ACTA ARITHMETICA
XIV (1968)

Sur l'équirépartition de certaines suites $(x\lambda_n)$

par

F. Dress (Paris)

1. Exposé des résultats. Le but de cet article est de démontrer deux résultats complémentaires relatifs à l'équirépartition des suites $(x\lambda_n)$ lorsque (λ_n) est une suite monotone d'entiers (que nous pourrons supposer non décroissante sans restreindre la généralité).

Théorème I. *Soit $(\lambda_n)\in N^N$ une suite non décroissante d'entiers vérifiant $\lambda_n = o(\log n)$. Il n'existe alors aucun nombre réel x tel que la suite $(x\lambda_n)$ soit équirépartie.*

Théorème II. *Soit $f(n)$ une fonction réelle définie sur les entiers positifs. Si le rapport $f(n)/\log n$ tend vers l'infini avec n, il existe alors une suite non décroissante d'entiers $(\lambda_n)\in N^N$ vérifiant $\lambda_n = O\big(f(n)\big)$ et telle que la suite $(x\lambda_n)$ soit équirépartie pour tout nombre irrationnel x.*

Remarque. Ces deux théorèmes sont à rapprocher d'un résultat (M. Mendès France [1]) montrant que le théorème I cesse d'être vrai dès que l'on n'impose plus à la suite (λ_n) d'être monotone.

2. Notations: suites d'entiers par blocs. Toute suite non décroissante d'entiers $\Lambda = (\lambda_n)$ peut être considérée comme composée de blocs où chaque entier p est rèpété k_p fois ($k_p \geqslant 0$):

$$\Lambda = (\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{k_0}, \underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{k_1}, \underbrace{\ldots}_{\ldots}, \underbrace{p, p, \ldots, p}_{k_p}, \underbrace{\ldots}_{\ldots}).$$

Nous définirons la fonctions sommatoire $K_p = \sum_{j=0}^{p} k_j$ et nous noterons que, lorsque $k_p \neq 0$, $\lambda_{K_p} = p$ (il existe, bien sûr, une infinité de tels p).

3. Demonstration du théorème I.

Lemme 1. *Si $\lambda_n = o(\log n)$, on a alors:*

$$\limsup_{p\to\infty} \frac{k_p}{K_p} = 1.$$

En effet, si l'on supposait que:

$$\limsup_{p\to\infty} \frac{k_p}{K_p} = \limsup_{p\to\infty} \frac{K_p - K_{p-1}}{K_p} = 1 - \varepsilon < 1,$$

on en déduirait:

$$\liminf_{p\to\infty}\frac{K_{p-1}}{K_p}=\varepsilon;$$

par suite, il existerait deux constantes, $C>0$ et $a>1$, telles que l'on ait $K_p<Ca^p$. On aurait alors, pour une suite (tendant vers l'infini) de p tels que $k_p\neq 0$, l'inégalité:

$$p=\lambda_{K_p}\leqslant\lambda_{[Ca^p]}=o(\log[Ca^p])=o(p),$$

ce qui est impossible, et démontre ainsi ce lemme.

Considérons alors une suite non décroissante $(\lambda_n)\in\boldsymbol{N}^{\boldsymbol{N}}$ vérifiant $\lambda_n=o(\log n)$, et prenons une sous-suite (p_j) d'indices telle que:

$$\lim_{j\to\infty}\frac{k_{p_j}}{K_{p_j}}=1.$$

Etant donné un nombre irrationnel x, calculons:

$$\limsup_{j\to\infty}\left|\frac{1}{K_{p_j}}\sum_{h=0}^{K_{p_j}}\exp 2i\pi qx\lambda_h\right| \qquad (q\in\boldsymbol{N}^+).$$

Nous décomposerons cette somme de Weyl en:

$$\frac{1}{K_{p_j}}\sum_{h=0}^{K_{p_j}}=\frac{1}{K_{p_j}}\sum_{h=0}^{K_{p_j-1}}+\frac{1}{K_{p_j}}\sum_{K_{p_j-1}+1}^{K_{p_j}}.$$

