) \leqslant -1$, on voit que $\lambda_{m,n} \to \infty$ quand $\max(m, n) \to \infty$. Ainsi (C1) est vérifiée en prenant

$$E = \{(m, n) \mid (m-n)v(a) = k\bigl(v(n) - v(m)\bigr)\}.$$

Supposons $m \leqslant N$, $n \leqslant N$ et $(m-n)v(a) = k\bigl(v(n) - v(m)\bigr)$; à un choix de m et de $v(n)$ correspond au plus une seule valeur de n; comme les valeurs possibles de m sont $1, 2, \dots, N$ et les valeurs possibles de $v(n)$ sont $0, 1, \dots, \left[\frac{\log N}{\log p}\right]$, on a

$$E_N \leqslant N\left(\left[\frac{\log N}{\log p}\right] + 1\right) = O(N\log N)$$

et (C2) est vérifiée. Ainsi, *pour presque tous les* $x \in Q_p$, *la suite* $n \to xn^k a^n$, *où* $k \in Z$, $a \in Q_p \setminus Z_p$, *est e.r.* (mod1) *dans* Q_p *et la suite associée* $n \to [xn^k a^n]_{r_p}$ *est e.r. dans* Z_p.

5.3. Soit $f_n(x) = \gamma(n!)^h x^n$, où $\gamma \in Q_p^*$, $h \in Z$, et soit B_k une boule de rayon $1/p^{k+2}$ contenue dans la couronne $p^k U_p$, où $k \in Z$.

Prenons $x \in B_k$, $y \in B_k$, $x \neq y$, et formons

$$\frac{F_{m,n}(x) - F_{m,n}(y)}{x-y} = \frac{\gamma(m!)^h(x^m - y^m)}{x-y} - \frac{\gamma(n!)^h(x^n - y^n)}{x-y}.$$

On verra (cf. VII-8.1) qu'on a, dans ces conditions:

$$v\left(\frac{x^n - y^n}{x-y}\right) = v(n) + (n-1)k,$$

d'où

$$v\left(\frac{(n!)^h(x^n - y^n)}{x-y}\right) = hv(n!) + v(n) + (n-1)k,$$

soit $\varphi(n)$.

Dès lors, si $\varphi(m) \neq \varphi(n)$, on a

$$|F_{m,n}(x) - F_{m,n}(y)|_p = p^{\lambda_{m,n}}|x-y|_p,$$

en posant

$$\lambda_{m,n} = -v(\gamma) - \min\bigl(\varphi(m), \varphi(n)\bigr).$$

Or on voit que

$$\varphi(n) = n\left(k+\frac{h}{p-1}\right)+O(\log n).$$

Supposons $k < -h/(p-1)$; alors $\lambda_{m,n} \to \infty$ quand $\max(m, n) \to \infty$.

Ainsi (C1) est vérifiée en prenant

$$E = \{(m, n) \mid \varphi(m) = \varphi(n)\}.$$

La condition indiquée s'écrit explicitement

$$v\left(\frac{(n!)^h n}{(m!)^h m}\right) = (m-n)k,$$

où le premier membre est de la forme $\dfrac{(n-m)h}{p-1}+O\big(\log\max(m, n)\big)$; elle s'écrit donc encore

$$m-n = O\big(\log\max(m, n)\big).$$

Supposant $m \leqslant N$, $n \leqslant N$, il en résulte qu'on a ici

$$E_N = O(N\log N)$$

et (C2) est vérifiée.

Le résultat de Koksma s'applique donc à presque tous les $x \in B_k \subset p^k \boldsymbol{U}_p$ quel que soit $k < -h/(p-1)$, c'est-à-dire finalement à presque tous les $x \in \boldsymbol{Q}_p \setminus p^K \boldsymbol{Z}_p$, où K est l'entier rationnel défini par $K-1 < -h/(p-1) \leqslant K$. Ainsi:

Soient $\gamma \in \boldsymbol{Q}_p^*$, $h \in \boldsymbol{Z}$ et soit K le plus petit entier rationnel $\geqslant -h/(p-1)$; pour presque tous les $x \in \boldsymbol{Q}_p \setminus p^K \boldsymbol{Z}_p$, la suite $n \to \gamma(n!)^h x^n$ est e.r. (mod 1) *dans $\boldsymbol{Q}_p$ et la suite $n \to [\gamma(n!)^h x^n]_{\boldsymbol{r}_p}$ est e.r. dans $\boldsymbol{Z}_p$.*

Le cas $h = 0$, d'où $K = 0$, étend aux parties entières un résultat remarquable obtenu par F. Bertrandias [3]: *soit $\gamma \in \boldsymbol{Q}_p^*$; pour presque tous les $x \in \boldsymbol{Q}_p \setminus \boldsymbol{Z}_p$, la suite $n \to \gamma x^n$ est e.r.* (mod 1) *dans $\boldsymbol{Q}_p$ et la suite $n \to [\gamma x^n]_{\boldsymbol{r}_p}$ est e.r. dans $\boldsymbol{Z}_p$.*

CHAPITRE VII

C-ÉQUIRÉPARTITION MODULO 1 DANS Q_p

1. Notations. Dans les chapitres VII et VIII, on désigne par $\boldsymbol{r}_p^{(h)}$, où $h \in \boldsymbol{Z}^+$, l'ensemble des rationnels de $[0, 1[$ qui, après réduction, ont pour dénominateur p^h, et on pose

$$\boldsymbol{r}_p^k = \bigcup_{0 \leqslant h \leqslant k} \boldsymbol{r}_p^{(h)} \quad \text{pour tout } k \in \boldsymbol{Z}^+,$$

$$\boldsymbol{r}_p = \bigcup_{h \geqslant 0} \boldsymbol{r}_p^{(h)},$$

de sorte que $\boldsymbol{r}_p = [0, 1[\cap \dot{\boldsymbol{Q}}_{(p)}$. (On remarquera donc que $\boldsymbol{r}_p$ désigne désormais le système particulier de représentants du groupe quotient $\boldsymbol{Q}_p/\boldsymbol{Z}_p$ qui se trouvait noté $\boldsymbol{r}_{p,0}$ dans VII-3.)

On désigne par μ la mesure de Haar sur $\boldsymbol{Q}_p$ normalisée sur $\boldsymbol{Z}_p$.

Rappelons que $\boldsymbol{T}$ est le cercle unité, et que ψ_E est la fonction caractéristique de l'ensemble E. On notera $\operatorname{Isom}(E, F)$ la classe des applications isométriques de E dans F ($E \subset \boldsymbol{Q}_p$ et $F \subset \boldsymbol{Q}_p$).

Il est rappelé enfin qu'on pose, pour tout $x \in \boldsymbol{R}$:

$$e(x) = e^{2i\pi x}$$

et, pour tout $x \in \boldsymbol{Q}_p$:

$$e_p(x) = e^{2i\pi\langle x\rangle_p},$$

de sorte que $e(x) = e_p(x)$ pour tout $x \in \boldsymbol{Q}_{(p)}$.

2. Définition. Soit Δ une partie μ-mesurable de $\boldsymbol{Q}_p$ telle que $\mu(\Delta) > 0$, et soit F une application μ-mesurable de Δ dans $\boldsymbol{Q}_p$, de sorte que l'ensemble

$$\{x \in \Delta \mid F(x) \in a + p^k \boldsymbol{Z}_p\}$$

est μ-mesurable quels que soient $a \in \boldsymbol{Q}_p$, $k \in \boldsymbol{Z}$. Pour tout $T \in \boldsymbol{Z}$, on pose

$$\Delta_T = \Delta \cap p^{-T} \boldsymbol{Z}_p,$$

et, pour tout couple réel (a, b) tel que $0 \leqslant a < b \leqslant 1$:

$$(T, a, b)_F^\Delta = \mu\big(\{x \in \Delta_T \mid a \leqslant \langle F(x)\rangle_p < b\}\big),$$

de sorte que

$$(T, a, b)_F^\Delta = \sum_{\substack{r \in \boldsymbol{r}_p \\ a \leqslant r < b}} \mu\big(\{x \in \Delta_T \mid F(x) \in r + \boldsymbol{Z}_p\}\big).$$

La fonction F est dite *C-équirépartie* [C-e.r.] (mod 1) si, pour tout couple réel (a, b) tel que $0 \leqslant a < b \leqslant 1$, on a

$$\lim_{T \to \infty} \frac{(T, a, b)_F^\Delta}{\mu(\Delta_T)} = b - a. \tag{1}$$

Cette définition n'est effective qui si $\mu(\Delta) = \infty$. En effet, si $0 < \mu(\Delta) < \infty$, alors (1) exige que l'on ait, pour tout $x \in \boldsymbol{r}_p$ et pour tout $a \in]0, 1-r]$:

$$\mu\big(\{x \in \Delta \mid r \leqslant \langle F(x)\rangle_p < r + a\}\big) = a\mu(\Delta),$$

d'où quand $0 < a \to 0$:

$$m(r) = \mu\big(\{x \in \Delta \mid \langle F(x)\rangle_p = r\}\big) = 0,$$

où $m(r)$ désigne la masse de répartition (mod1) de F au point r, en contradiction avec $\sum_{r\in r_p} m(r) = \mu(\Delta) > 0$.

Si $\Delta = \boldsymbol{Q}_p$, d'où $\Delta_T = p^{-T}\boldsymbol{Z}_p$, l'indice supérieur $\boldsymbol{Q}_p$ sera sous-entendu dans la notation $(T, a, b)_F^{\boldsymbol{Q}_p}$, et la définition (1) s'écrira

$$(1') \qquad \lim_{T\to\infty} \frac{(T, a, b)_F}{p^T} = b - a.$$

Rappelons que tout ouvert Δ de $\boldsymbol{Q}_p$, c'est-à-dire toute réunion, finie ou infinie, de boules ouvertes (autrement dit non ponctuelles) de $\boldsymbol{Q}_p$, est μ-mesurable, avec $\mu(\Delta) > 0$, et que toute fonction F continue sur un ouvert Δ de $\boldsymbol{Q}_p$ est μ-mesurable sur Δ. La définition (1) intéresse donc notamment toute fonction F *continue sur un ouvert Δ de $\boldsymbol{Q}_p$*.

3. Critères de C-équirépartition (mod1).

3.1. Soit $\mathscr{C}(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{C})$ la classe des fonctions à valeurs complexes continues sur $\boldsymbol{T}$.

CRITÈRE 1. *Pour que F, μ-mesurable sur une partie μ-mesurable Δ de $\boldsymbol{Q}_p$ telle que $\mu(\Delta) > 0$, soit C-e.r.* (mod1), *il faut et il suffit que, pour toute $f\in\mathscr{C}(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{C})$, on ait*

$$(2) \qquad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{\mu(\Delta_T)} \int_{\Delta_T} f(\langle F(x)\rangle_p)\,dx = \int_0^1 f(t)\,dt.$$

Dans les conditions précisées, l'intégrale de Haar qui figure au premier membre existe; en effet, d'une part Δ_T est borné et μ-mesurable, d'autre part l'application $f\circ\langle F\rangle_p$ de Δ_T dans $f(\boldsymbol{r}_p) \subset \boldsymbol{C}$ est bornée sur Δ_T, puisque f est bornée sur $\boldsymbol{T}$, et elle est aussi μ-mesurable sur Δ_T, car, si $\alpha\in f(\boldsymbol{r}_p)$ et si l'on pose $f^{-1}(\alpha) = \{r\in \boldsymbol{r}_p \mid f(r) = \alpha\}$, on a

$$\mu\big(\{x\in\Delta_T \mid f(\langle F(x)\rangle_p) = \alpha\}\big) = \mu\big(\{x\in\Delta_T \mid F(x)\in f^{-1}(\alpha) + \boldsymbol{Z}_p\}\big)$$
$$= \sum_{r\in f^{-1}(\alpha)} \mu\big(\{x\in\Delta_T \mid F(x)\in r + \boldsymbol{Z}_p\}\big).$$

Le procédé de Lebesgue fournit alors l'intégrale de Haar, où nous convenons d'écrire dx pour $d\mu(x)$.

Il suffit d'établir le théorème pour les $f\in\mathscr{C}(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{R})$.

Nécessité. Partageons $[0,1[$ en n intervalles égaux $[a_k, b_k[$, $k = 1, 2, \ldots, n$, et soit M_k [resp. m_k] la borne supérieure [resp. inférieure] de f sur $[a_k, b_k[$. On a, pour tout $x\in\Delta_T$:

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant n} m_k \psi_{[a_k,b_k[}(\langle F(x)\rangle_p) \leqslant f(\langle F(x)\rangle_p) \leqslant \sum_{1\leqslant k\leqslant n} M_k \psi_{[a_k,b_k[}(\langle F(x)\rangle_p).$$

Divisons par $\mu(\Delta_T)$ et intégrons sur Δ_T, en remarquant que

$$\int_{\Delta_T} \psi_{[a_k,b_k[}(\langle F(x)\rangle_p)\,dx = (T, a_k, b_k)_F^\Delta;$$

il vient

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant n} m_k \frac{(T, a_k, b_k)_F^\Delta}{\mu(\Delta_T)} \leqslant \frac{1}{\mu(\Delta_T)} \int_{\Delta_T} f(\langle F(x)\rangle_p)\,dx \leqslant \sum_{1\leqslant k\leqslant n} M_k \frac{(T, a_k, b_k)_F^\Delta}{\mu(\Delta_T)}.$$

Quand $T\to\infty$, le premier et le troisième membre tendent respectivement vers $\sum_{1\leqslant k\leqslant n} m_k(b_k - a_k)$ et $\sum_{1\leqslant k\leqslant n} M_k(b_k - a_k)$, et ces sommes, quand $n\to\infty$, tendent l'une et l'autre vers $\int_0^1 f(t)\,dt$; il en résulte qu'on a (2).

Suffisance. Soit $0 \leqslant a < b \leqslant 1$; il existe deux suites de fonctions l_k, L_k de $\mathscr{C}(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{R})$ qui encadrent $\psi_{[a,b[}$ sur $\boldsymbol{T}$ et dont les intégrales sur $\boldsymbol{T}$ tendent l'une et l'autre vers $\int_0^1 \psi_{[a,b[}(t)\,dt = b - a$ quand $k\to\infty$. On a, pour tout $x\in\Delta_T$:

$$l_k(\langle F(x)\rangle_p) \leqslant \psi_{[a,b[}(\langle F(x)\rangle_p) \leqslant L_k(\langle F(x)\rangle_p).$$

Divisons par $\mu(\Delta_T)$ et intégrons sur Δ_T; il vient:

$$\frac{1}{\mu(\Delta_T)} \int_{\Delta_T} l_k(\langle F(x)\rangle_p)\,dx \leqslant \frac{(T, a, b)_F^\Delta}{\mu(\Delta_T)} \leqslant \frac{1}{\mu(\Delta_T)} \int_{\Delta_T} L_k(\langle F(x)\rangle_p)\,dx.$$

Quand $T\to\infty$, le premier et le troisième membre tendent respectivement vers $\int_0^1 l_k(t)\,dt$ et $\int_0^1 L_k(t)\,dt$, et ces intégrales, quand $k\to\infty$, tendent l'une et l'autre vers $b - a$; il en résulte qu'on a (1).

