Nun ist aber

$$1{,}46557123 < \xi_1 < 1{,}46557124,$$
$$2{,}20556943 < \xi_2 < 2{,}20556944,$$
$$4{,}36523001 < \xi_3^3 < 4{,}36523002,$$
$$6{,}56631577 < \xi_4^3 < 6{,}56631578$$

und daher

$$\xi_1\xi_4^3 = 9{,}62340346 + A,$$
$$\xi_2\xi_3^3 = 9{,}62781786 + B,$$

mit $|A| \leqslant 8{,}1\cdot 10^{-8}$ und $|B| \leqslant 6{,}6\cdot 10^{-8}$, d.h. (9) ist nicht erfüllt.

Bemerkung 1. Ist nun ein solches Maß singulär, so ist es entweder rein atomar oder rein nicht-atomar. P ist atomar genau dann, wenn

$$\sup p(k^{(1)}, \ldots, k^{(s)}) \geqslant C > 0$$

für alle s gilt. Gibt es nämlich einen Punkt $y \in B^{(0)}$ mit $p\big(k^{(1)}(y), \ldots, k^{(s)}(y)\big) \geqslant C > 0$ für alle s, so ist die abzählbare Menge

$$A = \bigcup_N \{x \in B^{(0)} |\ \delta^j x = \delta^j y,\ j \geqslant N\}$$

gegen δ invariant und daher $P(A) = 1$. Die Umkehrung ist klar.

Bemerkung 2. Wäre die explizite Gestalt von μ bekannt, so wäre Satz 2 vermutlich durch Einsetzen zu beweisen.

Zuletzt danke ich noch Herrn Dr. K. Kreiter, der mich bei der genauen Berechnung der Nullstellen unterstützt hat.

Literaturverzeichnis

[1] P. Billingsley, *Ergodic theory and information*, New York 1965.

[2] S. D. Chatterji, *Maße, die von regelmäßigen Kettenbrüchen induziert sind*, Math. Ann. 164 (1966), S. 113-117.

[3] J. L. Doob, *Stochastic processes*, New York 1953.

[4] F. Schweiger, *Geometrische und elementare Sätze über den Jacobischen Algorithmus*, S. B. Öster. Akad. d. Wiss., Math.-naturw. Kl. II, 173 (1964), S. 59-92.

[5] — *Ergodische Theorie des Jacobischen Algorithmus*, Acta Arith. 11 (1966), S. 451-460.

[6] — *Mischungseigenschaften und Entropie beim Jacobischen Algorithmus*, J. f. d. Reine u. Angew. Math. (im Druck).

[7] — *Eine Bemerkung zu einer Arbeit von S. D. Chatterji* (im Druck).

Reçu par la Rédaction le 17. 3. 1967

ACTA ARITHMETICA
XIII (1968)

Verallgemeinerung eines Peterssonschen Satzes und Gitterpunkte mit Gewichten

von

B. Novák (Praha)

§ 1. Einleitung. Es sei r eine natürliche Zahl, $r \geqslant 2$ und sei

$$Q(u) = Q(u_j) = \sum_{l,j=1}^{r} a_{lj}u_lu_j \tag{1}$$

eine positiv definite quadratische Form mit der Determinante D. Seien weiter

$$M_1, M_2, \ldots, M_r, b_1, b_2, \ldots, b_r, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \qquad (M_1 > 0, M_2 > 0, \ldots, M_r > 0) \tag{2}$$

reelle Zahlen. Wir betrachten $x > 0$ und erwägen die Funktion $A(x)$, die durch

$$A(x) = \sum e^{2\pi i \sum_{j=1}^{r} a_j u_j} \tag{3}$$

definiert ist, wobei über alle r-tupel $u_1, u_2, \ldots, u_r$ reeller Zahlen, für die

$$Q(u_1, u_2, \ldots, u_r) \leqslant x \tag{4}$$

und

$$u_j \equiv b_j \ (\mathrm{mod}\ M_j) \qquad (j = 1, 2, \ldots, r) \tag{5}$$

ist, summiert wird.

