ACTA ARITHMETICA
XIV (1968)

Éléments algébriques remarquables dans un corps de séries formelles

par

MARTHE GRANDET-HUGOT (Caen)

§ 1. Introduction. Nous désignerons par S l'ensemble des nombres de Pisot-Vijayaraghavan c'est-à-dire: *l'ensemble des entiers algébriques réels: $\theta > 1$ ayant tous leurs conjugués autres que θ lui-même de valeur absolue strictement inférieure à* 1 [4]. Cet ensemble posséde des propriétés remarquables, nous rappellerons les principales:

Un nombre réel $\theta > 1$ appartient à S si et seulement si, il existe $\lambda \neq 0$ tel que si l'on pose:

$$\lambda\theta^n = u_n + \varepsilon_n \quad \textit{où} \quad u_n \in \mathbf{Z}, \qquad -\tfrac{1}{2} \leqslant \varepsilon_n < \tfrac{1}{2},$$

la série $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n^2$ converge. Alors $\lambda \in Q(\theta)$ [4].

Le problème se pose de savoir si dans ce théorème on peut remplacer la convergence de la série $\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n^2$ par la condition plus faible:

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0.$$

La question est toujours ouverte, toutefois si l'on sait que θ est algébrique, on peut encore affirmer que $\theta \in S$ et $\lambda \in Q(\theta)$ ([3], [7]).

Par ailleurs toute extension réelle finie de Q peut être engendrée par un nombre $\theta \in S$, et ces nombres permettent d'obtenir une caractérisation des nombres algébriques réels à partir d'approximations rationnelles [7]. De plus Salem *a démontré que l'ensemble S est fermé pour la topologie de la droite réelle* [6].

Dans un article paru en 1962 P. Bateman et A. Duquette [1] ont introduit des „P. V. éléments" dans un corps de séries formelles. Certaines propriétés de ces éléments rappellent celles des nombres de Pisot-Vijayaraghavan classiques.

Soit k un corps quelconque, $k[x]$ l'anneau des polynômes à une indéterminée sue k et $k(x)$ le corps de fractions rationnelles, nous munirons

$k(x)$ de sa valuation à l'infini, c'est-à-dire si $a = \frac{f}{g}$ où $f \in k[x]$, $g \in k[x]$, alors $v(a) = d^0 g - d^0 f$ à cette valuation nous associons la valeur absolue:

$$|a| = c^{d^0 f - d^0 g}$$

où c est un nombre réel supérieur à 1 (si k est un corps fini nous prendrons $c = q$ nombre d'éléments du corps). La complétion de $k(x)$ pour cette valuation est le corps des séries de Laurent formelles de la forme:

$$a = \sum_{j=-h}^{\infty} a_{-j} x^{-j}, \quad a_{-j} \in k, \quad a_{-h} \neq 0,$$

que nous désignerons par $k\{x^{-1}\}$, alors $|a| = c^h$.

Si $a \in k\{x^{-1}\}$, posons:

$$E(a) = \sum_{j=-h}^{0} a_{-j} x^{-j} \in k[x], \quad \varepsilon(a) = \sum_{j=1}^{\infty} a_{-j} x^{-j}$$

on obtient donc pour tout élément $a \in k[x^{-1}]$, la décomposition suivante, qui est unique:

$$a = E(a) + \varepsilon(a) \quad \text{où} \quad E(a) \in k[x] \text{ et } |\varepsilon(a)| < 1$$

cette décomposition joue un rôle analogue à la décomposition d'un nombre réel en partie entière et partie fractionnaire. Si K est la clôture algébrique de $k\{x^{-1}\}$, K peut être muni d'une valuation prolongeant celle de $k\{x^{-1}\}$.