3.2. On en déduit un *critère de Weyl:*

CRITÈRE 2. *Pour que F, μ-mesurable sur une partie μ-mesurable Δ de $\boldsymbol{Q}_p$ telle que $\mu(\Delta) > 0$, soit C-e.r.* (mod1), *il faut et il suffit que, pour tout $h\in\boldsymbol{N}$, on ait*

$$(3) \qquad \lim_{T\to\infty} \frac{1}{\mu(\Delta_T)} \int_{\Delta_T} e_p(hF(x))\,dx = 0.$$

Nécessité. Prenant $f(t) = e(ht)$, où $h\in\boldsymbol{Z}^*$, la condition (2) donne (3), puisque

$$e(h\langle F(x)\rangle_p) = e_p(hF(x)) \quad \text{et} \quad \int_0^1 e(ht)\,dt = \left[\frac{e(ht)}{2i\pi h}\right]_0^1 = 0.$$

Suffisance. $\mathscr{C}(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{C})$ est un espace vectoriel sur le corps $\boldsymbol{C}$, que nous munissons de la norme de la convergence uniforme $\|f\| = \sup_{t\in\boldsymbol{T}} |f(t)|$. Soit $\mathscr{T}(\boldsymbol{T})$ l'espace vectoriel des polynômes trigonométriques, c'est-à-dire des combinaisons linéaires à coefficients complexes des fonctions $t \to e(ht)$, où $h \in \boldsymbol{Z}$. On sait que $\mathcal{T}(\boldsymbol{T})$ est un sous-espace de $\mathcal{C}(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{C})$ partout dense dans $\mathcal{C}(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{C})$.

Soit $f \in \mathcal{C}(\boldsymbol{T}, \boldsymbol{C})$; il existe une suite de fonctions $f_k \in \mathcal{T}(\boldsymbol{T})$, soit

$$f_k(t) = \sum_{-H \leqslant h \leqslant H} \gamma_h e(ht),$$

qui converge uniformément vers f sur $\boldsymbol{T}$ quand $k \to \infty$. On a

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{\mu(\Delta_T)} \int_{\Delta_T} f_k(\langle F(x)\rangle_p)\,dx = \sum_{-H\leqslant h\leqslant H} \gamma_h \lim_{T\to\infty} \frac{1}{\mu(\Delta_T)} \int_{\Delta_T} e_p(hF(x))\,dx = \gamma_0,$$

et d'autre part

$$\int_0^1 f_k(t)\,dt = \sum_{-H\leqslant h\leqslant H} \gamma_h \int_0^1 e(ht)\,dt = \gamma_0,$$

de sorte que f_k vérifie la condition (2).

Soit $\varepsilon > 0$; il existe un entier K_ε tel que, pour $k > K_\varepsilon$, on ait

$$f_k(\langle F(x)\rangle_p) - \varepsilon < f(\langle F(x)\rangle_p) < f_k(\langle F(x)\rangle_p) + \varepsilon \quad \text{pour tout } x \in \Delta_T.$$

Divisant par $\mu(\Delta_T)$ et intégrant sur Δ_T, il vient

$$\frac{1}{\mu(\Delta_T)} \int_{\Delta_T} f_k(\langle F(x)\rangle_p)\,dx - \varepsilon \leqslant \frac{1}{\mu(\Delta_T)} \int_{\Delta_T} f(\langle F(x)\rangle_p)\,dx$$
$$\leqslant \frac{1}{\mu(\Delta_T)} \int_{\Delta_T} f_k(\langle F(x)\rangle_p)\,dx + \varepsilon.$$

Quand $T \to \infty$, le premier et le troisième membre tendent respectivement vers

$$\int_0^1 f_k(t)\,dt - \varepsilon \quad \text{et} \quad \int_0^1 f_k(t)\,dt + \varepsilon,$$

et ces quantités, quand $k \to \infty$, tendent respectivement vers

$$\int_0^1 f(t)\,dt - \varepsilon \quad \text{et} \quad \int_0^1 f(t)\,dt + \varepsilon;$$

puisque $\varepsilon > 0$ est arbitrairement petit, il en résulte que f vérifie la condition (2). Dès lors, la suffisance de (2) entraîne celle de (3).

Si $\Delta = \boldsymbol{Q}_p$, la condition (3) s'écrit

$$\text{(3')} \qquad \lim_{T\to\infty} p^{-T} \int_{p^{-T}\boldsymbol{Z}_p} e_p(hF(x))\,dx = 0.$$

On remarquera que, si $\mu(\Delta) < \infty$, on sait que la condition

$$\int_\Delta e_p(hF(x))\,dx = 0 \qquad \text{pour tout } h \in \boldsymbol{N}$$

n'est vérifiée par aucune fonction F.

Pour l'application du critère 2, on posera dans tout ce qui suit

$$\sigma_T^\Delta(F, h) = \frac{1}{\mu(\Delta_T)} \int_{\Delta_T} e_p(hF(x))\,dx$$

et, si $\Delta = \boldsymbol{Q}_p$:

$$\sigma_T(F, h) = p^{-T} \int_{p^{-T}\boldsymbol{Z}_p} e_p(hF(x))\,dx.$$

Ce critère est applicable en particulier à toute fonction F *continue sur un ouvert* Δ *de* $\boldsymbol{Q}_p$.

4. Quelques propriétés élémentaires.

4.1. Il est immédiat que *si* F, *μ-mesurable sur une partie μ-mesurable* Δ *de* $\boldsymbol{Q}_p$, *est C-e.r.* (mod1), *alors* $F + \alpha$, *où* $\alpha \in \boldsymbol{Q}_p$, *est C-e.r.* (mod1).

4.2. *Si* G, *μ-mesurable sur une partie μ-mesurable* Δ *de* $\boldsymbol{Q}_p$, *est C-e.r.* (mod1) *et si* $|F(x) - G(x) - \alpha|_p \leqslant 1$, *où* $\alpha \in \boldsymbol{Q}_p$, *quand* $x \in \Delta$, $|x|_p \to \infty$, *alors* F *est C-e.r.* (mod1).

G, définie sur Δ, est C-e.r. (mod1), ce qui exige d'abord $\mu(\Delta) = \infty$. D'après 4.1, il suffit d'établir la propriété pour $\alpha = 0$. Il existe T_0 tel qu'on ait $|F(x) - G(x)|_p \leqslant 1$ pour $x \in \Delta \setminus \Delta_{T_0}$. Dès lors, on a, pour $T > T_0$, $h \in \boldsymbol{N}$:

$$\sigma_T^\Delta(F, h) = \frac{1}{\mu(\Delta_T)} \int_{\Delta_{T_0}} e_p(hF(x))\,dx + \frac{1}{\mu(\Delta_T)} \int_{\Delta_T \setminus \Delta_{T_0}} e_p(hG(x))\,dx$$
$$= A_T + \sigma_T^\Delta(G, h),$$

en posant

$$A_T = \frac{1}{\mu(\Delta_T)} \int_{\Delta_{T_0}} \big(e_p(hF(x)) - e_p(hG(x))\big)\,dx.$$

Comme $\sigma_T^\Delta(G, h) \to 0$ et $|A_T| \leqslant \dfrac{2\mu(\Delta_{T_0})}{\mu(\Delta_T)} \to 0$ quand $T \to \infty$, on voit que $\lim\limits_{T\to\infty} \sigma_T^\Delta(F, h) = 0$ pour tout $h \in \boldsymbol{N}$.

5. Intégrales remarquables sur Z_p et sur U_p.

5.1. Rappelons deux résultats de F. Bertrandias [3]:

(a) Soit $I(y) = \int_{Z_p} e_p(yx)\,dx$, où $v(y) = -k$, $k \geqslant 1$. On a alors, si $y \in \frac{h}{p^k} + Z_p$:

$$I(y) = \frac{1}{p^k} \sum_{0 \leqslant n \leqslant p^k - 1} e_p(ny) = \frac{1}{p^k} \sum_{0 \leqslant n \leqslant p^k - 1} e\left(\frac{nh}{p^k}\right) = \frac{1}{p^k}\, \frac{e(h)-1}{e(hp^{-k})-1} = 0.$$

Donc, *si* $y \in Q_p \setminus Z_p$, *alors* $I(y) = 0$.

(b) Soit $I_\varphi(y) = \int_{Z_p} e_p(y\varphi(x))\,dx$, où $v(y) = -k$, $k \geqslant 1$, et $\varphi \in \mathrm{Isom}(Z_p, Q_p)$, de sorte qu'il existe $r \in r_p$ tel que φ soit une application isométrique de Z_p sur la boule $r + Z_p$, donc de chacune des boules $B(h, k)$ de Z_p sur chacune des boules $B(r+l, k)$ de $r + Z_p$, avec $\varphi(h) = r + a_l$, où $a_l \in B(l, k)$. On a alors

$$I_\varphi(y) = \frac{1}{p^k} \sum_{0 \leqslant h \leqslant p^k - 1} e_p(y\varphi(h)) = \frac{1}{p^k} \sum_{0 \leqslant l \leqslant p^k - 1} e_p(yr + ya_l)$$

$$= \frac{e_p(yr)}{p^k} \sum_{0 \leqslant l \leqslant p^k - 1} e_p(yl) = 0.$$

Donc, *si* $y \in Q_p \setminus Z_p$ *et* $\varphi \in \mathrm{Isom}(Z_p, Q_p)$, *alors* $I_\varphi(y) = 0$.

5.2. (a) Soit $J(y) = \int_{U_p} e_p(yx)\,dx$, où $v(y) \leqslant -2$. On a d'après 5.1 (a):

$$J(y) = \int_{Z_p} e_p(yx)\,dx - \int_{pZ_p} e_p(yx)\,dx = \int_{Z_p} e_p(yx)\,dx - p^{-1} \int_{Z_p} e_p(pyz)\,dz = 0.$$

Donc, *si* $y \in Q_p \setminus p^{-1} Z_p$, *alors* $J(y) = 0$.

(b) Soit $J_\varphi(y) = \int_{U_p} e_p(y\varphi(x))\,dx$, où $v(y) \leqslant -2$ et $\varphi \in \mathrm{Isom}(U_p, Q_p)$. Soit φ^* un prolongement de φ sur Z_p tel que $\varphi^* \in \mathrm{Isom}(Z_p, Q_p)$; alors $x \to \frac{\varphi^*(px)}{p}$ est une application isométrique de Z_p dans Q_p. On a, d'après 5.1. (b):

$$J_\varphi(y) = \int_{Z_p} e_p(y\varphi^*(x))\,dx - \int_{pZ_p} e_p(y\varphi^*(x))\,dx$$

$$= \int_{Z_p} e_p(y\varphi^*(x))\,dx - p^{-1} \int_{Z_p} e_p\left(py\,\frac{\varphi^*(pz)}{p}\right) dz = 0.$$

Donc, *si* $y \in Q_p \setminus p^{-1} Z_p$ *et* $\varphi \in \mathrm{Isom}(U_p, Q_p)$, *alors* $J_\varphi(y) = 0$.

6. Exemples.

6.1. Posons $F(x) = ax$, où $a \in Q_p^*$, pour tout $x \in Q_p$; on a, pour $h \in N$, en posant $x = p^{-T} y$:

$$\sigma_T(F, h) = p^{-T} \int_{p^{-T} Z_p} e_p(hax)\,dx = \int_{Z_p} e_p(hap^{-T} y)\,dy,$$

et cette intégrale est nulle si $v(ha) - T \leqslant -1$, c'est-à-dire si $T \geqslant v(ha) + 1$; il en résulte que $\lim_{T\to\infty} \sigma_T(F, h) = 0$ pour tout $h \in N$. On voit finalement que *la fonction* $x \to a_1 x + a_0$, *où* $a_1 \in Q_p^*$, $a_0 \in Q_p$, *est C-e.r.* (mod 1).

6.2. Soit f *une application μ-mesurable de* Z_p *dans* Q_p, et posons

$$F_a(x) = ax + f([x]_p), \quad \text{où} \quad a \in Z_p, \text{ pour tout } x \in Q_p.$$

Si $a = 0$, *la fonction* F_0 *n'est pas C-e.r.* (mod 1); en effet, en posant

$$(a, b)_f^{Z_p} = \mu(\{x \in Z_p \mid a \leqslant \langle f(x) \rangle_p < b\}),$$

on a $(T, a, b)_{F_0} = p^T (a, b)_f^{Z_p}$ pour $0 \leqslant a < b \leqslant 1$, $T \geqslant 0$; si F_0, définie sur Q_p, était C-e.r. (mod 1), alors f, définie sur Z_p, le serait elle aussi, et cela est impossible, puisque $\mu(Z_p) = 1$.

Si $a \in Z_p^*$, formons, pour $h \in N$, $T \geqslant 0$:

$$\sigma_T(F_a, h) = p^{-T} \sum_{r \in r_p^T} \int_{r + Z_p} e_p(hax)\, e_p(hf([x]_p))\,dx,$$

d'où, en posant $x = r + y$:

$$\sigma_T(F_a, h) = p^{-T} \int_{Z_p} e_p(hF_a(y))\,dy \sum_{r \in r_p^T} e_p(har).$$

Ce dernier $\sum$, qui s'écrit $\sum_{0 \leqslant k \leqslant p^T - 1} e_p(hakp^{-T})$, est égal, si $T > v(ha)$, à $\frac{e_p(ha)-1}{e_p(hap^{-T})-1} = 0$, de sorte que $\sigma_T(F_a, h) = 0$ pour $T > v(ha)$; donc $\lim_{T\to\infty} \sigma_T(F_a, h) = 0$ pour tout $h \in N$. Ainsi, *la fonction* F_a, *où* $a \in Z_p^*$, *est C-e.r.* (mod 1).

En particulier, *la fonction* $x \to a_1 \langle x \rangle_p + a_0$, *où* $a_1 \in Z_p^*$, $a_0 \in Q_p^*$, *est C-e.r.* (mod 1).