In dem Spezialfall

$$a_j = b_j = 0, \qquad M_j = 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, r) \tag{6}$$

gibt (3) die Anzahl der Gitterpunkte (d.h. der Punkte mit ganzzahligen Koordinaten), die im Gebiet (4) liegen, an. Im allgemeinen Fall wird also eine „Ausdehnung" und „Verschiebung" des Gitters zugelassen und jeder Punkt wird mit einem gewissen „Gewicht" gerechnet. Unter der Voraussetzung (6) wollen wir die Funktion (3) durch das Volumen des Ellipsoides (4) zu approximieren. Im allgemeinen Fall setzen wir

$$(7)\qquad V(x)=\frac{\pi^{\frac{r}{2}}x^{\frac{r}{2}}e^{2\pi i\sum\limits_{j=1}^{r}a_jb_j}}{\sqrt{D}\prod\limits_{j=1}^{r}M_j\Gamma(\frac{1}{2}r+1)}\,\delta$$

($\delta=1$, wenn alle Zahlen $a_1M_1, a_2M_2, \ldots, a_rM_r$ ganz sind, sonst $\delta=0$) und wir untersuchen den dazugehörenden Rest

$$(8)\qquad P(x)=A(x)-V(x).$$

In den Jahren 1915-1924 bewies Landau [5] (Seite 11-84) die folgende Fundamentalbehauptung:

$$(9)\qquad P(x)=O(x^{r/2-r/(r+1)})$$

und (unter der Voraussetzung $A(x)\not\equiv 0$)

$$(10)\qquad P(x)=\Omega(x^{(r-1)/4}).$$

Eine weitere Verbesserung der Abschätzungen (9) und (10) wurde mit Rücksicht auf die Schwierigkeit der ganzen Problematik auf einige wichtige Spezialfälle beschränkt. Im Rationalfall (d.h. wenn die Koeffizienten der Form (1) und alle Zahlen (2) rational sind) bewiesen Landau und Walfisz ([5], Seite 148-154 und [9]) für $r>4$ die Beziehung

$$(11)\qquad P(x)=O(x^{r/2-1}).$$

Der Rationalfall wurde so für $a_1=a_2=\ldots=a_r=0$ gelöst, indem — wie es Jarník (bei Landau [5], Seite 162) zeigte — bei diesen Voraussetzungen auch

$$(12)\qquad P(x)=\Omega(x^{r/2-1})$$

ist. Walfisz [11] bewies die Gültigkeit dieser Beziehung unter einer allgemeineren Voraussetzung (immer wird noch der Rationalfall und $r>4$ gemeint), daß mindestens eine der zugehörigen verallgemeinerten Gaussschen Summen (siehe § 2) von Null verschieden ist (1).

Die Beziehung (11) wurde auf dem Grund der „Kreismethode" von Hardy und Littlewood bewiesen. Mittels deren konsequenter Ausnützung bewies Petersson den folgenden Satz (Satz A′ in [8]):

(1) Sonst ist $P(x)=O(x^{r/4}\lg x)$ und mit Hilfe der Modulformen kann man den Exponent $r/4$ noch verkleinern (siehe [11]).

Peterssonscher Satz. *Es seien die Zahlen a_{lj} ($l,j=1,2,\ldots,r$) ganz, $a_j=0$ und b_j, M_j rational ($j=1,2,\ldots,r$), $r>4$. Sei $E>0$ eine (nicht notwendig ganze) Zahl, daß alle Zahlen EM_j, Eb_j ($j=1,2,\ldots,r$) ganz sind. Dann gilt für $x\to+\infty$*

$$(13)\qquad A(x)=\frac{V(n+\frac{1}{2})}{E^r}+\sum_{0\leqslant j<r/4-1}\frac{(n+\frac{1}{2})^{r/2-j-1}}{(2\pi i)^{j+1}\Gamma(\frac{1}{2}r-j)}H_j(n)+O(n^{r/4}\lg n),$$

wobei $n=[E^2x]$ und $H_j(n)$ durch bestimmte Reihen, die für die betrachteten Werte n und j absolut und gleichmäßig konvergent sind, definiert sind,

$$H_j(n)=O(1)$$

(für $x\to+\infty$, $0\leqslant j<r/4-1$).

(Einen vereinfachsten Beweis dieses Satzes in einer etwas stärkeren Formulation unter der Voraussetzung (6) und für $Q(u)=\sum\limits_{j=1}^{r}u_j^2$ gibt Walfisz in [12].)