Nous pouvons maintenant définir les ensembles introduits par P. Bateman et A. Duquette:

Ensemble $\mathscr{S}^*$. *Un élément $a \in k\{x^{-1}\}$, $|a| > 1$ appartient à $\mathscr{S}^*$ s'il est entier algébrique sur $k[x]$ et si tous ses conjugués autres qui lui-même, par rapport à $k(x)$, sont de valeur absolue inférieur ou égale à 1, dans K clôture algébrique de $k\{x^{-1}\}$.*

Ensemble $\mathscr{S}$ (P. V. éléments de P. Bateman et A. Duquette). *Un élément $\theta \in k\{x^{-1}\}$, $|\theta| > 1$, appartient à $\mathscr{S}$ s'il est entier algébrique sur $k[x]$ et si tous ses conjugués autres que lui-même, par rapport à $k(x)$, sont de valeur absolue strictement inférieure à 1, dans K clôture algébrique de $k\{x^{-1}\}$.*

D'après leur définition les éléments de $\mathscr{S}$ ou $\mathscr{S}^*$ sont séparables sur $k(x)$. P. Bateman et A. Duquette [1] ont montré que, quel que soit le corps k, $k\{x^{-1}\}$ contient des éléments de $\mathscr{S}$ de tous degrés et que toute extension algébrique finie et séparable de $k(x)$, contenue dans $k\{x^{-1}\}$, peut être engendrée par un élément $\theta \in \mathscr{S}$; ils ont également donné une caractérisation des éléments $\theta \in \mathscr{S}$, par la „repartition module 1" dans le cas où le corps k est parfait.

Si k est un corps parfait, un élément $\theta \in k\{x^{-1}\}$, $|\theta| > 1$, appartient à $\mathscr{S}$ si et seulement si il existe $\lambda \neq 0$ et $\lambda \in k\{x^{-1}\}$ tel que:

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon(\lambda\theta^n) = 0.$$

Alors $\lambda \in k(x)(\theta)$.

Nous allons montrer que le résultat est encore vrai si l'on ne suppose pas k parfait, nous l'appliquerons ensuite aux approximations rationnelles des éléments algébriques séparables de $k\{x^{-1}\}$, enfin nous montrerons que, si k est un corps fini, *l'ensemble $\mathscr{S}$ n'est pas fermé.*

§ 2. Caractérisations des ensembles $\mathscr{S}$ et $\mathscr{S}^*$.

Soit

$$P(x) = x^s + a_1 x^{s-1} + \ldots + a_s, \quad a_i \in k[x], \quad i = 1, \ldots, s.$$

Le polynôme irréductible associé à un élément $a \in \mathscr{S}^*$, la considération de son polygone de Newton, montre que:

$$|a_1| = |a| \quad \text{et} \quad |a_i| \leqslant |a|, \quad i = 2, \ldots, s$$

et si $P(x)$ est le polynôme irréductible associé à un élément $\theta \in \mathscr{S}$ cette condition devient

$$|a_1| = |\theta| \quad \text{et} \quad |a_i| < |\theta|, \quad i = 2, \ldots, s$$

d'où l'on déduit une première caractérisation des éléments de $\mathscr{S}$ et $\mathscr{S}^*$.

Lemme 2.1. *Pour qu'un élément $a \in k\{x^{-1}\}$, $|a| > 1$, appartienne à $\mathscr{S}^*$, il faut et il suffit qu'il soit zéro d'un polynôme:*

$$P(x) = x^s + a_1 x^{s-1} + \ldots + a_s, \quad a_i \in k[x], \quad i = 1, \ldots, s$$

tel que: $|a_1| = |a|$, $|a_i| \leqslant |a|$ pour $i = 2, \ldots, s$.

Pour qu'un élément $\theta \in k\{x^{-1}\}$, $|\theta| > 1$, appartienne à $\mathscr{S}$ il faut et il suffit qu'il soit zéro d'un polynôme $P(x)$ tel que: $|a_1| = |\theta|$; $|a_i| < |\theta|$ pour $i = 2, \ldots, s$.

Nous allons maintenant démontrer les théorèmes suivants qui donnent une caractérisation des ensembles $\mathscr{S}$ et $\mathscr{S}^*$, analogue à la caractérisation de S par la répartition modulo 1.

Théorème 2.1. *Soit k un corps quelconque. Un élément $\theta \in k\{x^{-1}\}$, $|\theta| > 1$, appartient à $\mathscr{S}$ si, et seulement si, il existe $\lambda \in k\{x^{-1}\}$, et $\lambda \neq 0$ tel que*

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon(\lambda\theta^n) = 0.$$

Alors $\lambda \in k(x)(\theta)$.