6.3. Comme $\operatorname{cotg} \frac{a}{x} - \frac{x}{a}$ et $\operatorname{coséc} \frac{a}{x} - \frac{x}{a}$, où $a \in Q_p^*$, continues en x sur l'ouvert $Q_p \setminus p^{v(a)} Z_p$ de Q_p, tendent vers 0 quand $|x|_p \to \infty$, il résulte de 4.2 que *les fonctions* $x \to \operatorname{cotg} \frac{a}{x}$, $x \to \operatorname{coséc} \frac{a}{x}$, *où* $a \in Q_p^*$, *sont C-e.r.* (mod 1).

On notera que $x \to \operatorname{cotg} \frac{a}{x}$, $x \to \operatorname{cos\acute{e}c} \frac{a}{x}$, où $a \in \boldsymbol{Q}_p^*$, sont deux applications homométriques de $\boldsymbol{Q}_p \setminus p^{v(a)} \boldsymbol{Z}_p$ sur $\boldsymbol{Q}_p \setminus \boldsymbol{Z}_p$.

6.4. Posons (cf. V-3.3) $E_p = \{k \in \boldsymbol{Z}^* \mid (k, p) = (k, p-1) = 1\}$. Si $n \in E_p$, tout $x \in \boldsymbol{U}_p$ admet une seule racine n-ième dans $\boldsymbol{U}_p$, donc tout $x \in V_p(n) = \bigcup_{k \in \boldsymbol{Z}} p^{kn} \boldsymbol{U}_p$ admet une seule racine n-ième dans $\boldsymbol{Q}_p$, notée $x^{1/n}$.

Soit alors $E_p^+ = E_p \cap \boldsymbol{N}$, et posons $F(x) = a x^{1/n}$, où $a \in \boldsymbol{Q}_p^*$, $n \in E_p^+$, pour tout $x \in V_p(n)$; la fonction F est continue sur l'ouvert $\Delta = V_p(n)$ de $\boldsymbol{Q}_p$. Posons $x = p^{-nt} y$, de sorte que y décrit $\boldsymbol{U}_p$ quand x décrit $p^{-nt} \boldsymbol{U}_p$. Calculons, pour $h \in \boldsymbol{N}$:

$$I_t = \int_{p^{-nt} \boldsymbol{U}_p} e_p\big(hF(x)\big)\, dx = p^{nt} \int_{\boldsymbol{U}_p} e_p(h a p^{-t} y^{1/n})\, dy.$$

Comme $x \to x^{1/n}$ est une isométrie de $\boldsymbol{U}_p$, on sait, d'après 5.2 (b), que cette dernière intégrale est nulle si $v(ha) - t \leqslant -2$, c'est-à-dire si $t \geqslant v(ha) + 2$. Posant $t_1 = v(ha) + 1$, on voit que $I_t = 0$ pour $t > t_1$.

Cela étant, pour $T \geqslant n(t_1 + 1)$, $h \in \boldsymbol{N}$, on a $\sigma_T^{\Delta}(F, h) = A_T + B_T$, en posant

$$A_T = \frac{1}{\mu(\Delta_T)} \int_{\Delta_{nt_1}} e_p\big(hF(x)\big)\, dx, \qquad B_T = \frac{1}{\mu(\Delta_T)} \sum_{t_1 + 1 \leqslant t \leqslant [T/n]} I_t.$$

D'après ce qui précède, on a $B_T = 0$; d'autre part $|A_T| \leqslant \dfrac{p^{nt_1}}{\mu(\Delta_T)}$ qui tend vers 0 quand $T \to \infty$, car $\mu(\Delta) = \infty$. Finalement donc $\lim\limits_{T \to \infty} \sigma_T^{\Delta}(F, h) = 0$, et cela pour tout $h \in \boldsymbol{N}$, d'où le résultat suivant:

La fonction F, définie sur $V_p(n)$ par $F(x) = a x^{1/n}$, où $a \in \boldsymbol{Q}_p^*$, $n \in E_p^+$, est C-e.r. (mod 1).

6.5. Posons $F(x) = a/x$, où $a \in \boldsymbol{U}_p$, pour tout $x \in \boldsymbol{Z}_p^*$; on sait que F n'est pas C-e.r. (mod 1). Soit $m(r)$ la masse de répartition (mod 1) de F au point $r \in \boldsymbol{r}_p$. Pour que $a/x \in \boldsymbol{Z}_p$, il faut et il suffit que $x \in \boldsymbol{U}_p$; donc $m(0) = \mu(\boldsymbol{U}_p) = (p-1)/p$. Soit $r \neq 0$; pour que $a/x \in r + \boldsymbol{Z}_p$, il faut et il suffit que $v(x) = -v(r)$ et que $a \in rx + p^{-v(r)} \boldsymbol{Z}_p$, c'est-à-dire que $x \in a/r + p^{-2v(r)} \boldsymbol{Z}_p$; donc $m(r) = p^{2v(r)}$. Finalement, on obtient

$$m(r) = |r|_p^{-2} \quad \text{si} \quad r \in \boldsymbol{r}_p^*, \qquad m(0) = (p-1) p^{-1},$$

et on vérifie aussitôt que

$$\sum_{r \in \boldsymbol{r}_p} m(r) = (p-1) \sum_{k \in \boldsymbol{N}} p^{-k} = 1.$$

7. Condition suffisante de C-équirépartition (mod 1).

7.1 Soit F une application de $\boldsymbol{Q}_p$ dans $\boldsymbol{Q}_p$, et soit B une boule ouverte de $\boldsymbol{Q}_p$. La fonction F est dite *homométrique sur B* si

$$\left| \frac{F(x_1) - F(x_2)}{x_1 - x_2} \right|_p$$

est constant quels que soient $x_1 \in B$, $x_2 \in B$, $x_1 \neq x_2$; cette constante, dite *rapport d'homométrie de F sur B*, est notée $|F, B|_p$. Si $0 \notin B$, tous les points de B ont une même valeur absolue p-adique > 0, notée $|B|_p$.

THÉORÈME 1. *Soit une partition de $\boldsymbol{Q}_p^*$ en boules ouvertes B, et soit F une fonction μ-mesurable sur une partie μ-mesurable Δ de $\boldsymbol{Q}_p$ telle que $B \subset \Delta$ quand $|B|_p \to \infty$; si F est homométrique sur B quand $|B|_p \to \infty$ et si*

$$\lim_{|B|_p \to \infty} \mu(B) |F, B|_p = \infty, \tag{4}$$

alors F est C-e.r. (mod 1).

Il existe t_1 tel que, pour $t > t_1$, la fonction F soit homométrique sur toute boule B de la couronne $p^{-t} \boldsymbol{U}_p$; or cette couronne, étant fermée, contient un nombre fini de boules B (on le voit aussitôt par l'absurde), disons K_t boules

$$B_{k,t} = a_{k,t} p^{-t} + p^{-l_{k,t}} Z_p,$$

où $k = 1, \ldots, K_t$, avec $a_{k,t} \in \boldsymbol{U}_p$ et $l_{k,t} \leqslant t - 1$ pour $k = 1, \ldots, K_t$. On pose

$$x = a_{k,t} p^{-t} + p^{-l_{k,t}} y,$$

de sorte que y décrit $\boldsymbol{Z}_p$ quand x décrit $B_{k,t}$. Posons d'autre part

$$|F, B_{k,t}|_p = p^{\lambda_{k,t}} \quad \text{pour} \quad t > t_1,\ k = 1, \ldots, K_t,$$

et soit φ l'application de $\boldsymbol{Z}_p$ dans $\boldsymbol{Q}_p$ définie par

$$\varphi(y) = p^{\lambda_{k,t} + l_{k,t}} F(x).$$

Prenant $y_1 \in \boldsymbol{Z}_p$, $y_2 \in \boldsymbol{Z}_p$, auxquels correspondent $x_1 \in B_{k,t}$, $x_2 \in B_{k,t}$, on a

$$\varphi(y_1) - \varphi(y_2) = p^{\lambda_{k,t} + l_{k,t}} \big(F(x_1) - F(x_2)\big),$$

d'où

$$|\varphi(y_1) - \varphi(y_2)|_p = p^{-l_{k,t}} |x_1 - x_2|_p = |y_1 - y_2|_p,$$

ce qui montre que φ est une application isométrique de $\boldsymbol{Z}_p$ dans $\boldsymbol{Q}_p$.

Dès lors, calculons, pour $t > t_1$, $h \in \boldsymbol{N}$:

$$I_{k,t} = \int_{B_{k,t}} e_p\big(hF(x)\big)\, dx = p^{l_{k,t}} \int_{\boldsymbol{Z}_p} e_p\big(h p^{-\lambda_{k,t} - l_{k,t}} \varphi(y)\big)\, dy.$$

On sait, d'après 5.1 (b), que cette dernière intégrale est nulle si

$$v(h)-\lambda_{k,t}-l_{k,t} \leqslant -1 \quad \text{c'est-à-dire si } \lambda_{k,t}+l_{k,t} \geqslant v(h)+1.$$

Comme par hypothèse $\lim\limits_{t\to\infty}(\lambda_{k,t}+l_{k,t}) = \infty$ quel que soit $k = 1, \ldots, K_t$, on voit que, h étant fixé, il existe $t_2 \geqslant t_1$ tel que, pour $t > t_2$, cette condition soit vérifiée, et alors $I_{k,t} = 0$ pour $t > t_2$, $k = 1, \ldots, K_t$.

Cela étant, pour $T > t_2$, $h \in \boldsymbol{N}$, on a $\sigma_T^{\Delta}(F, h) = A_T + B_T$, en posant

$$A_T = \frac{1}{\mu(\Delta_T)} \int_{\Delta_{t_2}} e_p(hF(x))\,dx, \qquad B_T = \frac{1}{\mu(\Delta_T)} \sum_{t_2+1\leqslant t\leqslant T} \; \sum_{1\leqslant k\leqslant K_t} I_{k,t}.$$

D'après ce qui précède, on a $B_T = 0$; d'autre part $|A_T| \leqslant p^{t_2}/\mu(\Delta_T)$ qui tend vers 0 quand $T \to \infty$. Finalement donc $\lim\limits_{T\to\infty} \sigma_T(F, h) = 0$, et cela pour tout $h \in \boldsymbol{N}$, ce qui établit le théorème 1.

Soit m entier $\geqslant 0$; si la partition envisagée de $\boldsymbol{Q}_p^*$ est la réunion des partitions de toutes les couronnes $p^{-t}\boldsymbol{U}_p$ en $K_t = (p-1)p^m$ boules égales $B_{k,t}$ (en particulier, la réunion de toutes les boules maximales de $\boldsymbol{Q}_p^*$), alors $l_{k,t} = t-m-1$, $\mu(B) = p^{t-m-1} = p^{-m-1}|B|_p$, et la condition (4) s'écrit

$$\text{(4')} \qquad \lim_{|B|_p\to\infty} |B|_p |F, B|_p = \infty.$$

7.2. Soit F une application de $\boldsymbol{Q}_p$ dans $\boldsymbol{Q}_p$, et soit $x \in \boldsymbol{Q}_p$. Si F est *strictement dérivable* et *régulière* au point x (cf. [21]), c'est-à-dire si

$$\lim_{(x_1,x_2)\to(x,x)} \frac{F(x_1)-F(x_2)}{x_1-x_2} = F'(x) \neq 0,$$

alors il existe une boule ouverte $B(x)$ telle que, pour $x_1 \in B(x)$, $x_2 \in B(x)$, $x_1 \neq x_2$, on ait

$$\left|\frac{F(x_1)-F(x_2)}{x_1-x_2}\right|_p = |F'(x)|_p,$$

c'est-à-dire que F est homométrique au voisinage de x. Soit $B_0(x)$ la boule maximale d'homométrie de F au voisinage de $x \in \boldsymbol{Q}_p^*$ qui ne contient pas 0; son rayon sera noté $\varrho_F(x)$, de sorte que $\varrho_F(x) \leqslant p^{-1}|x|_p$. Dès lors, on a:

Corollaire 1. *Soit F une fonction μ-mesurable sur une partie μ-mesurable Δ de $\boldsymbol{Q}_p$ telle que $x \in \Delta$ quand $|x|_p \to \infty$; si F est strictement dérivable et régulière quand $|x|_p \to \infty$ et si*

$$\text{(5)} \qquad \lim_{|x|_p\to\infty} \varrho_F(x)\,|F'(x)|_p = \infty,$$

alors F est C-e.r. (mod 1).

En effet, pour $|x|_p > p^{t_1}$, l'ensemble des boules $B_0(x)$ distinctes constitue une partition de $\boldsymbol{Q}_p \setminus p^{-t_1}\boldsymbol{Z}_p$ en boules ouvertes; F est homométrique sur $B_0(x)$ quand $|x|_p \to \infty$, et l'on a

$$\mu(B_0(x)) = \varrho_F(x) \quad \text{et} \quad |F, B_0(x)|_p = |F'(x)|_p;$$

la condition (4) donne alors (5).

Soit $m \in \boldsymbol{N}$; si $\varrho_F(x) \geqslant p^{-m}|x|_p$ quand $|x|_p \to \infty$, la condition (5) est vérifiée dès qu'on a

$$\text{(5')} \qquad \lim_{|x|_p\to\infty} |xF'(x)|_p = \infty,$$

ce qui fournit un analogue p-adique d'un théorème de L. Kuipers [16].

Le théorème 1 et le corollaire 1 sont applicables en particulier à toute fonction F *continue sur un voisinage ouvert Δ du point à l'infini de $\boldsymbol{Q}_p$*.

8. Applications.

8.1. C-équirépartition (mod 1) **des polynômes $P(x)$ non constants.** Posons

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

où $a_k \in \boldsymbol{Q}_p$ pour $k = 0, 1, \ldots, n$, avec $a_n \neq 0$, $n \in \boldsymbol{N}$, pour tout $x \in \boldsymbol{Q}_p$; la fonction P est continue sur $\boldsymbol{Q}_p$.