Aus der Zeitperiode nach 1926 liegt für den Fall $r>4$ eine Reihe von bedeutenden Arbeiten vor, insbesondere von Jarník und Walfisz. In den Arbeiten [1] und [2] arbeitete Jarník eine Methode für die O-Abschätzungen der Funktion $P(x)$ aus und benützte diese für den Fall, daß die Form (1) eine Diagonalform

$$(14)\qquad Q(u)=\sum_{j=1}^{r}a_ju_j^2$$

ist, $r\geqslant 4$. In [1] und [2] ist besonders bewiesen ($r>4$):

I. Es ist immer

$$P(x)=O(x^{r/2-1}).$$

II. Ist wenigstens eine der Zahlen

$$\frac{a_2}{a_1},\ \frac{a_3}{a_1},\ \ldots,\ \frac{a_r}{a_1}$$

irrational, ist sogar (2)

$$(15)\qquad P(x)=o(x^{r/2-1}).$$

III. Für fast alle Systeme $a_1>0, a_2>0, \ldots, a_r>0$ (im Sinne des Lebesgueschen Maßes in E_r) ist

$$P(x)=O(x^{r/4+\varepsilon})$$

für jedes $\varepsilon>0$.

(2) Genauer: die Beziehung (15) ist für $r>5$ in [2] und für $r=5$ in [13] bewiesen.

In der Arbeit [3] wird weiter bewiesen, daß man die Behauptung II nicht ohne weitere Voraussetzungen über die Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_r$ verschärfen kann:

IV. Ist $\varphi(x)$ eine positive und fallende Funktion, $\varphi(x) = o(1)$, dann gibt es ein r-tupel positiver Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_r$ so, daß für die Form (14) die Beziehung (15) gilt und daß

$$P(x) = \Omega\left(x^{r/2-1}\varphi(x)\right)$$

ist. (Diese Behauptung wurde zum erstenmal von Walfisz in [10] — auf eine andere Art und für $r \geqslant 10$ — bewiesen.)

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist das Studium der Funktion (3) bei der Voraussetzung, daß die Koeffizienten der Form (1) und die Zahlen M_j und b_j $(j = 1, 2, \dots, r)$ ganz sind. Die Zahlen $a_1, a_2, \dots, a_r$ können also beliebige reelle Werte annehmen. Der Ausgangpunkt unserer Untersuchungen wird die Verallgemeinerung des zitierten Peterssonschen Satzes (Satz 1) sein, von der wir eine Fundamentalbeziehung für O-Abschätzungen (Satz 2) herleiten. Daraus leiten wir dann drei Sätze ab, die den Behauptungen I-IV analog sind.

Die Verallgemeinerung des Peterssonschen Satzes und die weiteren Betrachtungen beruhen auf einer Darstellung für die Funktion

$$A'(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{A(x+\varepsilon) + A(x-\varepsilon)}{2} \tag{16}$$

mit Hilfe der entsprechenden Thetafunktion analog wie in der Arbeit [1]. Die Herleitung der Beziehung für O-Abschätzungen vom Satz 1 ermöglicht die übliche Untersuchung der Funktion

$$\int_0^x A(y)\,dy$$

und den Übergang zu der Funktion $A(x)$ zu eliminieren.

Einige Ergebnisse dieser Arbeit wurden mit einer Andeutung der Beweise in [6] bzw. in der vorläufigen Mitteilung [7] veröffentlicht.

§ 2. Hilfsbehauptungen. In der ganzen Arbeit (wenn ausdrücklich nicht anderes gesagt wird) werden außer der üblichen Symbolik folgende Verabredungen und Bezeichnungen beibehalten:

Für natürliche p sei E_p der p-dimensionale Euklidische Raum. Die Buchstaben r, k und l bezeichnen natürliche Zahlen, j und n sind nichtnegative ganze Zahlen, h und m (eventuell mit Index versehen) sind ganze Zahlen. Treten zugleich h und k auf, so ist $(h, k) = 1$. Das Symbol $\sum\limits_h$ bzw. $\sum\limits_{(m)}$ bedeutet die Summation über alle h, für die $0 \leqslant h < k$ (und nach dem obigen auch $(h, k) = 1$) bzw. die Summmation über alle r-tupel $m_1, m_2, \dots, m_r$ ganzer Zahlen.

