THEOREM 3. *Let k be any positive integer. Then there is a constant $d_k > 0$, so that for an infinite number of primes p the inequality*

$$r_k(p) > d_k \log p,$$

is satisfied.

References

[1] N. C. Ankeny, *The least quadratic non residue*, Annals of Math. 55 (1) (1952), pp. 65-72.

[2] А. И. Виноградов, *О числах с малыми простыми делителями*, ДАН СССР 109(1956), pp. 683-686.

[3] — и Ю. В. Линник, *Гиперэллиптические кривые и наименьший простой квадратный вычет*, ДАН СССР 168 (1966), pp. 259-261.

[4] E. Bombieri, *On the large sieve*, Mathematika 12 (1965), pp. 201-225.

[5] P. D. T. A. Elliott, *A problem of Erdös concerning power residue sums*, Acta Arith. 13 (1967), pp. 131-149.

[6] E. Fogels, *On the distribution of prime ideals*, Acta Arith. 7 (1961), pp. 255-269.

[7] K. Prachar, *Primzahlverteilung*, Berlin 1957.

Reçu par la Rédaction le 8. 5. 1967

ACTA ARITHMETICA
XIV (1968)

Deux remarques concernant l'équirépartition des suites

par

M. MENDÈS FRANCE (Paris)

"seeker of truth
follow no path
all paths lead where
truth is here"
e. e. cummings

1. Notations. Soit g un entier supérieur ou égal à 2. On sait que tout nombre entier non négatif n s'écrit de façon unique dans le système à base g sous la forme

$$n = \sum_{p=0}^{\infty} e_p(n) g^p \tag{1}$$

où les applications e_p sont définies sur l'ensemble des entiers non négatifs et prennent leurs valeurs sur l'ensemble $\{0, 1, \ldots, g-1\}$. La somme (1) est finie: à partir du rang $p = p(n) = \left[\frac{\log n}{\log g}\right]$, tous les termes sont nuls.

Soit $c = (c_n)$ une suite de nombres réels: $c \in \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{N}}$. On définit l'application f_c: $\boldsymbol{N} \to \boldsymbol{R}$ par

$$f_c(n) = \sum_{p=0}^{\infty} e_p(n) c_p.$$

En particulier, si θ est un nombre réel, on posera $(\theta) = (1, \theta, \theta^2, \ldots)$ et

$$f_{(\theta)}(n) = \sum_{p=0}^{\infty} e_p(n) \theta^p.$$

Dans la suite de cet article, on choisira $g = 2$ $(e_p(n) \in \{0, 1\})$, ceci afin de simplifier l'écriture. Les résultats s'étendent sans difficulté en base g.

2. Résultats obtenus. Nous voulons démontrer les deux résultats suivants:

THÉORÈME A. *Soit φ une fonction réelle définie sur $\boldsymbol{N}$ et tendant vers l'infini. Il existe une suite d'entiers $\Lambda = (\lambda_n) \in \boldsymbol{N}^{\boldsymbol{N}}$ telle que*

(i) $\lambda_n = O(\varphi(n))$, $n \to \infty$,

(ii) *la suite* $(x\lambda_n)$ *est équirépartie si et seulement si* x *est irrationnel.*

Ce résultat est à comparer avec un résultat de Weyl affirmant que si la suite (λ_n) ne croit pas „trop lentement" ($\lambda_{n+1}-\lambda_n > n^{-a}$, $a < 1$), alors presque tous les x rendent la suite $(x\lambda_n)$ équirépartie.

Dress a montré ([1]) que le théorème A cesse d'être vrai si on impose à la suite Λ la condition supplémentaire d'être non décroissante.

La seconde propriété que nous voulons établir est une caractérisation des nombres de Pisot:

THÉORÈME B. *Soit* $\theta > 1$ *un nombre réel. Une condition nécéssaire et suffisante pour que le nombre* θ *soit un nombre de Pisot est que la suite* $(f_{(\theta)}(n))$ *ne soit pas équirépartie.*

Ces deux résultats (théorèmes A et B), apparemment indépendants, découlent d'un même lemme (lemme 4).

3. Lemmes préliminaires. On rappelle que l'on effectue les calculs dans le système binaire de sorte que $e_p(n)$ représente le $(p+1)$-ième chiffre de l'entier n écrit en base 2.