La première somme est majorée en module par $\dfrac{1+K_{p_{j-1}}}{K_{p_j}}$ qui tend vers 0. La seconde est égale à:

$$\frac{k_{p_j}}{K_{p_j}}\exp 2i\pi qxp_j,$$

qui tend en module vers 1. Nous avons ainsi démontré que:

$$\limsup_{j\to\infty}\left|\frac{1}{K_{p_j}}\sum_{h=0}^{K_{p_j}}\exp 2i\pi qx\lambda_h\right|=1,$$

et par là même que, les sommes de Weyl $\dfrac{1}{n}\sum_{h=0}^{n}\exp 2i\pi qx\lambda_h$ ne pouvant tendre vers 0, la suite $(x\lambda_n)$ n'est paséquirépartie. Nous avons ainsi démontré le théorème I.

4. Démonstration du théorème II.

Lemme 2. *Si $(\lambda_n)\in\boldsymbol{N}^{\boldsymbol{N}}$ est une suite non décroissante vérifiant:*

$$k_p\geqslant k_{p-1},\qquad \lim_{p\to\infty}\frac{k_p}{K_p}=0,$$

alors les sommes de Weyl:

$$\frac{1}{n}\sum_{h=0}^{n}\exp 2i\pi qx\lambda_h\qquad (q\in\boldsymbol{N}^+)$$

tendent vers 0 pour tout x irrationnel.

Remarquons tout d'abord que l'hypothèse $k_p\geqslant k_{p-1}$ entraîne qu'il existe des entiers m_j positifs ou nuls tels que l'on ait:

$$k_0=m_0,\quad k_1=m_0+m_1,\quad \ldots,\quad k_p=m_0+m_1+\ldots+m_p,\quad \ldots$$

Etant donné un nombre irrationnel x, posons alors $2\pi qx=a$ (nous avons donc $\exp ia\neq 1$). En désignant par p l'indice qui vérifie l'inégalité $K_p\leqslant n<K_{p+1}$ (indice bien déterminé car les k_j sont non nuls à partir d'un certain rang), nous décomposerons la somme de Weyl en:

$$\frac{1}{n}\sum_{h=0}^{n}\exp ia\lambda_h=S_1+S_2=\frac{1}{n}\sum_{h=0}^{K_p}\exp ia\lambda_h+\frac{1}{n}\sum_{K_p+1}^{n}\exp ia\lambda_h.$$

La première somme peut s'écrire:

$$S_1=\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{p}\sum_{\lambda_{K_{j-1}+1}}^{\lambda_{K_j}}\exp iaj=\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{p}k_j\exp iaj,$$

d'où:

$$S_1=\frac{1}{n}[m_0\exp 0+(m_0+m_1)\exp ia+\ldots+(m_0+m_1+\ldots+m_p)\exp iap]$$

$$=\frac{1}{n}\Big[m_0\frac{1-\exp ia(p+1)}{1-\exp ia}+m_1\frac{\exp ia-\exp ia(p+1)}{1-\exp ia}+\ldots+ +m_p\frac{\exp iap-\exp ia(p+1)}{1-\exp ia}\Big],$$

ce qui permet d'obtenir, en majorant par 2 le module des numérateurs et en notant que $|m_j|=m_j$:

$$|S_1|\leqslant\frac{2}{|1-\exp ia|}\cdot\frac{m_0+m_1+\ldots+m_p}{n}$$

$$=\frac{2}{|1-\exp ia|}\cdot\frac{k_p}{n}\leqslant\frac{2}{|1-\exp ia|}\cdot\frac{k_p}{K_p}=o(1).$$

Quant à la deuxième somme, elle vérifie:

$$|S_2| = \frac{n-K_p}{n} \leqslant \frac{k_{p+1}}{n} = \frac{k_{p+1}}{K_{p+1}+o(K_{p+1})} = o(1),$$

et le lemme 2 est ainsi démontré.