Für $t \in E_1$ bedeutet $[t]$ den ganzen Teil der Zahl t; weiter setzen wir

$$\langle t \rangle = \min(t-[t], 1-t+[t]).$$

Der Buchstabe μ bedeute eine (im allgemeinen komplexe) Größe, deren Absolutwert höchstens 1 ist, ε und x bedeuten immer positive reelle Zahlen. Unter einem Integral verstehen wir immer ein (absolut konvergentes) Lebesguesches Integral; für $\mathfrak{N} \subset E_1$ bedeutet

$$\int_{\mathfrak{N}} f(y)\,dy$$

das Lebesguesche Integral der Funktion f über die Menge $\mathfrak{N}$ (wenn dieses existiert).

E bedeutet die Menge aller endlichen komplexen Zahlen. Das Kurvenintegral wird wie üblich definiert, speziell für $s_1, s_2 \in E$ setzen wir

$$\int_{s_1}^{s_2} f(s)\,ds = (s_2 - s_1) \int_0^1 f\left(s_1 + t(s_2 - s_1)\right) dt,$$

wenn das Integral rechts existiert. Für $a \in E_1$ weiter setzen wir

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} f(s)\,ds = \lim_{T \to +\infty} \int_{a-iT}^{a+iT} f(s)\,ds,$$

wenn der Grenzwert rechts existiert und endlich ist.

Weiter behalten wir die Bezeichnungen und Definitionen aus § 1. Wir setzen also voraus, daß die Form (1) ganzzahlige Koeffizienten hat, daß die Zahlen $M_1, M_2, \dots, M_r, b_1, b_2, \dots, b_r$ ganz sind und daß $M_1 > 0, M_2 > 0, \dots, M_r > 0$. Die Funktionen $A(x)$, $V(x)$ und $P(x)$ sind durch (3), (7) und (8) definiert, die Funktion $A'(x)$ durch (16). Analog definieren wir die Funktionen $P'(x)$ und $V'(x) = V(x)$; es ist also auch

$$P'(x) = A'(x) - V(x).$$

$\bar{Q}$ bezeichne die zu Q inverse Form. Stets sei $r > 4$.

Mit c bezeichnen wir unterschiedslos positive Konstanten, die höchstens von der Form (1) und der Zahlen (2) abhängen. Die Abhängigkeit dieser Konstanten von anderen Größen wird üblicherweise mit $c(n)$, $c(\varphi, t)$ usw. bezeichnet. Ähnlich schreiben wir $n(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r)$ u. desgl. Die Symbole $\ll$, $\asymp$, O, o und Ω haben den üblichen Sinn. Die Konstanten, die in deren Definition auftreten, sind von dem „Typus" c. Über die Zahl x setzen wir immer voraus, daß sie genügend groß, d.h. $x > c$, ist.

Für $s \in E$, $\operatorname{Re} s > 0$ setzen wir

$$\Theta(s) = \sum \exp\left\{-sQ(u_j) + 2\pi i \sum_{j=1}^r a_j u_j\right\},$$

wo über alle r-tupel $u_1, u_2, \ldots, u_r$ reeller Zahlen, die (5) erfüllen, summiert wird. Die gegebene Reihe ist offenbar in jedem Gebiet $\mathfrak{Re}\, s \geqslant \varepsilon$ absolut und gleichmäßig konvergent; $\Theta(s)$ ist also eine in der Halbebene $\mathfrak{Re}\, s > 0$ reguläre Funktion. Setzen wir

$$a_n = \sum e^{2\pi i \sum_{j=1}^{r} a_j u_j}$$

(es wird über alle (5) erfüllende r-tupel $u_1, u_2, \ldots, u_r$, für die $Q(u_j) = n$ ist, summiert), dann ist offensichtlich

$$\Theta(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-ns}, \qquad A(x) = \sum_{n \leqslant x} a_n$$

und

$$A'(x) = \begin{cases} A(x) & \text{für nicht ganze } x, \\ A(x) - \tfrac{1}{2} a_n & \text{für } x = n. \end{cases}$$