Montrons d'abord que P est homométrique sur $B_{k,t} = \nu_k p^{-t} + p^{-t+2}\boldsymbol{Z}_p$ quand $t \to \infty$, où ν_k désigne le k-ième entier naturel non divisible par p, avec $k = 1, 2, \ldots, p(p-1)$. Prenons x_1, x_2 dans $B_{k,t}$, et posons

$$x_1 - x_2 = p^{-t+2}y, \quad \text{où} \quad y \in \boldsymbol{Z}_p.$$

On a alors, quel que soit $m \in \boldsymbol{N}$:

$$x_1^m - x_2^m = \sum_{1\leqslant h\leqslant m} \binom{m}{h} x_2^{m-h} p^{h(-t+2)} y^h = (x_1-x_2) \sum_{1\leqslant h\leqslant m} \binom{m}{h} x_2^{m-h} p^{(h-1)(-t+2)} y^{h-1}.$$

De $\binom{m}{h} = \dfrac{m}{h}\binom{m-1}{h-1}$, on déduit $v\left(\binom{m}{h}\right) \geqslant v(m) - v(h) \geqslant v(m) - h + 1$ pour $1 \leqslant h \leqslant m$. Dès lors on a, pour $1 \leqslant h \leqslant m$:

$$\begin{aligned} v\left(\binom{m}{h} x_2^{m-h} p^{(h-1)(-t+2)} y^{h-1}\right) &\geqslant v(m) - (m-h)t + (h-1)(-t+1+v(y)) \\ &= v(m) - (m-1)t + (h-1)(1+v(y)), \end{aligned}$$

et pour $h = 1$:

$$v\left(\binom{m}{1} x_2^{m-1}\right) = v(m) - (m-1)t.$$

Comme $v(y) \geqslant 0$, on voit que $(h-1)(1+v(y)) \geqslant 1$ pour $h \geqslant 2$, de sorte que

$$v\left(\binom{m}{h} x_2^{m-h} p^{(h-1)(-t+2)} y^{h-1}\right) > v\left(\binom{m}{1} x_2^{m-1}\right) \quad \text{pour} \quad 2 \leqslant h \leqslant m.$$

Il en résulte qu'on a, pour $x_1 \in B_{k,t}, x_2 \in B_{k,t}, x_1 \neq x_2$, quel que soit $m \in \boldsymbol{N}$:

$$v\left(\frac{x_1^m - x_2^m}{x_1 - x_2}\right) = v(m) - (m-1)t.$$

Formons

$$\frac{P(x_1) - P(x_2)}{x_1 - x_2} = \sum_{1 \leqslant h \leqslant n} a_h \frac{x_1^h - x_2^h}{x_1 - x_2}.$$

Puisque

$$v\left(a_h \frac{x_1^h - x_2^h}{x_1 - x_2}\right) = v(a_h) + v(h) - (h-1)t,$$

il existe t_1 tel que, pour $t > t_1$, la valuation du dernier terme soit strictement inférieure à celle des termes précédents, donc tel qu'on ait

$$v\left(\frac{P(x_1) - P(x_2)}{x_1 - x_2}\right) = v(a_n) + v(n) - (n-1)t,$$

quels que soient $x_1 \in B_{k,t}, x_2 \in B_{k,t}, x_1 \neq x_2$; ainsi P est homométrique sur $B_{k,t}$ pour $t > t_1$, quel que soit $k = 1, 2, \ldots, p(p-1)$.

Il en résulte que la condition (4') est applicable à P, avec ici $m = 1$. Or $|B_{k,t}|_p \, |P, B_{k,t}|_p = |na_n|_p p^{nt} \to \infty$ quand $t \to \infty$, puisque $n \geqslant 1$; on a donc:

Théorème 2. *Toute fonction polynomiale non constante définie sur $\boldsymbol{Q}_p$ et à coefficients dans $\boldsymbol{Q}_p$ est C-e.r.* (mod 1).

8.2. C-**équirépartition** (mod 1) **des fractions rationnelles** $F(x)$ **telles que** $\lim\limits_{|x|_p \to \infty} |F(x)|_p = \infty$. Soit $F(x) = \dfrac{A(x)}{B(x)}$ irréductible, où $A(x) = \sum\limits_{0 \leqslant k \leqslant n} a_k x^k$, $B(x) = \sum\limits_{0 \leqslant h \leqslant m} \beta_h x^h$, $a_k, \beta_h \in \boldsymbol{Q}_p$ pour $k = 0, \ldots, n$ et $h = 0, \ldots, m$, avec $a_n \neq 0, \beta_m \neq 0, n > m \geqslant 0$; F est définie et continue sur l'ouvert $\Delta = \{x \in \boldsymbol{Q}_p | \; B(x) \neq 0\}$ de $\boldsymbol{Q}_p$, et $\mu(\boldsymbol{Q}_p \setminus \Delta) = 0$.

Si $m = 0$, alors F, définie sur $\boldsymbol{Q}_p$, est C-e.r. (mod 1) (théorème 2).

Si $m \geqslant 1$, la division euclidienne de $A(x)$ par $B(x)$ donne, pour $x \in \boldsymbol{Q}_p$:

$$A(x) - B(x)Q(x) = R(x) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant r} \gamma_k x^k \quad \text{où} \quad 0 \leqslant r < m, \ \gamma_r \neq 0,$$

d'où, pour $x \in \Delta$:

$$F(x) - Q(x) = \frac{R(x)}{B(x)} \text{ irréductible.}$$

Pour $x \in \Delta$, $|x|_p$ assez grand, on a

$$|F(x) - Q(x)|_p = \left|\frac{\gamma_r}{\beta_m} x^{r-m}\right|_p$$

qui tend vers 0 quand $|x|_p \to \infty$, de sorte que $|F(x) - Q(x)|_p \leqslant 1$ pour $x \in \Delta$, $|x|_p \to \infty$. Comme $\deg Q = n - m \geqslant 1$, la fonction Q définie sur $\boldsymbol{Q}_p$, donc aussi sa restriction à Δ, sont C-e.r. (mod 1); dès lors, d'après 4.2, on obtient:

Corollaire 2. *Toute fonction fraction rationnelle irréductible F définie sur $\boldsymbol{Q}_p$, sauf en ses pôles, et à coefficients dans $\boldsymbol{Q}_p$, telle que*

$$\lim_{|x|_p \to \infty} |F(x)|_p = \infty,$$

est C-e.r. (mod 1).

8.3. Soit

$$P(x) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} a_k x^k,$$

où $a_k \in \boldsymbol{Q}_p$ pour $k = 0, \ldots, n$, avec $a_n \neq 0$, $n \in \boldsymbol{N}$, et, utilisant le prolongement continu de la fonction logarithmique sur $\boldsymbol{Q}_p^*$ introduit dans V-4.3 (a), posons

$$F(x) = P(x) \log x \quad \text{pour tout } x \in \boldsymbol{Q}_p^*;$$

F est définie et continue sur l'ouvert $\Delta = \boldsymbol{Q}_p^*$ de $\boldsymbol{Q}_p$, voisinage du point à l'infini.

Montrons d'abord que F est homométrique sur $B_{k,t} = kp^{\;t} + p^{-t+1}\boldsymbol{Z}_p$ quand $t \to \infty$, quel que soit $k = 1, \ldots, p-1$. On sait que $x \to x \exp x$ est une isométrie de $p\boldsymbol{Z}_p$; on a donc, pour $x_1 \in \boldsymbol{Q}_p^*$, $x_2 \in \boldsymbol{Q}_p^*$ et pour tout $h \in \boldsymbol{Z}$:

$$v(\log x_1^h \exp \log x_1^h - \log x_2^h \exp \log x_2^h) = v(\log x_1^h - \log x_2^h),$$

d'où

$$v(\log x_1 \exp \log x_1^h - \log x_2 \exp \log x_2^h) = v(\log x_1 - \log x_2).$$

Prenons x_1, x_2 dans $B_{k,t}$; le premier membre vaut alors

$$v(\zeta_{x_1^h |x_1|_p^h} x_1^h |x_1|_p^h \log x_1 - \zeta_{x_2^h |x_2|_p^h} x_2^h |x_2|_p^h \log x_2)$$
$$= v(\zeta_k^h x_1^h p^{ht} \log x_1 - \zeta_k^h x_2^h p^{ht} \log x_2) = v(x_1^h \log x_1 - x_2^h \log x_2) + ht,$$

et le second membre vaut

$$v\left(\log \frac{x_1}{x_2}\right) = v\left(\frac{x_1}{x_2} - 1\right) = v(x_1 - x_2) + t;$$

on a donc, pour $x_1 \in B_{k,t}$, $x_2 \in B_{k,t}$, $x_1 \neq x_2$, quel que soit $h \in \boldsymbol{Z}$:

$$v\left(\frac{x_1^h \log x_1 - x_2^h \log x_2}{x_1 - x_2}\right) = -(h-1)t.$$

Formons

$$\frac{F(x_1) - F(x_2)}{x_1 - x_2} = \sum_{1 \leqslant h \leqslant n} a_h \frac{x_1^h \log x_1 - x_2^h \log x_2}{x_1 - x_2}.$$

Puisque

$$v\left(a_h\frac{x_1^h\log x_1-x_2^h\log x_2}{x_1-x_2}\right)=v(a_h)-(h-1)t,$$

il existe t_1 tel que, pour $t>t_1$, la valuation du dernier terme soit strictement inférieure à celles des termes précédents, donc tel qu'on ait

$$v\left(\frac{F(x_1)-F(x_2)}{x_1-x_2}\right)=v(a_n)-(n-1)t$$

quels que soient $x_1\in B_{k,t}$, $x_2\in B_{k,t}$, $x_1\neq x_2$; ainsi F est homométrique sur $B_{k,t}$ pour $t>t_1$, quel que soit $k=1,2,\ldots,p-1$.

Il en résulte que la condition (4') est applicable à F, avec ici $m=0$. Or $|B_{k,t}|_p|F,B_{k,t}|_p=|a_n|_p p^{nt}\to\infty$ quand $t\to\infty$, puisque $n\geqslant 1$; on a donc:

Théorème 3. *Si P est une fonction polynomiale non constante à coefficients dans $\boldsymbol{Q}_p$, alors la fonction F définie sur $\boldsymbol{Q}_p^*$ par $F(x)=P(x)\log x$ est C-e.r.* (mod 1).

8.4. C-équirépartition (mod 1) **de certaines fonctions entières.** On va démontrer le théorème suivant:

Théorème 4. *Soit F la fonction définie sur $\boldsymbol{Q}_p$ par*

$$F(x)=\sum_{n\geqslant n_0}\frac{a_n}{kn+h}x^{kn+h},$$

où $n_0\in\boldsymbol{N}$, k entier $\geqslant 2$, h entier $\geqslant 1-kn_0$, $a_n\in\boldsymbol{Q}_p^*$ pour $n\geqslant n_0$, avec $\lim_{n\to\infty}|a_n|_p^{-1/n}=\infty$; si l'on a, pour $n\geqslant n_0$:

$$v\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\notin k\boldsymbol{Z},\qquad v\left(\frac{a_na_{n+2}}{a_{n+1}^2}\right)\geqslant 1,$$

alors γF, où $\gamma\in\boldsymbol{Q}_p^*$, est C-e.r. (mod 1).

F est définie et continue sur $\boldsymbol{Q}_p$. Prenons x_1,x_2 dans

$$B_{l,t}=\nu_lp^{-t}+p^{-t+2}\boldsymbol{Z}_p,$$

où $t\in\boldsymbol{Z}$, $l=1,2,\ldots,p(p-1)$, et formons, pour $x_1\neq x_2$:

$$\frac{F(x_1)-F(x_2)}{x_1-x_2}=\sum_{n\geqslant n_0}\frac{a_n}{kn+h}\,\frac{x_1^{kn+h}-x_2^{kn+h}}{x_1-x_2},\qquad\text{soit}\ \sum_{n\geqslant n_0}A_n.$$

On a (cf. 8.1)

$$v(A_n)=v(a_n)-(kn+h-1)t,$$

d'où les différences première et seconde

$$\Delta_1v(A_n)=v(A_{n+1})-v(A_n)=v\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)-kt,$$

$$\Delta_2v(A_n)=\Delta_1v(A_{n+1})-\Delta_1v(A_n)=v\left(\frac{a_na_{n+2}}{a_{n+1}^2}\right).$$

Puisque $\Delta_2v(A_n)\geqslant 1$, on voit d'abord que, t étant fixé, $\Delta_1v(A_n)$ est strictement croissant en n pour $n\geqslant n_0$; d'autre part on a $\Delta_1v(A_n)\notin k\boldsymbol{Z}$, ce qui entraîne $\Delta_1v(A_n)\neq 0$ pour $n\geqslant n_0$, quel que soit $t\in\boldsymbol{Z}$. Ainsi, quel que soit $t\in\boldsymbol{Z}$, la suite $\big(\Delta_1v(A_n)\big)_{n\geqslant n_0}$ est une suite strictement croissante de $\boldsymbol{Z}^*$, et il existe $n_t\geqslant n_0$ tel que $\Delta_1v(A_{n_t})$ soit son premier terme >0; on a alors:

$$v(A_{n_t})<v(A_{n_t+1})<v(A_{n_t+2})<\ldots\qquad\text{si } n_t=n_0,$$

$$v(A_{n_0})>v(A_{n_0+1})>\ldots>v(A_{n_t-1})>v(A_{n_t})<v(A_{n_t+1})<\ldots\qquad\text{si } n_t>n_0,$$

ce qui entraîne

$$v\left(\frac{F(x_1)-F(x_2)}{x_1-x_2}\right)=v(A_{n_t})\leqslant v(A_{n_0})=v(a_{n_0})-(kn_0+h-1)t$$

quels que soient $x_1\in B_{l,t}$, $x_2\in B_{l,t}$, $x_1\neq x_2$, et F est homométrique sur $B_{l,t}$ pour $t\in\boldsymbol{Z}$, $l=1,2,\ldots,p(p-1)$.

Il en résulte que la condition (4') est applicable à F, avec ici $m=1$. Or

$$|B_{l,t}|_p|F,B_{l,t}|_p=p^t|A_{n_t}|_p\geqslant p^t|A_{n_0}|_p=|a_{n_0}|_pp^{(kn_0+h)t}\to\infty$$

quand $t\to\infty$, puisque $kn_0+h\geqslant 1$; donc F est C-e.r. (mod 1), et il en est de même de γF, où $\gamma\in\boldsymbol{Q}_p^*$, car les conditions imposées à F sont invariantes par homothétie de rapport non nul sur les a_n.

Exemples. (a) Prenant $k=2l$, où $l\in\boldsymbol{N}$, et $a_n=\alpha^{n^r}$, où $\alpha\in p\boldsymbol{Z}_p^*$, $v(\alpha)\in 2\boldsymbol{N}-1$, $r\in\boldsymbol{N}+1$, on a

$$\frac{v(a_n)}{n}=n^{r-1}v(\alpha)\to\infty\qquad\text{quand}\qquad n\to\infty,$$

$$v\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\big((n+1)^r-n^r\big)v(\alpha)\notin 2\boldsymbol{Z},$$

$$v\left(\frac{a_na_{n+2}}{a_{n+1}^2}\right)=\big(n^r+(n+2)^r-2(n+1)^r\big)v(\alpha)\geqslant 1+3^r-2^{r+1}\geqslant 1+3^2-2^3=2.$$

Donc, si l'on pose sur $\boldsymbol{Q}_p$

$$F(x)=\sum_{n\geqslant n_0}\frac{\alpha^{n^r}}{2ln+h}x^{2ln+h},$$

où $n_0, l \in \boldsymbol{N}, h \in \boldsymbol{N}-2ln_0$, $v(a) \in 2\boldsymbol{N}-1$, $r \in \boldsymbol{N}+1$, alors γF, où $\gamma \in \boldsymbol{Q}_p^*$, est C-e.r. (mod 1).