LEMME 1. *Soit* $a = 0$ *ou* 1. *On a les formules de récurrence*

$$e_0(2n+a) = a,$$
$$e_p(2n+a) = e_{p-1}(n), \quad p = 1, 2, \ldots$$

Démonstration évidente.

Si l'on pose $\varphi_c(n) = \exp 2i\pi f_c(n)$ et si l'on appelle T l'opérateur de translation défini sur $\boldsymbol{R}^{\boldsymbol{N}}$ $(T(c_n) = (c_{n+1}))$, le lemme précédent montre que:

$$\varphi_c(2n) = \varphi_{Tc}(n),$$
$$\varphi_c(2n+1) = \varphi_{Tc}(n)\exp 2i\pi c_0.$$

Posons alors:

$$S_c(n) = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_c(k).$$

LEMME 2. *On a les relations de récurrence*:

$$\begin{cases} S_c(2n) = (1+\exp 2i\pi c_0)\, S_{Tc}(n), \\ S_c(2n+1) = (1+\exp 2i\pi c_0)\, S_{Tc}(n) + O(1). \end{cases}$$

En effet:

$$S_c(2n) = \sum_{k=0}^{2n-1} \varphi_c(k) = \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_c(2k) + \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_c(2k+1)$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_{Tc}(k) + \sum_{k=0}^{n-1} \varphi_{Tc}(k)\exp 2i\pi c_0 = S_{Tc}(n)(1+\exp 2i\pi c_0).$$

La seconde formule du lemme 2 découle du fait que:

$$S_c(2n+1) = S_c(2n) + \varphi_c(2n).$$

On définit la moyenne:

$$M(c) = \limsup_{n\to\infty} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \exp 2i\pi f_c(k) \right|.$$

LEMME 3. *On a*:

$$M(c) = |\cos \pi c_0|\, M(Tc).$$

En effet le lemme 2 montre que:

$$\limsup_{n\to\infty} \left| \frac{S_c(2n)}{2n} \right| = \limsup_{n\to\infty} \left| \frac{S_c(2n+1)}{2n+1} \right| = |\cos \pi c_0|\, M(Tc).$$

Le lemme 3 en découle.

LEMME 4. *On a l'inégalité*:

$$M(c) \leqslant \left| \prod_{k=0}^{\infty} \cos \pi c_k \right|.$$

En effet, si l'on itére le résultat du lemme 3 et si l'on remarque que $M(T^\nu c) \leqslant 1$ pour tout entier $\nu \geqslant 0$, on obtient le lemme 4.

4. Démonstration du théorème A. Soit (p_n) une suite infinie strictement croissante d'entiers positifs. Soit χ la fonction caractéristique de la suite (p_n):

$$\chi(k) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k \in (p_n), \\ 0 & \text{si} \quad k \notin (p_n). \end{cases}$$

Soit x un nombre irrationnel et $l \neq 0$ un entier. On considère la suite $c = (xl\chi(n))_{n\geqslant 0}$. La moyenne:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \exp\Big(2i\pi \sum_{q=0}^{\infty} xl\chi(q)\, e_q(k)\Big)$$

est nulle car elle est majorée en module par:

$$M(c) = \left| \prod_{k=0}^{\infty} \cos \pi xl\chi(k) \right| = \left| \prod_{\substack{k=0 \\ k\in(p_n)}}^{\infty} \cos \pi xl \right| = 0.$$

La suite $(x\lambda_n)$ où $\lambda_n = \sum_{j=0}^{\infty} e_{p_j}(n)$ est donc équirépartie pour tout x irrationnel.

Par ailleurs, montrons que l'on peut choisir la suite (p_n) de telle façon que:

$$\lambda_n = \sum_{j=0}^{\infty} e_{p_j}(n) = O\big(\varphi(n)\big),$$

où φ est une fonction donnée qui tend vers l'infini. On peut toujours supposer que φ est non décroissante car, si cela n'était pas le cas, on considérerait la fonction définie par:

$$\psi(n) = \inf_{k\geqslant n} \varphi(k).$$

Il est alors toujours possible de choisir la suite (p_n) telle que:

$$\sum_{k\leqslant\left[\frac{\log n}{\log 2}\right]} \chi(k) \leqslant \varphi(n).$$

(Il suffit en effet de construire la suite (p_n) suffisamment lacunaire pour que

$$\operatorname{Card}\left\{p_j \,\middle|\, p_j \leqslant \frac{\log n}{\log 2}\right\} \leqslant \varphi(n).)$$

Dès lors, la suite $\lambda_n = \sum_{j=0}^{\infty} e_{p_j}(n)$ vérifie les deux conditions du théorème A.