Wie bekannt, ist

$$A(x) \ll x^{r/2}$$

und deswegen auch

$$a_n \ll (n+1)^{r/2}. \tag{17}$$

Wir bemerken, daß die Funktionen $A(x)$, $V(x)$ usw. von Q und den Zahlen (2) abhängen. In manchen Fällen wird diese Abhängigkeit hervorgehoben ($A(x; a_1, a_2, \ldots, a_r)$ usw.). Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann man voraussetzen, daß $0 \leqslant b_j < M_j$ und daß alle Zahlen a_j $(j = 1, 2, \ldots, r)$ im Intervall $[0, 1)$ liegen.

Lemma 1. *Für* $T \geqslant x^r$, $\langle x \rangle \geqslant x^{-r/2}$ *oder* $\langle x \rangle = 0$ *ist*

$$A'(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{1/x - iT}^{1/x + iT} \frac{e^{xs}\Theta(s)}{s}\, ds + O(1). \tag{18}$$

Beweis. Sei $T, b > 0$. Aus dem Cauchyschen Satz und mittels direkter Berechnung ergibt sich sofort

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{e^{us}}{s}\, ds = \begin{cases} 1 + \mu \dfrac{e^{ub}}{Tu} & \text{für} \quad u > 0, \\ \mu \dfrac{e^{ub}}{T|u|} & \text{für} \quad u < 0 \end{cases} \tag{19}$$

und

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{ds}{s} = \frac{1}{2} + \mu \frac{b}{T}. \tag{20}$$

Für nichtganze x bekommt man aus (19) sofort

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{e^{xs}\Theta(s)}{s}\, ds = A'(x) + O\left(\frac{1}{T} \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \frac{e^{(x-n)b}}{|x-n|}\right). \tag{21}$$

Sei S_1 die Summe

$$\sum |a_n| \frac{e^{(x-n)b}}{|x-n|}, \tag{22}$$

wo über alle n, für die $n < x/2$ oder $n > 2x$ ist, summiert wird. In S_1 ist also immer $|x-n| > x/2$ und also ist nach (17)

$$S_1 \ll \frac{1}{x} \sum_{m=1}^{\infty} m^{r/2} e^{-mb} e^{(x+1)b} \ll \frac{e^{(x+1)b}}{x b^{r/2+1}}. \tag{23}$$

Es sei S_2 die Summe (22), wo über alle n, für die $x/2 \leqslant n \leqslant 2x$ ist, summiert wird. Sei $\langle x \rangle = |x - N|$ (N ist also eine natürliche Zahl). Für die betrachteten n, für die $n \leqslant N-1$ bzw. $n \geqslant N+1$ ist, haben wir $|x-n| \geqslant N - n - \frac{1}{2}$ bzw. $|x-n| \geqslant n - N - \frac{1}{2}$ und nach (17)

$$a_n \ll x^{r/2}.$$

Also ist für nichtganzes x $(|x-n| \leqslant x)$

$$S_2 \ll x^{r/2} e^{xb} \left(\sum_{m=1}^{x} \frac{1}{m} + \frac{1}{\langle x \rangle}\right) \ll x^{r/2} e^{(x+1)b} \left(\lg x + \frac{1}{\langle x \rangle}\right). \tag{24}$$

Ist nun $x = N$ (N ist eine natürliche Zahl), d.h. $\langle x \rangle = 0$, kann man im O-Glied der Beziehung (21) für $n \neq N$ summieren und alle Betrachtungen wiederholen (dann ist $|x-n| \geqslant 1$) und für $n = N$ benützt man (20). Im Ganzen kann man

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{b-iT}^{b+iT} \frac{e^{xs}}{s} \Theta(s)\, ds$$

$$= A'(x) + O\left(\frac{x^{r/2} e^{(x+1)b}}{T} \left(\frac{1}{(bx)^{r/2+1+\lg x}}\right)\right) + \begin{cases} O\left(\dfrac{x^{r/2} b}{T}\right) & \text{für} \quad \langle x \rangle = 0, \\ O\left(\dfrac{x^{r/2} e^{(x+1)b}}{T \langle x \rangle}\right) & \text{für} \quad \langle x \rangle \neq 0 \end{cases}$$

schreiben. Setzt man nun $b = 1/x$ und ist $\langle x \rangle \geqslant x^{-r/2}$ oder $\langle x \rangle = 0$, $T \geqslant x^r$, bekommt man sofort die Beziehung (18).