(b) Prenant $k = 2l$, où $l \in \boldsymbol{N}$, et $a_n = a^{n^n}$, où $a \in p\boldsymbol{Z}_p^*$, $v(a) \in 2\boldsymbol{N}-1$, on a

$$\frac{v(a_n)}{n} = n^{n-1}v(a) \to \infty \quad \text{quand} \quad n \to \infty,$$

$$v\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \left((n+1)^{n+1} - n^n\right)v(a) \notin 2\boldsymbol{Z},$$

$$v\left(\frac{a_n a_{n+2}}{a_{n+1}^2}\right) = \left(n^n + (n+2)^{n+2} - 2(n+1)^{n+1}\right)v(a) \geqslant 1+3^3-2^3 = 20.$$

Donc, si l'on pose sur $\boldsymbol{Q}_p$

$$F(x) = \sum_{n \geqslant n_0} \frac{a^{n^n}}{2ln+h} x^{2ln+h},$$

où $n_0, l \in \boldsymbol{N}, h \in \boldsymbol{N}-2ln_0$, $v(a) \in 2\boldsymbol{N}-1$, alors γF, où $\gamma \in \boldsymbol{Q}_p^*$, est C-e.r. (mod 1).

(c) Prenant $v(h) = 0$, $k = 2lp$, où $l \in \boldsymbol{N}$, et $a_n = a^{n^r}(2lpn+h)$, où $a \in p\boldsymbol{Z}_p^*$, $v(a) \in 2\boldsymbol{N}-1$, $r \in \boldsymbol{N}+1$, toutes les conditions du théorème 4 sont satisfaites, comme dans l'exemple (a), puisque $v(2lpn+h) = 0$. Donc, si l'on pose sur $\boldsymbol{Q}_p$

$$F(x) = \sum_{n \geqslant n_0} a^{n^r} x^{2lpn+h}$$

où $n_0, l \in \boldsymbol{N}, h \in \boldsymbol{N}-2lpn_0$, $p \nmid h$, $v(a) \in 2\boldsymbol{N}-1$, $r \in \boldsymbol{N}+1$, alors γF, où $\gamma \in \boldsymbol{Q}_p^*$, est C-e.r. (mod 1).

(d) Soit $a \in p\boldsymbol{Z}_p^*$, et posons

$$P(a, x) = \prod_{s \geqslant 0} (1+a^{2s+1}x),$$

produit infini convergent sur $\boldsymbol{Q}_p$. De la relation fonctionnelle $P(a, x) = (1+ax)P(a, a^2x)$, on déduit aisément

$$\prod_{s \geqslant 0} (1+a^{2s+1}x) = 1 + \sum_{n \geqslant 1} \frac{a^{n^2}x^n}{(1-a^2)(1-a^4)\dots(1-a^{2n})},$$

d'où encore, en y remplaçant x par $a^{2s_0}x$, où $s_0 \in \boldsymbol{Z}^+$:

$$\prod_{s \geqslant s_0} (1+a^{2s+1}x) = 1 + \sum_{n \geqslant 1} \frac{a^{n(n+2s_0)}x^n}{(1-a^2)(1-a^4)\dots(1-a^{2n})}.$$

Dès lors, posons sur $\boldsymbol{Q}_p^*$

$$F(x) = x^{-h} \prod_{s \geqslant s_0} (1+a^{2s+1}x^{2lp}),$$

où $s_0 \in \boldsymbol{Z}^+$, $l \in \boldsymbol{N}$, $v(a) \in 2\boldsymbol{N}-1$, $1 \leqslant h \leqslant 2lp-1$, $p \nmid h$, de sorte que

$$F(x) = x^{-h} + \sum_{n \geqslant 1} \frac{a^{n(n+2s_0)}x^{2lpn-h}}{(1-a^2)(1-a^4)\dots(1-a^{2n})}, \qquad \text{soit } x^{-h}+G(x).$$

Pour la fonction G, avec ici $n_0 = 1$, $k = 2lp$, compte tenu de $v(2lpn-h) = 0$, on a

$$\frac{v(a_n)}{n} = (n+2s_0)v(a) \to \infty \quad \text{quand} \quad n \to \infty,$$

$$v\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \left((n+1)(n+1+2s_0) - n(n+2s_0)\right)v(a) \notin 2\boldsymbol{Z},$$

$$v\left(\frac{a_n a_{n+2}}{a_{n+1}^2}\right) = 2v(a) \geqslant 2;$$

donc γG, où $\gamma \in \boldsymbol{Q}_p^*$, est C-e.r. (mod 1). Mais

$$|\gamma F(x) - \gamma G(x)|_p = |\gamma|_p |x|_p^{-h} \to 0 \quad \text{quand} \quad |x|_p \to \infty,$$

puisque $h \geqslant 1$; il en résulte, d'après 4.2, que γF, où $\gamma \in \boldsymbol{Q}_p^*$, est C-e.r. (mod 1).

CHAPITRE VIII

RÉPARTITION DANS $\boldsymbol{Z}_p$

1. Fonction de répartition dans $\boldsymbol{Z}_p$. Les notations utilisées sont celles qui ont été introduites au début du chapitre VII. La suite $(x_n)_{n \in \boldsymbol{N}}$ désignera une suite de $\boldsymbol{Z}_p$.

1.1. DÉFINITION 1. Soit une suite (x_n) de $\boldsymbol{Z}_p$; étant donnés $N \in \boldsymbol{N}$ et $E \subset \boldsymbol{Z}_p$, on désigne par $(N, E)_x$ le nombre des n tels que $1 \leqslant n \leqslant N$ et $x_n \in E$; dans cette notation, la lettre x sera couramment sous-entendue.

Soit $\mathscr{A}$ l'algèbre des réunions finies de boules ouvertes (c'est-à-dire non ponctuelles) de $\boldsymbol{Z}_p$. On appelle *fonction de répartition de la suite* (x_n) *dans* $\boldsymbol{Z}_p$ toute fonction d'ensemble χ définie sur $\mathscr{A}$ telle qu'on ait, pour tout $E \in \mathscr{A}$:

$$\chi(E) = \lim_{N \to \infty} \frac{(N, E)}{N}.$$

χ prend ses valeurs dans $[0, 1]$, avec $\chi(\emptyset) = 0$ et $\chi(\boldsymbol{Z}_p) = 1$; de plus χ est additive sur $\mathscr{A}$; il en résulte que χ est une mesure de probabilité sur $\mathscr{A}$.

Si E est la boule $a+p^k\boldsymbol{Z}_p$, où $a\in\boldsymbol{Z}_p$, $k\in\boldsymbol{Z}^+$, on pose $E=B_k(a)$, $(N,E)=(N,a,k)$, $\chi(E)=\chi_k(a)$; pour que la suite (x_n) admette une fonction de répartition dans $\boldsymbol{Z}_p$, soit χ, il faut et il suffit qu'on ait, pour tout $a\in\boldsymbol{Z}_p$ et pour tout $k\in\boldsymbol{Z}^+$:

$$\chi_k(a)=\lim_{N\to\infty}\frac{(N,a,k)}{N}.$$

1.2. Critère d'existence d'une fonction de répartition dans $\boldsymbol{Z}_p$. On pose, pour tout $N\in\boldsymbol{N}$ et pour tout $r\in\boldsymbol{r}_p$:

$$\sigma_N(x,r)=\frac{1}{N}\sum_{1\leqslant n\leqslant N}e_p(rx_n)$$

et, sous réserve d'existence, pour tout $r\in\boldsymbol{r}_p$:

$$c_r(x)=\lim_{N\to\infty}\sigma_N(x,r),$$

notations dans lesquelles la lettre x sera couramment sous-entendue; on a $|c_r|\leqslant 1$ et $c_{1-r}=\bar{c}_r$.

Critère 1. *Pour que la suite (x_n) admette une fonction de répartition dans $\boldsymbol{Z}_p$, soit χ, il faut et il suffit que c_r existe pour tout $r\in\boldsymbol{r}_p$; alors on a, pour tout $k\in\boldsymbol{Z}^+$, pour tout $r\in\boldsymbol{r}_p^k$:*

$$c_r=\sum_{0\leqslant l\leqslant p^k-1}e_p(rl)\chi_k(l) \tag{1}$$

et, pour tout $k\in\boldsymbol{Z}^+$, pour tout $a\in\boldsymbol{Z}_p$:

$$\chi_k(a)=\frac{1}{p^k}\sum_{r\in\boldsymbol{r}_p^k}c_re_p(-ra). \tag{2}$$

Nécessité. Soit $k\in\boldsymbol{Z}^+$ et soit $r\in\boldsymbol{r}_p^k$; on a $e_p(rx_n)=e_p(rl)$ pour tous les $x_n\in B_k(l)$, où $l=0,1,\ldots,p^k-1$, de sorte que

$$\sigma_N(r)=\sum_{0\leqslant l\leqslant p^k-1}e_p(rl)\frac{(N,l,k)}{N}.$$

Cela montre que $\sigma_N(r)$ tend vers $\sum_{0\leqslant l\leqslant p^k-1}e_p(rl)\chi_k(l)$ quand $N\to\infty$; ainsi c_r existe pour tout $r\in\boldsymbol{r}_p$, et l'on a (1).

Suffisance. Soient $k\in\boldsymbol{Z}^+$, $a\in\boldsymbol{Z}_p$, et formons

$$A_N=\sum_{r\in\boldsymbol{r}_p^k}e_p(-ra)\sum_{1\leqslant n\leqslant N}e_p(rx_n)=\sum_{1\leqslant n\leqslant N}\sum_{r\in\boldsymbol{r}_p^k}e_p\big(r(x_n-a)\big).$$

Si $x_n\in B_k(a)$, la somme indiquée en dernier lieu est égale à p^k, et si $x_n\notin B_k(a)$, elle est égale à

$$\sum_{0\leqslant h\leqslant p^k-1}e_p\left(\frac{h(x_n-a)}{p^k}\right)=\frac{e_p(x_n-a)-1}{e_p\left(\dfrac{x_n-a}{p^k}\right)-1}=0;$$

on a donc

$$A_N=\sum_{\substack{1\leqslant n\leqslant N\\ x_n\in B_k(a)}}p^k=p^k(N,a,k),$$

d'où

$$\frac{(N,a,k)}{N}=\frac{1}{p^k}\sum_{r\in\boldsymbol{r}_p^k}e_p(-ra)\sigma_N(r).$$

Cela montre que $\dfrac{(N,a,k)}{N}$ tend vers $\dfrac{1}{p^k}\sum_{r\in\boldsymbol{r}_p^k}c_re_p(-ra)$ quand $N\to\infty$, pour tout $k\in\boldsymbol{Z}^+$ et pour tout $a\in\boldsymbol{Z}_p$; ainsi la suite (x_n) admet une fonction de répartition dans $\boldsymbol{Z}_p$, soit χ, et l'on a (2).

Forme intégrale de c_r. Soit $\mathscr{B}$ la σ-algèbre engendrée par $\mathscr{A}$, c'est-à-dire la tribu des ensembles boréliens de $\boldsymbol{Z}_p$. On sait que χ se prolonge de manière unique en une mesure de probabilité $\bar{\chi}$ sur $\mathscr{B}$.

Puisque $e_p(rl)$ est la valeur constante de $e_p(ra)$ sur la boule $B_k(l)$ de mesure $\chi_k(l)$, la relation (1) montre que c_r s'exprime à l'aide d'une intégrale par rapport à la mesure $\bar{\chi}$, et l'*on a, pour tout $r\in\boldsymbol{r}_p$*:

$$c_r=\int_{\boldsymbol{Z}_p}e_p(ra)\,d\bar{\chi}(a). \tag{3}$$

Parité de χ. La fonction χ est dite *paire* si $\chi_k(a)=\chi_k(-a)$ pour tout $a\in\boldsymbol{Z}_p$, pour tout $k\in\boldsymbol{Z}^+$. D'après (2) et (3), pour que χ soit paire, il faut et il suffit que $c_r=\bar{c}_r$, c'est-à-dire que c_r soit réel pour tout $r\in\boldsymbol{r}_p$.

1.3. Continuité et singularités de χ. a étant fixé dans $\boldsymbol{Z}_p$, la suite $k\to\chi_k(a)$ est convergente dans $\boldsymbol{R}$, puisqu'elle est décroissante et que ses termes sont $\geqslant 0$; dès lors on définit sur $\boldsymbol{Z}_p$ la *fonction des sauts de* χ en posant, pour tout $a\in\boldsymbol{Z}_p$:

$$s(a)=\lim_{k\to\infty}\chi_k(a).$$

s prend ses valeurs dans $[0,1]$.

Soit $a\in\boldsymbol{Z}_p$. La fonction χ est dite *continue au point* a si $\lim\limits_{\mu(B)\to 0}\chi(B)=0$ quelle que soit la boule ouverte $B\subset\boldsymbol{Z}_p$ telle que $a\in B$.

Pour que χ soit continue au point a, il faut et il suffit que $s(a) = 0$. On voit aussitôt que l'ensemble des points de discontinuité de χ dans $\boldsymbol{Z}_p$ est dénombrable.

Soit $E_0 \in \mathscr{A}$. La fonction χ est dite *continue sur* E_0 si elle est continue en tout point de E_0. Pour que χ soit continue sur E_0, il faut et il suffit que $s(a) = 0$ pour tout $a \in E_0$. Cette dernière condition exprime aussi, puisque E_0 est un compact de $\boldsymbol{Z}_p$, que $\lim\limits_{\mu(B)\to 0} \chi(B) = 0$ quelle que soit la boule ouverte $B \subset E_0$, et même, plus généralement, que $\lim\limits_{\mu(E)\to 0} \chi(E) = 0$ quelle que soit la réunion finie de boules ouvertes $E \subset E_0$; autrement dit, pour la fonction χ, les deux propriétés (a) être continue sur E_0, (b) être absolument continue sur E_0, sont équivalentes.

On désigne par $D(E)$ l'ensemble dénombrable des points de discontinuité de χ dans $E \in \mathscr{A}$. La *fonction des singularités de* χ est la fonction d'ensemble Ψ définie sur $\mathscr{A}$ par

$$\Psi(E) = \sum_{a \in D(E)} s(a).$$

Ψ prend ses valeurs dans $[0, 1]$, avec $\Psi(\emptyset) = 0$, et Ψ est additive sur $\mathscr{A}$.