Nous serons en fait amenés à utiliser ce lemme sous une forme un peu plus compliquée:

LEMME 2 bis. *Si* $(\lambda_n)\epsilon N^N$ *est une suite non décroissante vérifiant: il existe des entiers* $m_j \geqslant 0$ *et* $\delta_j = 0$ *ou* -1 *tels que*

$$k_j = m_0+m_1+\ldots+m_j+\delta_j$$

et

$$\lim_{p\to\infty}\frac{k_p}{K_p} = 0 \quad \textit{et} \quad k_p \underset{p\to\infty}{\to} \infty,$$

alors les sommes de Weyl:

$$\frac{1}{n}\sum_{h=0}^{n}\exp 2i\pi qx\lambda_h \qquad (q\,\epsilon N^+)$$

tendent vers 0 *pour tout* x *irrationnel.*

En effet, avec la même décomposition, nous avons toujours:

$$S_1 = \frac{1}{n}\sum_{j=0}^{p} k_j \exp iaj, \qquad S_2 = o(1).$$

Posons alors:

$$S_1 = S_1'+S_1'' = \frac{1}{n}[m_0\exp 0+(m_0+m_1)\exp ia+\ldots+$$

$$+(m_0+m_1+\ldots+m_p)\exp iap]+\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{p}\delta_j\exp iaj.$$

Nous avons vu que $S_1' = o(1)$ lorsque x est irrationnel. Enfin, comme les k_j tendent vers l'infini avec j, nous avons:

$$\frac{K_p}{p} = \frac{1}{p}\sum_{j=0}^{p} k_j \underset{p\to\infty}{\to} \infty,$$

ce qui montre que:

$$|S_1''| \leqslant \frac{p}{n} \leqslant \frac{p}{K_p} = o(1),$$

et termine la démonstration.

LEMME 3. *Soit* $f(x)$ *une fonction réelle définie sur la demi-droite* $x \geqslant 0$. *Si le rapport* $f(x)/\log x$ *tend vers l'infini avec* x, *il existe alors une fonction* $g(x)$ *possédant les propriétés suivantes*:

$$g(x) = O(f(x)) \quad \textit{et} \quad g(x) = o(x),$$

$g(x)$ *est une fonction concave,*

le rapport $g(x)/\log x$ *est non décroissant et tend vers l'infini avec* x.

Posons tout d'abord $f_1(x) = \min[f(x), \log^2 x]$ (le choix de $\log^2 x$ n'est pas essentiel). La fonction $g(x)$ que nous allons construire satisfera l'inégalité $g(x) \leqslant f_1(x)$, elle vérifiera par conséquent les propriétés $O(f(x))$ et $o(x)$. Observons enfin que le rapport $f_1(x)/\log x$ tend également vers l'infini avec x.

Définissons maintenant la suite d'abscisses x_k $(k = 1, 2, \ldots)$ par:

$$x_k = \inf\{x \mid f_1(y) \geqslant (k+1)\log y \text{ pour tout } y \geqslant x\}.$$

Les x_k existent (car $f_1(x)/\log x \to \infty$) et forment une suite non décroissante.

La construction de la fonction $g(x)$ sera basée sur les résultats élémentaires qui suivent et que nous ne démontrerons pas. Désignons par (C_k) les courbes $y = k\log x$. Nous avons les propriétés suivantes:

toute tangente à une courbe (C_k) en un point d'abscisse u rencontre la courbe (C_{k+1}) en un point unique d'abscisse $v > u$,

quel que soit le nombre v_0, l'abscisse u peut être choisie assez grande pour que $v \geqslant v_0$,

si $a < u < v < b$, la fonction $y(x)$ définie sur (a, b) par son graphe: (C_k) sur (a, u), la tangente à (C_k) sur (u, v), et (C_{k+1}) sur (v, b), vérifie:

$y(x)$ est une fonction concave,

le rapport $y(x)/\log x$ est non décroissant.

Utilisant la suite x_k, nous pouvons alors définir par son graphe une fonction $g(x)$ satisfaisant aux conditions du lemme: sur $(0, x_1)$, la tangente en x_1 à (C_1), puis (C_1) sur (x_1, u_1), l'abscisse u_1 étant choisie de sorte que la tangente à (C_1) en u_1 rencontre (C_2) en une abscisse $v_1 \geqslant x_2$, puis cette tangente sur (u_1, v_1), et on répète indéfiniment ce processus (fig. 1).