Definition 1. Für $(m) = (m_1, m_2, \ldots, m_r)$ setzen wir

$$S_{h,k,(m)} = \sum_{a_1, a_2, \ldots, a_r = 1}^{k} \exp\left\{-2\pi i \frac{h}{k} Q(a_j M_j + b_j) + \frac{2\pi i}{k} \sum_{j=1}^{r} \frac{m_j}{M_j} (a_j M_j + b_j)\right\}$$

(die sogenannte verallgemeinerte Gausssche Summe).

Lemma 2. *Für $s \in E$, $\operatorname{Re} s > 0$ gilt*

$$\Theta(s) \tag{25}$$

$$= \frac{\pi^{r/2}}{\sqrt{D} \prod_{j=1}^{r} M_j k^r \left(s - \frac{2\pi i h}{k}\right)^{r/2}} \sum_{(m)} S_{h,k,(m)} \exp\left\{-\frac{\pi^2}{k^2 \left(s - \frac{2\pi i h}{k}\right)} \bar{Q}\left(\frac{m_j}{M_j} - a_j k\right)\right\}$$

(für $a \in E_1$ bedeutet z^a hier denjenigen Zweig von z^a in der Halbebene $\operatorname{re} z > 0$, der positiv für positive z ist). Weiter ist immer

$$S_{h,k,(m)} \ll k^{r/2} \tag{26}$$

und ist $(k, 2D \prod_{j=1}^{r} M_j^2) = 1$, so ist sogar

$$|S_{h,k,(m)}| = k^{r/2}. \tag{27}$$

Beweis. Siehe z.B. [4], Seite 154-157. Den Verlauf des Beweises, der in dieser Arbeit unter der Voraussetzung (6) gegeben ist, kann man auch auf diesen allgemeineren Fall übertragen. Für den zweiten Teil des Lemma siehe auch [11], Seite 46-47.

Bemerkung 1. Für $v = (v_1, v_2, \ldots, v_r) \in E_r$ setzen wir

$$\|v\| = \max_{j=1,2,\ldots,r} |v_j|.$$

Die Funktion $\bar{Q}(v_j/M_j)$ ist offenbar auf der Menge der $v \in E_r$ mit $\|v\| = 1$ stetig und positiv. Für diese v ist also

$$\bar{Q}\left(\frac{v_j}{M_j}\right) \asymp 1. \tag{28}$$

Ist nun $v = (v_1, v_2, \ldots, v_r) \in E_r$, $v \neq (0, 0, \ldots, 0)$ und benützt man (28) für den Punkt

$$\left(\frac{v_1}{\|v\|}, \frac{v_2}{\|v\|}, \ldots, \frac{v_r}{\|v\|}\right)$$

bekommt man sofort

$$\bar{Q}\left(\frac{v_j}{M_j}\right) \asymp \|v\|^2. \tag{29}$$

Ist also $\|v\| < \frac{1}{2}$ und $(m_1, m_2, \ldots, m_r) \neq (0, 0, \ldots, 0)$, so ist

$$\bar{Q}\left(\frac{m_j + v_j}{M_j}\right) \geqslant c_1 > 0$$

für eine passende Konstante $c_1 = c$. Ist noch $\bar{Q}(v_j/M_j) \leqslant c_1/2$ d.h. z.B. für $\|v\| \leqslant c_2 = c$, so ist

$$\bar{Q}\left(\frac{m_j + v_j}{M_j}\right) - \bar{Q}\left(\frac{v_j}{M_j}\right) \geqslant \frac{c_1}{2}$$

für alle Systeme $(m_1, m_2, \ldots, m_r) \neq (0, 0, \ldots, 0)$.

Definition 2. Man setze

$$P_k = \max_{j=1,2,\ldots,r} \langle a_j M_j k \rangle, \qquad R_k = \min_{(m)} \bar{Q}\left(\frac{m_j}{M_j} - a_j k\right) \tag{30}$$

(das letzte Minimum wird auf alle Systeme $(m_1, m_2, \ldots, m_r)$ bezogen).