Les fonctions χ et Ψ ont les mêmes points de discontinuité dans $\boldsymbol{Z}_p$, avec les mêmes sauts en ces points; leur différence $\chi - \Psi$ est une fonction d'ensemble Φ qui est $\geqslant 0$, additive et absolument continue sur $\boldsymbol{Z}_p$, et $\chi = \Phi + \Psi$ est alors la décomposition de Lebesgue de la fonction χ sur $\mathscr{A}$. On notera $\overline{\Psi}$, $\overline{\Phi}$ les prolongements respectifs de Ψ, Φ sur $\mathscr{B}$.

Soit $E_0 \in \mathscr{A}$. La fonction χ est dite

(a) *singulière sur* E_0 si $\chi(E_0) = \Psi(E_0)$;

(b) *simplement singulière sur* E_0 si χ présente dans E_0 un saut unique égal à $\chi(E_0)$.

1.4. Somme des carrés des sauts de χ dans $\boldsymbol{Z}_p$. Supposons que la suite (x_n) admette une fonction de répartition dans $\boldsymbol{Z}_p$, soit χ. On a, d'après (1), pour tout $r \in \boldsymbol{r}_p^k$, où $k \in \boldsymbol{Z}^+$:

$$|c_r|^2 = c_r \bar{c}_r = \sum_{0 \leqslant l \leqslant p^k - 1} e_p(rl)\chi_k(l) \sum_{0 \leqslant m \leqslant p^k - 1} e_p(-rm)\chi_k(m),$$

d'où

$$\sum_{r \in \boldsymbol{r}_p^k} |c_r|^2 = \sum_{0 \leqslant l, m \leqslant p^k - 1} \chi_k(l)\chi_k(m) \sum_{r \in \boldsymbol{r}_p^k} e_p\big(r(l-m)\big).$$

Au second membre, la dernière somme indiquée est égale à p^k si $l = m$, et elle est nulle si $l \neq m$; on a donc, pour tout $k \in \boldsymbol{Z}^+$:

$$\frac{1}{p^k} \sum_{r \in \boldsymbol{r}_p^k} |c_r|^2 = \sum_{0 \leqslant l \leqslant p^k - 1} \chi_k^2(l). \tag{4}$$

Mais $\chi_k(l)$ est la valeur constante de $\chi_k(a)$ sur la boule $B_k(l)$ de mesure $\chi_k(l)$; dès lors le premier membre de (4) s'exprime à l'aide d'une intégrale par rapport à la mesure $\bar{\chi}$, et l'on a, pour tout $k \in \boldsymbol{Z}^+$:

$$\frac{1}{p^k} \sum_{r \in \boldsymbol{r}_p^k} |c_r|^2 = \int_{\boldsymbol{Z}_p} \chi_k(a)\, d\bar{\chi}(a).$$

Or $\chi_k(a) \downarrow s(a)$ quand $k \to \infty$ et

$$\int_{\boldsymbol{Z}_p} \chi_k(a)\, d\bar{\chi}(a) \leqslant 1 \quad \text{pour tout } k \in \boldsymbol{Z}^+;$$

donc, d'après le théorème de la convergence monotone, quand $k \to \infty$, l'intégrale qui figure au second membre précédent tend en décroissant vers

$$\int_{\boldsymbol{Z}_p} s(a)\, d\bar{\chi}(a) = \sum_{a \in D(\boldsymbol{Z}_p)} s^2(a),$$

de sorte qu'on obtient:

THÉORÈME 1. *Si la suite (x_n) admet une fonction de répartition χ dans $\boldsymbol{Z}_p$, alors on a*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{p^k} \sum_{r \in \boldsymbol{r}_p^k} |c_r|^2 = \sum_{a \in D(\boldsymbol{Z}_p)} s^2(a), \tag{5}$$

où s désigne la fonction des sauts de χ sur $\boldsymbol{Z}_p$.

1.5. Critère de continuité de χ sur $\boldsymbol{Z}_p$. Pour que χ soit continue sur $\boldsymbol{Z}_p$, il faut et il suffit que

$$\sum_{a \in D(\boldsymbol{Z}_p)} s^2(a) = 0,$$

d'où, d'après (5):

CRITÈRE 2. *Pour que la suite (x_n) admette une fonction de répartition dans $\boldsymbol{Z}_p$ continue sur $\boldsymbol{Z}_p$, il faut et il suffit que c_r existe pour tout $r \in \boldsymbol{r}_p$ et qu'on ait*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{p^k} \sum_{r \in \boldsymbol{r}_p^k} |c_r|^2 = 0. \tag{6}$$

Une condition équivalente est la suivante:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{p^k} \sum_{r \in \boldsymbol{r}_p^k} |c_r| = 0, \tag{6'}$$

dont la suffisance est évidente, puisqu'on a $|c_r| \leqslant 1$, et dont la nécessité résulte de l'inégalité de Schwarz

$$\frac{1}{p^k}\sum_{r\in \boldsymbol{r}_p^k} |c_r| \leqslant \left(\frac{1}{p^k}\sum_{r\in \boldsymbol{r}_p^k} |c_r|^2\right)^{1/2} \quad \text{pour tout } k\in \boldsymbol{Z}^+.$$

On obtient ainsi un analogue p-adique d'un théorème de N. Wiener [25] et de I. Schoenberg [20], concernant la répartition (mod1) dans $\boldsymbol{R}$ (cf. IV-2.2).

La condition (6′) équivaut encore à

$$(6'') \qquad \lim_{k\to\infty} \frac{1}{p^k}\sum_{r\in \boldsymbol{r}_p^{(k)}} |c_r| = 0,$$

car on a

$$\frac{1}{p^k}\sum_{r\in \boldsymbol{r}_p^{(k)}} c_r e_p(-ra) = \chi_k(a) - \frac{1}{p}\chi_{k-1}(a)$$

pour tout $a\in \boldsymbol{Z}_p$, pour tout $k\in \boldsymbol{Z}^+$, de sorte que (6″) entraîne $s(a) = 0$ pour tout $a\in \boldsymbol{Z}_p$.

1.6. Critère de singularité simple de χ sur $\boldsymbol{Z}_p$. (2) et (3) montrent que χ présente un saut égal à 1 au point $a\in \boldsymbol{Z}_p$ si et seulement si $c_r = e_p(ra)$ pour tout $r\in \boldsymbol{r}_p$; dès lors, si χ est simplement singulière sur $\boldsymbol{Z}_p$, on a $|c_r| = 1$ pour tout $r\in \boldsymbol{r}_p$, et réciproquement, si cette condition est satisfaite, (5) donne

$$\sum_{\beta\in D(\boldsymbol{Z}_p)} s^2(\beta) = 1,$$

ce qui exige qu'il existe $a\in \boldsymbol{Z}_p$ tel que $s(a) = 1$. On a donc:

Critère 3. *Pour que la suite (x_n) admette une fonction de répartition dans $\boldsymbol{Z}_p$ simplement singulière sur $\boldsymbol{Z}_p$, il faut et il suffit que c_r existe et $|c_r| = 1$ pour tout $r\in \boldsymbol{r}_p$.*

Notons d'ailleurs que cette condition est équivalente à chacune des trois suivantes:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{p^k}\sum_{r\in \boldsymbol{r}_p^k}|c_r|^2 = 1, \qquad \lim_{k\to\infty}\frac{1}{p^k}\sum_{r\in \boldsymbol{r}_p^k}|c_r| = 1, \qquad \lim_{|r|_p\to\infty}|c_r| = 1,$$

dont la première est fournie directement par (5).

1.7. Critère de singularité de χ sur $\boldsymbol{Z}_p$. Si χ est singulière sur $\boldsymbol{Z}_p$, soient a_m, où $m = 1, 2, \ldots$, ses points de discontinuité, et soit $s_m > 0$

le saut de χ au point a_m, de sorte que $\sum_{m\geqslant 1} s_m = 1$; on a, d'après (3), pour tout $r\in \boldsymbol{r}_p$:

$$c_r = \int_{\boldsymbol{Z}_p} e_p(ra)\,d\overline{\Psi}(a) = \sum_{m\geqslant 1} s_m e_p(ra_m),$$

somme d'un nombre fini ou infini de termes.

Réciproquement, si les c_r sont d'une telle forme, avec $\sum_{m\geqslant 1} s_m = 1$, on a, d'après (2), pour tout $a\in \boldsymbol{Z}_p$ et pour tout $k\in \boldsymbol{Z}^+$:

$$\chi_k(a) = \frac{1}{p^k}\sum_{r\in \boldsymbol{r}_p^k}\sum_{m\geqslant 1} s_m e_p\big(r(a_m - a)\big) = \frac{1}{p^k}\sum_{m\geqslant 1} s_m \sum_{0\leqslant h\leqslant p^k-1} e_p\left(\frac{h(a_m-a)}{p^k}\right).$$

La dernière somme indiquée est égale à p^k si $a\in B_k(a_m)$ et nulle si $a\notin B_k(a_m)$; on a donc

$$\chi_k(a) = \sum_{m\geqslant 1} s_m \psi_{B_k(a_m)}(a).$$

Cette série est uniformément convergente en k sur $\boldsymbol{Z}_p$ et $\psi_{B_k(a_m)}(a)$, quand $k\to\infty$, tend vers 1 si $a = a_m$ et vers 0 si $a \neq a_m$; il en résulte que

$$s(a_m) = s_m \quad \text{pour } m = 1, 2, \ldots,$$
$$s(a) = 0 \quad \text{si } a \neq a_m \text{ pour } m = 1, 2, \ldots,$$

et, puisque $\sum_{m\geqslant 1} s_m = 1$, la fonction χ est singulière sur $\boldsymbol{Z}_p$. En résumé:

Critère 4. *Pour que la suite (x_n) admette une fonction de répartition dans $\boldsymbol{Z}_p$ singulière sur $\boldsymbol{Z}_p$, il faut et il suffit qu'il existe une suite finie ou infinie (a_m) d'entiers p-adiques et une suite finie ou infinie associée (s_m) de réels > 0 telles qu'on ait $\sum_{m\geqslant 1} s_m = 1$ et, pour tout $r\in \boldsymbol{r}_p$:*

$$c_r = \sum_{m\geqslant 1} s_m e_p(ra_m);$$

alors on a, pour tout $E\in \mathscr{A}$:

$$\chi(E) = \sum_{a_m\in E} s_m.$$

2. Fonction densité de répartition dans $\boldsymbol{Z}_p$.

2.1. Définition 2. Supposons que la suite (x_n) admette une fonction de répartition χ dans $\boldsymbol{Z}_p$, et soit $\chi = \Phi + \Psi$ la décomposition de Lebesgue de χ sur $\mathscr{A}$. On sait que χ, étant additive et croissante sur $\mathscr{A}$, est *dérivable* p.p. dans $\boldsymbol{Z}_p$, c'est-à-dire que la suite

$$k \to \frac{\chi_k(a)}{\mu(B_k(a))} = p^k\chi_k(a)$$

est convergente dans $\boldsymbol{R}$ pour presque tous les $\alpha \in \boldsymbol{Z}_p$; on pose alors, pour tout point α où χ est dérivable:

$$\varrho(\alpha) = \lim_{k\to\infty} p^k \chi_k(\alpha). \tag{7}$$

Soit $E \in \mathscr{A}$; la relation

$$\chi(E) = \int_E d\overline{\Phi}(\alpha) + \int_E d\overline{\Psi}(\alpha)$$

donne, puisque $\overline{\Phi}$ est absolument continue par rapport à μ et que $d\overline{\Phi} = \varrho d\mu$ p.p. dans E:

$$\chi(E) = \int_E \varrho(\alpha)\,d\alpha + \sum_{\alpha \in D(E)} s(\alpha),$$

d'où en particulier

$$\int_{\boldsymbol{Z}_p} \varrho(\alpha)\,d\alpha + \sum_{\alpha \in D(\boldsymbol{Z}_p)} s(\alpha) = 1.$$

χ est continue sur $\boldsymbol{Z}_p$ si et seulement si $\int_{\boldsymbol{Z}_p} \varrho(\alpha)\,d\alpha = 1$, et χ est singulière sur $\boldsymbol{Z}_p$ si et seulement si $\varrho(\alpha) = 0$ p.p. dans $\boldsymbol{Z}_p$.

Lorsque χ est dérivable sur $\boldsymbol{Z}_p$, la fonction ϱ, définie par (7) sur $\boldsymbol{Z}_p$, est dite *fonction densité de répartition de la suite* (x_n) *dans* $\boldsymbol{Z}_p$.

2.2. Expressions de $\varrho(\alpha)$ p.p. dans $\boldsymbol{Z}_p$ et de c_r sur $\boldsymbol{r}_p$. Supposons que c_r existe pour tout $r \in \boldsymbol{r}_p$; alors la suite

$$k \to p^k \chi_k(\alpha) = \sum_{r \in \boldsymbol{r}_p^k} c_r e_p(-r\alpha)$$

converge vers $\varrho(\alpha)$ p.p. dans $\boldsymbol{Z}_p$, de sorte qu'*on a, pour presque tous les* $\alpha \in \boldsymbol{Z}_p$:

$$\varrho(\alpha) = \sum_{k\geqslant 0} \sum_{r \in \boldsymbol{r}_p^{(k)}} c_r e_p(-r\alpha). \tag{8}$$

D'autre part, d'après (3):

$$c_r = \int_{\boldsymbol{Z}_p} e_p(r\alpha)\,d\overline{\Phi}(\alpha) + \int_{\boldsymbol{Z}_p} e_p(r\alpha)\,d\overline{\Psi}(\alpha);$$

puisque $\overline{\Phi}$ est absolument continue par rapport à μ et que $d\overline{\Phi} = \varrho d\mu$ p.p. dans $\boldsymbol{Z}_p$, *on a, pour tout* $r \in \boldsymbol{r}_p$:

$$c_r = \int_{\boldsymbol{Z}_p} e_p(r\alpha)\,\varrho(\alpha)\,d\alpha + \sum_{\alpha \in D(\boldsymbol{Z}_p)} e_p(r\alpha)\,s(\alpha), \tag{9}$$

où la série indiquée est absolument convergente.