Théorème 2.2. *Soit k un corps quelconque. Un élément $a \in k\{x^{-1}\}$, $|a| > 1$, appartient à $\mathscr{S}^*$ si, et seulement si, il existe $\lambda \in k\{x^{-1}\}$ et $\lambda \neq 0$ tel que*

$$|\varepsilon(\lambda a^n)| < \frac{1}{|a|^2}$$

pour n assez grand. Alors $\lambda \in k(x)(a)$.

La démonstration de ces théorèmes s'appuie sur les lemmes suivants:

LEMME 2.2. (Lemme de Fatou.) *Soit $\{u_n\}$ une suite d'éléments de $k[x]$ vérifiant une relation de récurrence à coefficients constants*:

$$a_0 u_n + a_1 u_{n+1} + \ldots + a_r u_{n+r} = 0.$$

Alors il existe une relation de récurrence du même type où $a_i \in k[x]$ et $a_r = 1$ (élément unité de k).

Nous ne démontrerons pas ce lemme classique.

LEMME 2.3. [1]. *Soit k un corps quelconque, et $\{\xi_n\}$ une suite d'éléments de $k\{x^{-1}\}$ satisfaisant à une relation de récurrence à coefficients constants*:

$$\xi_{n+r} + a_{r-1}\xi_{n+r-1} + \ldots + a_0 \xi_n = 0$$

où $a_0, \ldots, a_{r-1}$ appartiendront à $k\{x^{-1}\}$. Soit $\{u_n\}$ une suite d'éléments de $k\{x^{-1}\}$ tels que:

$$|u_n - \xi_n| < \frac{1}{\max(|a_0|, \ldots, |a_{r-1}|, 1)^2}$$

à partir d'un certain rang. Alors la suite $\{u_n\}$ satisfait à une relation de récurrence à coefficients constants.

La démonstration de ce lemme a été donné par P. Bateman et A. Duquette dans [1] nous ne la reproduirons pas.

Démonstration des théorèmes 2.1 et 2.2. Soit $a \in k\{x^{-1}\}$, $|a| > 1$, et $\lambda \in k\{x^{-1}\}$, $\lambda \neq 0$ tel que pour n assez grand:

$$|\varepsilon(\lambda a^n)| < \frac{1}{|a|^2}.$$

Alors, en posant:

$$\xi_n = \lambda a^n, \qquad u_n = E(\lambda a^n)$$

nous obtenons une suite verifiant les hypothèses du lemme 2.3 puisque:

$$\xi_{n+1} - a\xi_n = 0,$$

$$|u_n - \xi_n| < \frac{1}{|a|^2} \quad \text{à partir d'un certain rang.}$$

Il en résulte que les u_n verifient une relation de récurrence:

$$A_0 u_n + A_1 u_{n+1} + \ldots + u_{n+s} = 0$$

où les $A_i \in k[x]$, d'après le lemme de Fatou.

Donc la série:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n$$

représente une fraction rationnelle $\dfrac{A(x)}{Q(x)}$ et, dans $\hat{K}$, completion de la clôture algébrique de $k\{x^{-1}\}$ cette fonction admet comme pôle $1/a$, interieur au disque $|x| < 1$, les autres pôles étant dans le domaine défini par $|x| \geqslant 1$, puisque:

$$\frac{A(x)}{Q(x)} = \frac{\lambda}{1 - ax} - \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n(\lambda a^n) x^n$$

Il en resulte que $a \in \mathscr{S}^*$.

Si, de plus $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon(\lambda a^n) = 0$, alors, dans $\hat{K}$ la série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \varepsilon(\lambda a^n)$ converge pour $|x| \leqslant 1$ et l'on en deduit que $a \in \mathscr{S}$.

Dans ces deux cas on voit immédiatement que $\lambda \in k(x)(a)$.

Inversement étant donné un élément a de $\mathscr{S}$ ou $\mathscr{S}^*$ il est facile de trouver un élément $\lambda \in k(x)(a)$ tel que les hypothèses des théorèmes 2.1 ou 2.2 soient verifiées. Dans le premier cas il suffit de prendre pour λ un entier algébrique de $k(x)(a)$ et dans le deuxième cas on peut prendre pour λ un élément de: $\mathscr{S} \cap k(x)(a)$ dont les conjugués soient suffisamment petits en valeur absolue (P. Bateman et A. Duquette ont montré qu'il en existait).