5. Démonstration du théorème B. Soit $\theta > 1$ un nombre réel. Soit $l \neq 0$ un entier. Le lemme 4 montre que:

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \exp\Big(2i\pi l \sum_{q=0}^{\infty} e_q(k)\,\theta^q\Big)\right| \leqslant \left|\prod_{k=0}^{\infty} \cos\pi l\theta^k\right|.$$

Si θ n'est pas nombre de Pisot, on sait que le produit infini précédent est divergent ([6]). La suite $\big(f_{(\theta)}(n)\big)$ est donc équirépartie.

Au contraire, supposons que θ est un nombre de Pisot. Le lemme 3 montre que:

$$M(c) = \left|\prod_{k=0}^{\nu-1} \cos\pi c_k\right| M(T^\nu c),$$

de sorte que les suites $\big(f_{(\theta)}(n)\big)$ et $\big(f_{T^\nu(\theta)}(n)\big)$ sont ou bien toutes deux équiréparties ou bien toutes deux non équiréparties. Or:

$$f_{T^\nu(\theta)}(n) = \theta^\nu \sum_{p=0}^{\infty} e_p(n)\,\theta^p.$$

θ étant un nombre de Pisot, il existe $\tau \in]0,1[$ tel que pour tout n, on ait:

$$|\theta^n| < C\tau^n \pmod 1,$$

où C est une constante positive. Les inégalités suivantes ont lieu modulo 1:

$$\begin{aligned} |f_{T^\nu(\theta)}(n)| &\leqslant \theta^\nu + \theta^{\nu+1} + \theta^{\nu+2} + \ldots \\ &\leqslant C\tau^\nu(1+\tau+\tau^2+\ldots) \\ &\leqslant C\frac{\tau^\nu}{1-\tau}. \end{aligned}$$

Il suffit alors de choisir ν suffisamment grand $\left(C\frac{\tau^\nu}{1-\tau} < 1\right)$ pour constater que la suite $\big(f_{T^\nu(\theta)}(n)\big)$ n'est pas dense modulo 1. Ceci montre que la suite $\big(f_{(\theta)}(n)\big)$ n'est pas équirépartie.

6. Remarque. On peut montrer que les applications f_c sont pseudo-aléatoires sous certaines conditions ([4], [5]). De ceci découle des généralisations des résultats obtenus dans ([2]) et de certains contenus dans ([3]).

Additif: Soit Λ une suite infinie. On note par $B(\Lambda)$ l'ensemble des nombres réels x tels que la suite $x\Lambda$ soit équirépartie. Un sous ensemble E de $\boldsymbol{R}$ est dit ensemble normal élémentaire s'il existe une suite Λ telle que $E = B(\Lambda)$. Une intersection finie ou dénombrable d'ensembles normaux élémentaires s'appelle un ensemble normal. Par la même technique de démonstration que celle du théorème B, on peut démontrer que l'ensemble des nombres transcendants est un ensemble normal.

Travaux cités

[1] F. Dress, *Sur l'équirépartition de certaines suites* $(x\lambda_n)$, Acta Arith. ce numéro, p. 169-175.

[2] N. J. Fine, *The distribution of the sum of digits* (mod$p$), Bulletin Amer. Math. Soc. 71 (1965), p. 651-652.

[3] A. O. Gelfond, *Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données*, Acta Arith. 13 (1968), pp. 259-265.

[4] M. Mendès France, *Nombres normaux. Applications aux fonctions pseudo-aléatoires*, Journ. Analyse Math. Jerusalem 20 (1967), p. 1-56.

[5] — *La fonction „somme des chiffres" et autres fonctions analogues. Une caractérisation des nombres de Pisot*, Séminaire Théorie des Nombres, I.H.P. 1966-1967.

[6] C. Pisot, *La répartition modulo 1 et les nombres algébriques*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, Ser. 2, 7 (1938), p. 205-248.

Reçu par la Rédaction le 6. 6. 1967