2.3. Critère de continuité de ϱ sur $\boldsymbol{Z}_p$.

CRITÈRE 5. *Pour que la suite (x_n) admette une fonction densité de répartition dans $\boldsymbol{Z}_p$ continue sur $\boldsymbol{Z}_p$, soit ϱ, il faut il suffit que c_r existe pour tout $r \in \boldsymbol{r}_p$ et que la série*

$$\sum_{k\geqslant 0} \sum_{r \in \boldsymbol{r}_p^{(k)}} c_r e_p(-r\alpha)$$

soit uniformément convergente sur $\boldsymbol{Z}_p$; alors on a (8) *pour tout $\alpha \in \boldsymbol{Z}_p$, et l'on a, pour tout $r \in \boldsymbol{r}_p$:*

$$c_r = \int_{\boldsymbol{Z}_p} e_p(r\alpha)\,\varrho(\alpha)\,d\alpha. \tag{10}$$

S u f f i s a n c e. La suite (x_n) admet une fonction de répartition χ dans $\boldsymbol{Z}_p$, et l'on a, pour tout $\alpha \in \boldsymbol{Z}_p$ et pour tout $k \in \boldsymbol{Z}^+$:

$$p^k \chi_k(\alpha) = \sum_{r \in \boldsymbol{r}_p^k} c_r e_p(-r\alpha).$$

Puisque la série (8) est convergente sur $\boldsymbol{Z}_p$, on voit que $p^k\chi_k(\alpha)$ tend vers une limite finie quand $k \to \infty$, donc la fonction ϱ existe, définie sur $\boldsymbol{Z}_p$ par la relation (8). De plus ϱ est continue sur $\boldsymbol{Z}_p$, puisque c'est la fonction somme d'une série uniformément convergente sur $\boldsymbol{Z}_p$ de fonctions continues sur $\boldsymbol{Z}_p$. Enfin (9) donne ici (10).

N é c e s s i t é. D'abord χ est continue sur $\boldsymbol{Z}_p$, et l'on a, d'après (9), pour tout $r \in \boldsymbol{r}_p$:

$$c_r = \int_{\boldsymbol{Z}_p} e_p(r\beta)\,\varrho(\beta)\,d\beta,$$

d'où, pour tout $\alpha \in \boldsymbol{Z}_p$ et pour tout $k \in \boldsymbol{Z}^+$:

$$\sum_{r \in \boldsymbol{r}_p^k} c_r e_p(-r\alpha) = \int_{\boldsymbol{Z}_p} \sum_{0\leqslant h\leqslant p^k-1} e_p\left(\frac{h(\beta-\alpha)}{p^k}\right) \varrho(\beta)\,d\beta.$$

La somme qui figure sous le signe d'intégration est égale à p^k si $\beta \in B_k(\alpha)$ et nulle si $\beta \notin B_k(\alpha)$; donc

$$\sum_{r \in \boldsymbol{r}_p^k} c_r e_p(-r\alpha) = p^k \int_{B_k(\alpha)} \varrho(\beta)\,d\beta, \qquad \text{soit } \lambda_k(\alpha).$$

ϱ, étant continue sur le compact $\boldsymbol{Z}_p$, est bornée sur $\boldsymbol{Z}_p$, et $\lambda_k(\alpha)$ est compris entre la borne inférieure $m_k(\alpha)$ et la borne supérieure $M_k(\alpha)$ de ϱ sur $B_k(\alpha)$, bornes qui tendent l'une et l'autre vers $\varrho(\alpha)$ quand $k \to \infty$; ainsi la série (8) est convergente sur $\boldsymbol{Z}_p$, et l'on a la relation (8) sur $\boldsymbol{Z}_p$.

Soit enfin $R_k(\alpha)$ le reste d'ordre k de la série (8); on a

$$|R_k(\alpha)| = |\varrho(\alpha) - \lambda_k(\alpha)| \leqslant M_k(\alpha) - m_k(\alpha).$$

La fonction ϱ, étant continue sur le compact $\boldsymbol{Z}_p$, est uniformément continue sur $\boldsymbol{Z}_p$; quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe un entier k_ε tel que

$$k > k_\varepsilon \Rightarrow M_k(a) - m_k(a) < \varepsilon \quad \text{pour tout } a \in \boldsymbol{Z}_p,$$

donc tel que

$$k > k_\varepsilon \Rightarrow |R_k(a)| < \varepsilon \quad \text{pour tout } a \in \boldsymbol{Z}_p;$$

ainsi la série (8) est uniformément convergente sur $\boldsymbol{Z}_p$.

2.4. Intégrale de ϱ^2 sur $\boldsymbol{Z}_p$. Supposons que la suite (x_n) admette une fonction densité de répartition dans $\boldsymbol{Z}_p$, soit ϱ, continue sur $\boldsymbol{Z}_p$. On a, d'après (10), pour tout $r \in \boldsymbol{r}_p$:

$$|c_r|^2 = c_r \bar{c}_r = \int_{\boldsymbol{Z}_p} e_p(ra)\varrho(a)\,da \int_{\boldsymbol{Z}_p} e_p(-r\beta)\varrho(\beta)\,d\beta,$$

d'où, pour tout $k \in \boldsymbol{Z}^+$:

$$\sum_{r \in \boldsymbol{r}_p^k} |c_r|^2 = \int_{\boldsymbol{Z}_p} \varrho(a)\,da \int_{\boldsymbol{Z}_p} \sum_{0 \leqslant h \leqslant p^k - 1} e_p\left(\frac{h(a-\beta)}{p^k}\right)\varrho(\beta)\,d\beta.$$

La seconde intégrale indiquée a été calculée plus haut et désignée par $\lambda_k(a)$; on a donc

$$\sum_{r \in \boldsymbol{r}_p^k} |c_r|^2 = \int_{\boldsymbol{Z}_p} \lambda_k(a)\varrho(a)\,da.$$

On a vu que $\lambda_k(a) \to \varrho(a)$ quand $k \to \infty$. D'autre part, si $M(\varrho)$ désigne la borne supérieure de ϱ sur $\boldsymbol{Z}_p$, on a $\varrho(a)\lambda_k(a) \leqslant M^2(\varrho)$ pour tout $a \in \boldsymbol{Z}_p$ et pour tout $k \in \boldsymbol{Z}^+$. Dès lors, d'après le théorème de la convergence bornée, l'intégrale qui figure au second membre précédent tend vers $\int_{\boldsymbol{Z}_p} \varrho^2(a)\,da$ quand $k \to \infty$, de sorte qu'on obtient:

THÉORÈME 2. *Si la suite (x_n) admet une fonction densité de répartition dans $\boldsymbol{Z}_p$ continue sur $\boldsymbol{Z}_p$, soit ϱ, alors on a*

$$\sum_{r \in \boldsymbol{r}_p} |c_r|^2 = \int_{\boldsymbol{Z}_p} \varrho^2(a)\,da. \tag{11}$$

Cette relation nous fournit une formule de Parseval en p-adique.

Remarque. D'après le critère 5, pour que la suite (x_n) admette une fonction densité de répartition dans $\boldsymbol{Z}_p$ continue sur $\boldsymbol{Z}_p$, *il suffit que la série $\sum_{r \in \boldsymbol{r}_p} |c_r|$ soit convergente*, et alors on a, pour tout $a \in \boldsymbol{Z}_p$:

$$\varrho(a) = \sum_{r \in \boldsymbol{r}_p} c_r e_p(-ra). \tag{12}$$

Il en résulte aussitôt qu'on a, pour tout $a \in \boldsymbol{Z}_p$:

$$\max\Big(0,\, 2 - \sum_{r \in \boldsymbol{r}_p} |c_r|\Big) \leqslant \varrho(a) \leqslant \sum_{r \in \boldsymbol{r}_p} |c_r|. \tag{13}$$

Puisque $d\bar{\chi}(a) = \varrho(a)\,da$, (11) donne

$$\sum_{r \in \boldsymbol{r}_p} |c_r|^2 = \int_{\boldsymbol{Z}_p} \varrho(a)\,d\bar{\chi}(a) \leqslant M(\varrho),$$

d'où l'encadrement suivant de $M(\varrho)$:

$$\sum_{r \in \boldsymbol{r}_p} |c_r|^2 \leqslant M(\varrho) \leqslant \sum_{r \in \boldsymbol{r}_p} |c_r|.$$

Enfin, d'après (13), pour qu'on ait de plus $\varrho > 0$ sur $\boldsymbol{Z}_p$, *il suffit qu'on ait* $\sum_{r \in \boldsymbol{r}_p} |c_r| < 2$; alors la répartition de la suite (x_n) est partout dense dans $\boldsymbol{Z}_p$.

3. Répartitions fondamentales dans $\boldsymbol{Z}_p$.

3.1. Équirépartition d'ordre k dans $\boldsymbol{Z}_p$; équirépartition dans $\boldsymbol{Z}_p$.

(a) Soit $k \in \boldsymbol{N}$; rappelons que la suite (x_n) est dite *équirépartie d'ordre k* [k-e.r.] *dans $\boldsymbol{Z}_p$* si $\chi_k(a) = 1/p^k$ pour tout $a \in \boldsymbol{Z}_p$ (cf. VI-3).

Si la suite (x_n) est k-e.r. dans $\boldsymbol{Z}_p$, elle est aussi k'-e.r. dans $\boldsymbol{Z}_p$ pour tout $k' \leqslant k$.

D'après (1) et (2), *la suite (x_n) est k-e.r. dans $\boldsymbol{Z}_p$, où $k \in \boldsymbol{N}$, si et seulement si $c_r = 0$ pour tout $r \in (\boldsymbol{r}_p^k)^*$*. Ce résultat est d'ailleurs évident, puisque les caractères du groupe additif discret $\boldsymbol{Z}_p/p^k\boldsymbol{Z}_p$ sont les $e_p(ra)$, où $r \in \boldsymbol{r}_p^k$.

(b) Rappelons que la suite (x_n) est dite *équirépartie* [e.r.] *dans* $\boldsymbol{Z}_p$ si elle est k-e.r. dans $\boldsymbol{Z}_p$ pour tout $k \in \boldsymbol{N}$ (cf. VI-3).

Dès lors *la suite (x_n) est e.r. dans $\boldsymbol{Z}_p$ si et seulement si $c_r = 0$ pour tout $r \in \boldsymbol{r}_p^*$*. Ce résultat est d'ailleurs évident, puisque les caractères continus du groupe additif compact $\boldsymbol{Z}_p$ sont les $e_p(ra)$, où $r \in \boldsymbol{r}_p$.

3.2. Bonne répartition d'ordre k dans $\boldsymbol{Z}_p$; très bonne répartition dans $\boldsymbol{Z}_p$.

(a) Soit $k \in \boldsymbol{N}$; d'après Y. Amice [1], la suite (x_n) est dite *bien répartie d'ordre k* [k-b.r.] *dans $\boldsymbol{Z}_p$* si $(Hp^k, a, k) = H$ pour tout $a \in \boldsymbol{Z}_p$, pour tout $H \in \boldsymbol{N}$. Or on a vu que

$$p^k(N, a, k) = \sum_{r \in \boldsymbol{r}_p^k} e_p(-ra) N\sigma_N(r).$$

La définition précédente se traduit donc par la condition

$$\sum_{r \in (\boldsymbol{r}_p^k)^*} e_p(-ra) Hp^k \sigma_{Hp^k}(r) = 0$$

pour tout $a \in \boldsymbol{Z}_p$, pour tout $H \in \boldsymbol{N}$; il en résulte que *la suite (x_n) est k-b.r. dans $\boldsymbol{Z}_p$, où $k \in \boldsymbol{N}$, si et seulement si $\sigma_{Hp^k}(r) = 0$ pour tout $r \in (\boldsymbol{r}_p^k)^*$, pour tout $H \in \boldsymbol{N}$.*

(b) D'après Y. Amice [1], la suite (x_n) est dite *très bien répartie* [t.b.r.] *dans* $\boldsymbol{Z}_p$ si elle est k-b.r. dans $\boldsymbol{Z}_p$ pour tout $k \in \boldsymbol{N}$.

Dès lors *la suite* (x_n) *est t.b.r. dans* $\boldsymbol{Z}_p$ *si et seulement si* $\sigma_{Hp^k}(r) = 0$ *pour tout* $k \in \boldsymbol{N}$, *pour tout* $r \in (r_p^k)^*$, *pour tout* $H \in \boldsymbol{N}$.

4. Critères de répartitions spéciales dans $\boldsymbol{Z}_p$.

4.1. Critère 6. *Pour que la suite* (x_n) *admette une fonction densité de répartition dans* $\boldsymbol{Z}_p$ *constante sur chaque boule de rayon* p^{-k} *dans* $\boldsymbol{Z}_p$, *il faut et il suffit que* c_r *existe pour tout* $r \in \boldsymbol{r}_p$ *et qu'on ait* $c_r = 0$ *pour tout* $r \in \boldsymbol{r}_p \setminus \boldsymbol{r}_p^k$.

Suffisance. Les conditions indiquées assurent la continuité sur $\boldsymbol{Z}_p$ de ϱ, ici définie par

$$\varrho(a) = \sum_{r \in \boldsymbol{r}_p^k} c_r e_p(-ra),$$

donc constante sur chaque boule $B_k \subset \boldsymbol{Z}_p$.

Nécessité. Soit ϱ_l la valeur constante de ϱ sur la boule $B_k(l)$, où $l = 0, 1, \ldots, p^k - 1$; on a, d'après (10), pour tout $r \in \boldsymbol{r}_p$:

$$c_r = \sum_{0 \leqslant l \leqslant p^k - 1} \varrho_l \int_{B_k(l)} e_p(ra)\, da,$$

d'où, en posant $a = l + p^k \beta$:

$$c_r = p^{-k} \Big(\sum_{0 \leqslant l \leqslant p^k - 1} \varrho_l e_p(rl) \Big) \int_{\boldsymbol{Z}_p} e_p(rp^k \beta)\, d\beta.$$

Si $r \in \boldsymbol{r}_p \setminus \boldsymbol{r}_p^k$, d'où $v(rp^k) \leqslant -1$, la dernière intégrale indiquée est nulle, et $c_r = 0$.

En particulier, pour $k = 0$, on retrouve le critère d'équirépartition dans $\boldsymbol{Z}_p$.

4.2. Critère 7. *Pour que la suite* (x_n) *admette une fonction de répartition dans* $\boldsymbol{Z}_p$, *soit* χ, *dérivable sur* $\boldsymbol{Z}_p^*$ *et dont la dérivée soit constante sur chaque couronne de* $\boldsymbol{Z}_p^*$ *dont l'origine est un centre, il faut et il suffit que* c_r *existe pour tout* $r \in \boldsymbol{r}_p$ *et que* c_r *soit constant sur* $\boldsymbol{r}_p^{(k)}$ *pour tout* $k \in \boldsymbol{N}$; *de plus* χ *est continue à l'origine si et seulement si* $\lim_{k \to \infty} c_{p^{-k}} = 0$, *et* χ *est dérivable à l'origine si et seulement si la série* $\sum_{k \geqslant 1} p^k c_{p^{-k}}$ *est convergente.*

Nécessité. Puisque χ est continue sur $\boldsymbol{Z}_p^*$, on a, d'après (9), pour tout $r \in \boldsymbol{r}_p$:

$$c_r = \int_{\boldsymbol{Z}_p} e_p(ra) \varrho(a)\, da + s(0).$$

Soit $r' \in \boldsymbol{r}_p$ tel que $v(r) = v(r')$, de sorte que $r' = r\eta$, où $\eta \in \boldsymbol{U}_p$. Le changement de variable $a = \eta\beta$ donne alors

$$c_r = \int_{\boldsymbol{Z}_p} e_p(r'\beta) \varrho(\eta\beta)\, d\beta + s(0),$$

et, puisque $\varrho(\eta\beta) = \varrho(\beta)$ pour tout $\beta \in \boldsymbol{Z}_p^*$, on a $c_r = c_{r'}$. Ainsi c_r est constant sur $\boldsymbol{r}_p^{(k)}$ pour tout $k \in \boldsymbol{N}$.