A partir du théorème 2.1 on peut donner une caracterisation des éléments a de $k\{x^{-1}\}$ qui sont algébriques et separables sue $k(x)$:

THÉORÈME 2.3. *Pour qu'un élément $a \in k\{x^{-1}\}$ soit algébrique et séparable sue $k(x)$, il faut et il suffit qu'il admette des approximations rationnelles „regulièrement reparties", c'est-à-dire qu'il existe une suite d'approximations rationnelles $\dfrac{v_n}{u_n}$ ou v_n et $u_n \in k[x]$ ayant les propriétés suivantes*:

$$\lim_{n\to\infty} |v_n - a u_n| = 0$$

et:

$$\exists\, \omega \in k\{x^{-1}\},\ |\omega| > 1\colon \lim_{n\to\infty} |u_{n+1} - \omega u_n| = 0$$

alors $\omega \in \mathscr{S}$ et $a \in k(x)(\omega)$.

La démonstration de ce théorème est très voisine de celle qui a été faite par C. Pisot dans le cas réel, [6] nous ne la donnerons pas ici.

§ 3. Cas particulier où k est un corps fini. On sait alors que $k\{x^{-1}\}$ est localement compact.

Nous allons montrer que:

THÉORÈME 3.1. *L'ensemble $\mathscr{S}$ n'est pas fermé.*

Pour le prouver nous allons construire une suite d'éléments de $\mathscr{S}$ convergeant vers un élément $\theta^* \notin \mathscr{S}$.

Soient a et $b \in k[x]$ tels que:

$$1 < |b| < |a|$$

considérons les polynômes

$$P_n(x) = x^n + ax^{n-1} + b(x^{n-2} + x^{n-3} + \ldots + 1)$$

d'après le lemme 2.1, le polynôme $P_n(x)$ admet une racine $\theta_n \in \mathcal{S}$ et:

$$|\theta_n| = a$$

puisque $k\{x^{-1}\}$ est localement compact, de la suite des indices n on peut extraire une suite partielle, encore notée n, telle que la suite $\{\theta_n\}$ ait une limite θ^*.

Posons alors:

$$Q_n(x) = x^n P_n\left(\frac{1}{x}\right)$$

donc:

$$Q_n(x) = 1 + ax + bx^2 \sum_{h=0}^{n-2} x^h = \frac{1+(a-1)x+(b-a)x^2 - bx^n}{1-x}$$

pour $|x| < 1$ et $n \to \infty$:

$$Q_n(x) \to \frac{1+(a-1)x+(b-a)x^2}{1-x}$$

donc $1/\theta^*$ est le zero de valeur absolue inferieure à 1 de

$$Q^*(x) = 1+(a-1)x+(b-a)x^2$$

or, si a et b sont convenablement choisis $Q^*(x)$ est irréductible dans $k(x)$ et l'on voit sur son polygone de Newton que le conjugué de θ^* est de valeur absolue 1, donc $\theta^* \notin \mathcal{S}$.

Nous remarquons que les polynômes $Q_n(x)$ sont uniformément bornés en valeur absolue pour $|x| \leqslant 1$, puisque:

$$|Q_n(x)| \leqslant |a| \quad \text{pour} \quad |x| \leqslant 1,$$

$$|Q_n(x)| = |a| \quad \text{pour} \quad |x| = 1$$

et, pour $|x| < 1$, ils tendent vers une limite qui n'est pas bornée pour $|x| = 1$. De plus nous avons pris un exemple où la limite des polynômes $Q_n(x)$ est une fraction rationnelle, or, il est facile de voir qu'en *géneral la limite des polynômes $Q_n(x)$ correspondant à une suite convergente d'élémente $\theta_n \in \mathcal{S}$ n'est pas une fraction rationnelle.*