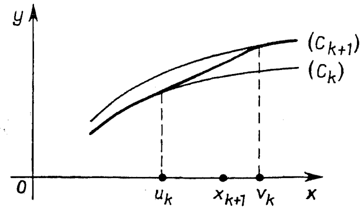

Fig. 1

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème II. Nous prolongeons tout d'abord la fonction $f(n)$ définie sur $\boldsymbol{N}$ en une fonction $f(x)$ définie sur la demi-droite $x \geqslant 0$ en posant $f(x) = f([x])$, puis nous considérons la fonction $g(x)$ dont le lemme 3 nous assure l'existence.

Définissons alors la suite $(\lambda_n) \in \boldsymbol{N}^{\boldsymbol{N}}$ par:

$$\lambda_n = [g(n)].$$

Nous avons $\lambda_n = O\big(g(n)\big) = O\big(f(n)\big)$ et il suffit de vérifier que (λ_n) satisfait les conditions du lemme 2 bis pour montrer que la suite $(x\lambda_n)$ est équirépartie pour tout nombre irrationnel x.

Les blocs de la suite (λ_n) vérifient l'inégalité $k_{p+1} \geqslant k_p - 1$. Supposons en effet que $k_p = r+1$ et que $k_{p+1} \leqslant r-1$. Si nous écrivons $K_p = R$, nous avons $R-r = K_{p-1}+1$ et $R+r \geqslant K_{p+1}+1$, de sorte que:

$$\lambda_{R-r} = p, \quad \lambda_R = p, \quad \lambda_{R+r} = p+2.$$

Comme $\lambda_n = [g(n)]$ et que la partie entière vérifie $x \leqslant [x] < x+1$, nous aurions alors:

$$g(R-r) \geqslant p, \quad g(R+r) \geqslant p+2,$$

et

$$g(R) < p+1 \leqslant \frac{g(R-r)+g(R+r)}{2},$$

ce qui est contraire au fait que $g(x)$ est concave.

On se convaincra alors que la première condition du lemme 2 bis (l'existence des entiers $m_j \geqslant 0$ et $\delta_j = 0$ ou -1) est équivalente à l'inégalité $k_{p+1} \geqslant k_p - 1$ pour tout p: on prend $\delta_j = -1$ s'il existe un indice $i < j$ tel que $k_j = k_i - 1$, et $\delta_j = 0$ si $k_j \geqslant k_i$ pour tout indice $i < j$; la suite $k_j - \delta_j$ est non décroissante, et les entiers $m_j \geqslant 0$ existent donc.

Si la limite pour p infini du quotient k_p/K_p n'était pas nulle, cela signifierait qu'il existe $\eta > 0$ tel que, pour une infinité de p, on ait $k_p > \eta K_p$. Or on a:

$$\lambda_{K_p-k_p+1} = p, \quad \text{et donc} \quad g(K_p-\eta K_p) \geqslant g(K_p-k_p+1) \geqslant p,$$

$$\lambda_{K_p} = p, \quad \text{et donc} \quad g(K_p) < p+1.$$

On en déduirait alors:

$$\frac{g(K_p-\eta K_p)}{\log(K_p-\eta K_p)} > \frac{g(K_p)-1}{\log K_p + \log(1-\eta)}$$
$$= \frac{g(K_p)}{\log K_p} \cdot \frac{g(K_p)-1}{g(K_p) + \dfrac{g(K_p)}{\log K_p}\log(1-\eta)} > \frac{g(K_p)}{\log K_p}$$

car $\dfrac{g(K_p)}{\log K_p}\log(1-\eta) < -1$ pour K_p assez grand (en effet $\dfrac{g(K_p)}{\log K_p}$ tend vers l'infini avec p).

L'inégalité:

$$\frac{g(K_p-\eta K_p)}{\log(K_p-\eta K_p)} > \frac{g(K_p)}{\log K_p}$$

étant contraire à l'hypothèse $g(x)/\log x$ non décroissant, il s'ensuit donc que $\lim\limits_{p\to\infty} \dfrac{k_p}{K_p} = 0$.

Nous terminerons en remarquant que la dernière condition du lemme 2 bis, $k_p \underset{p\to\infty}{\to} \infty$, est une conséquence triviale de l'hypothèse $g(x) = o(x)$.

Travaux cités

[1] M. Mendès France, *Deux remarques concernant l'équirépartition des suites*, Acta Arith., ce numéro, p. 163-167.

Reçu par la Rédaction le 6. 6. 1967