On notera que, χ étant paire, c_r est d'ailleurs réel pour tout $r \in \boldsymbol{r}_p$.

Suffisance. Par hypothèse, on a $c_r = c_{p^{-k}}$ pour tout $k \in \boldsymbol{N}$, pour tout $r \in \boldsymbol{r}_p^{(k)}$. Soit $a \in \boldsymbol{Z}_p^*$ et formons la série

$$\sum_{k \geqslant 0} \sum_{r \in \boldsymbol{r}_p^{(k)}} c_r e_p(-ra)$$

$$= 1 + \sum_{k \geqslant 1} c_{p^{-k}} \Big(\sum_{0 \leqslant h \leqslant p^k - 1} e_p\Big(-\frac{ha}{p^k}\Big) - \sum_{0 \leqslant h \leqslant p^{k-1} - 1} e_p\Big(-\frac{ha}{p^{k-1}}\Big) \Big)$$

$$= 1 + \sum_{k \geqslant 1} c_{p^{-k}} \big(p^k \psi_{B_k(0)}(a) - p^{k-1} \psi_{B_{k-1}(0)}(a)\big).$$

Le terme général étant nul pour $k > v(a) + 1$, cette série ne contient qu'un nombre fini de termes; donc χ est dérivable sur $\boldsymbol{Z}_p^*$, et l'on a, pour tout $a \in \boldsymbol{Z}_p^*$:

$$\varrho(a) = 1 - c_{p^{-1}} + \sum_{1 \leqslant k \leqslant v(a)} p^k (c_{p^{-k}} - c_{p^{-k-1}}) \psi_{B_k(0)}(a),$$

ou encore, avec la convention $c_1 = c_0 = 1$:

$$\varrho(a) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant v(a)} p^k (c_{p^{-k}} - c_{p^{-k-1}}) \psi_{B_k(0)}(a).$$

Cette expression de $\varrho(a)$ montre que ϱ est constante sur chaque couronne de $\boldsymbol{Z}_p^*$ centrée à l'origine; sa valeur sur la couronne $p^l \boldsymbol{U}_p$, où $l \in \boldsymbol{Z}^+$, est

$$\varrho_l = \sum_{0 \leqslant k \leqslant l} p^k (c_{p^{-k}} - c_{p^{-k-1}}).$$

Restent à établir les deux résultats supplémentaires annoncés. On a, d'après (2), pour tout $k \in \boldsymbol{N}$:

$$\sum_{r \in \boldsymbol{r}_p^{(k)}} c_r = p^k \chi_k(0) - p^{k-1} \chi_{k-1}(0).$$

Puisque le premier membre est ici égal à $(p^k - p^{k-1}) c_{p^{-k}}$, on voit que

$$(p-1) c_{p^{-k}} = p\chi_k(0) - \chi_{k-1}(0), \quad \text{d'où} \quad \lim_{k \to \infty} c_{p^{-k}} = s(0).$$

Enfin

$$p^k \chi_k(0) = \sum_{r \in \boldsymbol{r}_p^k} c_r = 1 + (p-1) \sum_{1 \leqslant h \leqslant k} p^{h-1} c_{p^{-h}},$$

de sorte que χ est dérivable à l'origine si et seulement si la série $\sum_{k \geqslant 1} p^k c_{p^{-k}}$ est convergente; on a alors

$$\varrho(0) = 1 + (p-1) \sum_{k \geqslant 1} p^{k-1} c_{p^{-k}}.$$

5. Répartition dans Z_p de la suite $\left(\left[\frac{1}{x_n}\right]_p\right)$, où la suite (x_n) est répartie dans Z_p^*.

(a) Soit (x_n) une suite de Z_p^*; posons $y_n = \left[\frac{1}{x_n}\right]_p$ pour tout $n \in N$, et calculons $(N, a, k)_y$, où $a \in Z_p$, $k \in N$.

1° La participation dans $(N, a, k)_y$ des $x_n \in U_p$ est égale au nombre des n tels qu'on ait $1 \leqslant n \leqslant N$, $x_n \in U_p$ et

$$\frac{1}{x_n} \in a + r_p + p^k Z_p. \tag{14}$$

Pour que la condition (14) soit satisfaite, il faut et il suffit qu'il existe $r \in r_p$ tel qu'on ait

$$(a+r)x_n \in 1 + p^k Z_p,$$

ce qui exige d'abord $r = 0$ et s'écrit alors $ax_n \in 1 + p^k Z_p$.

Si $a \in pZ_p$, la participation cherchée est nulle.

Si $a \in U_p$, cette participation est égale au nombre des n tels qu'on ait $1 \leqslant n \leqslant N$, $x_n \in U_p$ et $x_n \in B_k\left(\frac{1}{a}\right)$; puisque $B_k\left(\frac{1}{a}\right) \subset U_p$, elle est égale à $\left(N, \frac{1}{a}, k\right)_x$.

2° Soit $h \in N$; la participation dans $(N, a, k)_y$ des $x_n \in p^h U_p$ est égale au nombre des n tels qu'on ait $1 \leqslant n \leqslant N$, $x_n \in p^h U_p$ et (14).

Pour que la condition (14) soit satisfaite, il faut et il suffit qu'il existe $r \in r_p$ tel qu'on ait

$$(a+r)x_n \in 1 + p^{k+h} Z_p,$$

ce qui exige d'abord $r \in r_p^{(h)}$ et s'écrit alors $x_n \in \frac{1}{a+r} + p^{k+2h} Z_p$.

La participation cherchée est égale au nombre des n tels qu'on ait $1 \leqslant n \leqslant N$, $x_n \in p^h U_p$ et $x_n \in B_{k+2h}\left(\frac{1}{a+r}\right)$; puisque $B_{k+2h}\left(\frac{1}{a+r}\right) \subset p^h U_p$, elle est égale à

$$\sum_{r \in r_p^{(h)}} \left(N, \frac{1}{a+r}, k+2h\right)_x.$$

En résumé, on obtient, pour tout $a \in Z_p$, pour tout $k \in N$, pour tout $N \in N$:

$$(N, a, k)_y = \sum_{h \geqslant \operatorname{sgn} v(a)} \sum_{r \in r_p^{(h)}} \left(N, \frac{1}{a+r}, k+2h\right)_x. \tag{15}$$

(b) Soit $H \in N$ et désignons par $F_H(N)$ la somme partielle de la série (15) pour $\operatorname{sgn} v(a) \leqslant h \leqslant H$. La différence $(N, a, k)_y - F_H(N)$, qui est la participation dans $(N, a, k)_y$ des $x_n \in p^{H+1} Z_p$, est au plus égale à $(N, 0, H+1)_x$; on a donc

$$\frac{F_H(N)}{N} \leqslant \frac{(N, a, k)_y}{N} \leqslant \frac{F_H(N)}{N} + \frac{(N, 0, H+1)_x}{N}. \tag{16}$$

Supposons que la suite (x_n) admette une fonction de répartition dans Z_p, soit χ; alors on a

$$\lim_{N\to\infty} \frac{F_H(N)}{N} = \sum_{\operatorname{sgn} v(a) \leqslant h \leqslant H} \sum_{r \in r_p^{(h)}} \chi_{k+2h}\left(\frac{1}{a+r}\right), \quad \text{soit } S_H,$$

et (16) montre que, pour tout $H \in N$, pour tout $a \in Z_p$, pour tout $k \in N$, les limites inférieure et supérieure de $\frac{(N, a, k)_y}{N}$ quand $N \to \infty$ sont comprises entre S_H et $S_H + \chi_{H+1}(0)$.

Supposons de plus χ continue à l'origine; alors $\chi_H(0) \to 0$ quand $H \to \infty$. D'autre part la suite (S_H), qui est croissante et bornée supérieurement par 1, est convergente. Dès lors on a, pour tout $a \in Z_p$ et pour tout $k \in N$:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{(N, a, k)_y}{N} = \lim_{H\to\infty} S_H,$$

d'où le

THÉORÈME 3. *Si la suite (x_n) à termes non nuls admet une fonction de répartition dans Z_p, soit χ, continue à l'origine, alors la suite $\left(\left[\frac{1}{x_n}\right]_p\right)$ admet une fonction de répartition dans Z_p, soit χ^*, et l'on a, pour tout $a \in Z_p$, pour tout $k \in N$:*

$$\chi_k^*(a) = \sum_{h \geqslant \operatorname{sgn} v(a)} \sum_{r \in r_p^{(h)}} \chi_{k+2h}\left(\frac{1}{a+r}\right). \tag{17}$$

Remarque. (a) Si $\chi_k(a)$, où k fixé, ne dépend pas de $v(a)$, c'est-à-dire si la suite (x_n) admet une densité de répartition constante sur chaque couronne de Z_p^* centrée à l'origine, (17) montre que $\chi_k^*(a)$, où k fixé, ne dépend que de $\operatorname{sgn} v(a)$, c'est-à-dire que la suite (y_n) admet une densité de répartition constante respectivement sur U_p et sur pZ_p.

Par exemple, la suite $n \to \left[\frac{1}{n}\right]_p$ admet la fonction densité de répartition dans Z_p définie par

$$\varrho(a) = \frac{p+1}{p} \quad \text{si } a \in U_p, \qquad \varrho(a) = \frac{1}{p} \quad \text{si } a \in pZ_p.$$

(b) Si de plus $\chi(\boldsymbol{U}_p)=0$, alors $a\in\boldsymbol{U}_p$ et $a'\in p\boldsymbol{Z}_p$ entraînent

$$\chi_k^*(a)-\chi_k^*(a')=\chi_k\left(\frac{1}{a}\right)=0,$$

et la suite (y_n) est e.r. dans $\boldsymbol{Z}_p$.

Par exemple, la suite $n\to\left[\dfrac{1}{p^h n}\right]_p$, où $h\in\boldsymbol{N}$, est e.r. dans $\boldsymbol{Z}_p$.

Bibliographie

[1] Y. Amice, *Interpolation p-adique*, Bull. Soc. math. France, 92 (1964), p. 117-180 (Thèse Sc. math. Paris, 1963).

[2] A. Ammann, *Quelques propriétés concernant la répartition des suites de nombres module un*, Thèse Sc. math. Geneva, 1947, 39 p.

[3] F. Bertrandias, *Ensembles remarquables d'adèles algébriques*, Bull. Soc. math. France, Mémoire 4, 1965, 98 p. (Thèse Sc. math. Paris, 1965).

[4] J. Chauvineau, *Sur la répartition modulo 1 de certaines fonctions périodiques*, C. R. Acad. Sc. Paris, 252 (1961), p. 4090-4092.

[5] — *Équirépartition et équirépartition uniforme modulo* 1, Séminaire Delange-Pisot, 3 (7) (1961-1962), 35 p.

[6] — *Sur la répartition en valuation p-adique*, C. R. Acad. Sc. Paris, 259 (1964), p. 3907-3909.

[7] — *Quelques remarques sur les applications isométriques et la répartition dans un corps p-adique*, Séminaire Delange-Pisot, 6 (12) (1964-1965), 13 p.

[8] — *Complément au théorème métrique de Koksma dans* $\boldsymbol{R}$ *et dans* $\boldsymbol{Q}_p$, C. R. Acad. Sc. Paris, 260 (1965), p. 6252-6255.

[9] — *Sur la C-équirépartition modulo 1 en valuation p-adique*, C. R. Acad. Sc. Paris, 262 (1966), p. 557-559.

[10] J. Cigler und G. Helmberg, *Neuere Entwicklungen der Theorie der Gleichverteilung*, Jahr, Deutsch. Math. Vereinig. 64 (1) (1961), p. 1-50.

[11] P. Eymard, *Suites équiréparties dans un groupe compact*, Séminaire Dubreil-Pisot, 14 (3) (1960-1961), 11 p.

[12] G. Helmberg, *A theorem on equidistribution in compact groups*, Pacific J. Math. 8 (1958), p. 227-241.

[13] E. Hlawka, *Zur formalen Theorie der Gleichverteilung in kompakten Gruppen*, Rend. Circ. mat. Palermo, série 2, 4 (1955), p. 33-47.

[14] J. F. Koksma, *Ein mengentheoretischer Satz über die Gleichverteilung modulo Eins*, Compos. Math. 2 (1935), p. 250-258.

[15] — *Diophantische Approximationen*, Berlin, 1936, Ergebnisse der Mathematik, 4.

[16] L. Kuipers, *De asymptotische verdeling modulo 1 van de waarden van meetbare functies*, Thèse Sc. math. Amsterdam, 1947, 112 p.

[17] — *On real periodic functions and functions with periodic derivatives*, Indagationes Math. 12 (1950), p. 34-40; Nederl. Akad. Wetensch. 53 (1950), p. 226-232.

[18] I. Niven, *Uniform distribution of sequences of integers*, Trans. Amer. Math. Soc. 98 (1961), p. 52-61.

[19] I. I. Šapiro-Pyateckiĭ, *Une généralisation du concept d'équirépartition des parties fractionnaires* (en russe), Mat. Sbornik, nouvelle série, 30 (1952), p. 669-676.

[20] I. Schoenberg, *Über die asymptotische Verteilung reeller Zahlen* mod 1, Math. Z. 28 (1928), p. 171-199.

[21] F. Tison, *Comportement local d'une fonction d'une variable p-adique à valeurs p-adiques*, C. R. Acad. Sc. Paris, 259 (1964), p. 3154-3157.

[22] S. Uchiyama, *On the uniform distribution of sequences of integers*, Proc. Jap. Acad. 37 (1961), p. 605-609.

[23] J. G. Van der Corput, *Verteilungsfunktionen*, 1-8, Proc. Akad. Amsterdam, 38 (1935), p. 813-821, p. 1058-1066; 39 (1936), p. 10-19, p. 19-26, p. 149-153, p. 339-344, p. 489-494, p. 579-590.

[24] H. Weyl, *Über die Gleichverteilung von Zahlen modulo Eins*, Math. Ann. 77 (1916), p. 313-352.

[25] N. Wiener, *The quadratic variation of a function and its Fourier coefficients*, J. Math. Phys. 3 (1924), p. 72-94.

Reçu par la Rédaction le 10. 7. 1967