Nous pouvons supposer que $|\theta_n|$ est constante soit $|\theta| = \omega$, quitte à supprimer un nombre fini de termes de la suite, puisque k est un corps fini, il n'y a qu'un nombre fini d'éléments de $k[x]$ ayant pour valeur absolue ω, donc quitte à extraire de la suite donnée une suite partielle, on peut supposer:

$$Q_n(x) = 1 + ax + x^2 \sum_{i=0}^{n-2} b_{ni} x^i$$

où

$$|b_{ni}| < \omega, \quad b_{ni} \in k[x].$$

Les b_{ni} restent donc constants à partir d'un certain rang n, pour tout i, donc, dans $|x| < 1$, la suite $Q_n(x)$ tend uniformément une fonction:

$$F(x) = 1 + ax + x^2 \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i \quad \text{où} \quad |b_i| < \omega, \quad b_i \in k[x]$$

et en géneral $F(x)$ n'est pas une fraction rationnelle puisqu'il n'y a pas de relation de recurrence entre les b_i.

§ 4. Autres remarques. Le resultat précédent permet de faire quelques remarques dans un cas plus général.

Soit K un corps muni d'une valuation discrète de rang 1 [1] soit $\mathfrak{p}$ son idéal de valuation, p une uniformisante de $\mathfrak{p}$, nous noterons par $K_\mathfrak{p}$ la complétion de K pour cette valuation, nous supposerons de plus que $K_\mathfrak{p}$ est localement compact.

Nous dirons, à la suite de C. Chabauty [2] qu'un élément $\alpha \in K_\mathfrak{p}$ est $\mathfrak{p}$-*integrable* s'il est raciné d'un polynôme

$$P(x) = p^r x^s + a_1 x^{s-1} + \ldots + a_s \in K[x]$$

où r est un entier rationnel $\geqslant 0$.

Si l'on note par $\mathfrak{S}$ l'ensemble des éléments $\mathfrak{p}$-integrables θ de $K_\mathfrak{p}$, tels que $|\theta| > 1$, et que toutes les autres racines du polynôme $P(x)$ associé à θ, soient, dans la clôture algébrique $\tilde{K}_\mathfrak{p}$ de $K_\mathfrak{p}$, de valeur absolue strictement inférieure à 1.

Alors la considération du polygone de Newton de $P(x)$ montre que

$$|a_1| = 1, \quad |a_i| < 1 \quad \text{pour} \quad i = 2, \ldots, s.$$

Ces inégalités expriment und condition nécessaire et suffisante pour que $\theta \in \mathfrak{S}$.

Posons:

$$Q(x) = x^s P\left(\frac{1}{x}\right)$$

on voit alors facilement, de la même manière qu'au paragraphe précédent

[1] Nous noterons | |, la valeur absolue associée.

1. Que les polynômes $Q(x)$ associés à une suite convergente d'éléments $\theta \in \mathfrak{S}$ n'ont pas nécessairement pour limite une fraction rationnelle.

2. L'ensemble $\mathfrak{S}$ n'est fermé, il suffit pour le voir de considérer la suite des éléments $\theta_n \in \mathfrak{S}$ associée à la suite de polynômes

$$Q_n(x) = p^r + ax + bx^2 \sum_{i=0}^{n-2} x^i$$

où $|b| < |a| = 1$.

3. On obtient alors une suite de fonctions holomorphes et uniformémént bornées pour $|x| \leqslant 1$, dont la limite n'est pas bornée pour $|x| = 1$.

Si K est un corps de fonctions algébriques (extension finie d'un corps de fractions rationnelles sur un corps fini) on peut obtenir des resultats analogues dans les adéles de K.

Si K est un corps de nombres algébriques, ces résultats montrent qu'on ne peut espérer obtenir des ensembles fermés que si l'on considère les zeros de $P(x)$ à la fois dans $K_\mathfrak{p}$ et dans le corps C des nombres complexes, ce qui revient à les étudier dans l'anneau des adéles de K.

Lorsque K est le corps des rationnels on connait de tels ensembles fermés, citons par exemple:

Ensemble S_p^0 des nombres de Chabauty [2]. *Un nombre $\theta \in Q_p$ appartient à S_p^0, si il est p-integrable, si les autres racines du polynôme associé $P(x)$ sont, dans Ω_p de valeur absolue strictement inférieure à* 1. *Et si, de plus, dans C toutes les racines de $P(x)$ sont inférieures à* 1, *en valeur absolue.*

Travaux cités

[1] P. Bateman et A. Duquette, *The analogue of the Pisot-Vijayaraghavan numbers in fields of formal power series*, Illinois J. of Math. 6 (1962), p. 594-606.

[2] C. Chabauty, *Sur la répartition modulo* 1 *de certaines suites p-adiques*, C. R. Acad. Sc. Paris 231 (1950), p. 465-466.

[3] G. H. Hardy, *A problem of diophantine approximation*, J. Indian Math. Soc. 11 (1919), p. 162-166.

[4] C. Pisot, *La répartition modulo* 1 *et les nombres algébriques*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Ser. 2, 7 (1938), p. 205-248.

[5] — *Sur quelques approximations rationnelles caracteristiques des nombres algébriques*, C. R. Acad. Sc. Paris 206 (1938), p. 1862-1864.

[6] R. Salem, *A remarkable class of algebraic integers. Proof of a conjecture of Vijayaraghavan*, Duke Math. J. 11 (1944), p. 103-108.

[7] T. Vijayaraghavan, *On the fractional parts of the powers of a number* (II), Proc. Camb. Phil. Soc. 37 (1941), p. 349-357.

Reçu par la Rédaction le 6. 6. 1967

ACTA ARITHMETICA
XIV (1968)

Le „Problème des Octaèdres" en dimension 5*

par

R. Bantegnie (Lille)

0. Introduction. L'étude des réseaux de l'espace euclidien permis pour un „*Octaèdre*" et en contenant les sommets a été considérée dès Minkowski [5] pour $n \leqslant 3$ puis pour $n = 4$ par divers auteurs, cf. [6] et [8]. Nous-même, cf. [1] et [2], avons examiné pour $n \leqslant 4$ le cas général où les réseaux peuvent avoir des points dans les faces de l'octaèdre distincts de ses sommets (deuxième cas) et non seulement le cas où cela est exclu (premier cas).

Rappelons comment la considération des réseaux précédents intervient dans la détermination de la constante critique d'une jauge. Si J est une jauge de l'espace euclidien $\boldsymbol{R}^n$, on sait qu'un réseau critique de J possède, sur la frontière de J, n points linéairement indépendants e_i; soit M le réseau ayant pour base les e_i, Ω „*l'octaèdre*" enveloppe convexe ouverte des points $\pm e_i$; il est utile de déterminer les *types* des réseaux appartenant à la famille $\mathfrak{M}$ des réseaux contenant le réseau M et permis pour Ω puisqu'un réseau critique de J appartient à $\mathfrak{M}$; on peut aussi considérer la famille $\overline{\mathfrak{M}}$ des réseaux contenant M et dont l'intersection avec l'adhérence $\overline{\Omega}$ de Ω est l'union de l'origine 0 et des sommets $\pm e_i$ car un réseau critique de J appartient à $\overline{\mathfrak{M}}$ si J est strictement convexe.

Determiner les *types* des réseaux de $\overline{\mathfrak{M}}$, resp. $\mathfrak{M}$ constitue le „*Problème des Octaèdres*".

La considération de $\overline{\mathfrak{M}}$ correspond au premier cas, celle de $\mathfrak{M}$ au second.

On désigne par $\overline{\mathfrak{L}}$, resp. $\mathfrak{L}$ les parties de $\overline{\mathfrak{M}}$, resp. $\mathfrak{M}$ formées des réseaux Λ pour lesquels le groupe Λ/M est cyclique. Notons d'une part que pour $n \leqslant 3$, Λ/M est toujours cyclique pour Λ dans $\mathfrak{M}$, d'autre part que la considération du cas cyclique est un pas nécessaire, cf. [2].

On désigne par $\overline{m}_n$, resp. m_n l'ordre maximum pour Λ dans $\overline{\mathfrak{M}}$, resp. $\mathfrak{M}$ du groupe Λ/M; $\overline{p}_n$, resp. p_n sont eux les ordres maximum de Λ/M pour Λ dans $\overline{\mathfrak{L}}$, resp. $\mathfrak{L}$.

* Ce travail fait partie d'une thèse presentée en 1967 à la Faculté des Sciences de Lille.