Ist die Beziehung

$$\bar{Q}\left(\frac{m_j}{M_j} - a_j k\right) = R_k \tag{31}$$

für ein einziges System $(m) = (m_1, m_2, \ldots, m_r)$ erfüllt, sei

$$S_{h,k} = S_{h,k,(m)}. \tag{32}$$

Sonst wählen wir für jedes solche k ein System (m), welches (31) erfüllt und die Zahl $S_{h,k}$ wird wieder durch (32) definiert.

Bemerkung 2. Aus der Beziehung (29) bekommt man leicht, daß

$$R_k \asymp P_k^2 \tag{33}$$

ist. Aus der Bemerkung 1 folgt weiter: es gibt eine Konstante $c_2 = c$ so, daß sobald $R_k < c_2$ oder $P_k < c_2$ und

$$R_k = \bar{Q}\left(\frac{m_j}{M_j} - a_j k\right)$$

ist, so ist $\langle a_j M_j k \rangle = |m_j - a_j M_j k|$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$. Es gibt also eine Konstante $c_2 = c$ so, daß für die Werte von k, fur die $R_k < c_2$ ist, der Wert des Ausdruckes (32) eindeutig bestimmt ist.

§ 3. Verallgemeinerung des Peterssonschen Satzes.

Bemerkung 3. Bei dem Beweis des verallgemeinerten Peterssonschen Satzes wird von der Beziehung (18) ausgegangen. Der Integrationsweg wird zuerst mit Hilfe von Fareybrüchen auf gewiße Intervalle zerteilt und in jedem dieser Intervalle (25) benutzt. Daraus erhält man einen asymptotischen Ausdruck für die Funktion $A'(x)$ mit Hilfe gewisser

Hilfsfunktionen $F(x, a, b)$, deren Beschreibung das Lemma 4 gewidmet ist. Durch Adjustieren der Summationsgrenzen und Ausdehnung der Gültigkeit der Formel auf stetig wachsendes x bekommen wir den gesuchten Satz.

LEMMA 3. *Für $a, b \in E_1$, $b \geqslant 0$ sei*([3])

$$F(x, a, b) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\frac{1}{x}-i\infty}^{\frac{1}{x}+i\infty} \frac{e^{xs-b/(s-ia)}}{(s-ia)^{r/2}s}\, ds.$$

Dann ist für $\langle x\rangle \geqslant x^{-r/2}$ oder $\langle x\rangle = 0$

$$(34)\qquad A'(x) = \frac{\pi^{r/2}}{\sqrt{D}\prod\limits_{j=1}^{r} M_j} \sum_{k\leqslant x} \sum_{|h|\leqslant kT_1} \frac{S_{h,k}}{k^r} F\left(x, 2\pi\frac{h}{k}, \frac{\pi^2 R_k}{k^2}\right) + O(x^{r/4}\lg x),$$

wo $T_1 = [x^r]$.

Der Beweis wird in drei Teile zerlegt.

a) Wir nehmen die Fareyschen Brüche, welche zu der Zahl $\sqrt{x}$ gehören, d.h. alle Brüche der Form h/k, wo $k \leqslant \sqrt{x}$. Zu jedem Fareybruch h/k gibt es genau ein Paar von Fareybrüchen h'/k', h''/k'' mit $h'/k' < h/k < h''/k''$ $(0 < k' \leqslant \sqrt{x},\ 0 < k'' \leqslant \sqrt{x},\ (h', k') = 1,\ (h'', k'') = 1)$, sodaß zwischen h'/k', h''/k'' genau ein Fareybruch, nämlich h/k, liegt. Dann bezeichen wir mit $\mathfrak{B}_{h,k}$ das Intervall

$$\left[2\pi\frac{h+h'}{k+k'}, 2\pi\frac{h+h''}{k+k''}\right);$$

bekanntlich ist (siehe z.B. [5], Seite 249-250) $k+k' > \sqrt{x}$, $k+k'' > \sqrt{x}$, $hk'-kh' = 1$, $h''k-hk'' = 1$ und also

$$(35)\qquad \mathfrak{B}_{h,k} = \left[\frac{2\pi h}{k} - \frac{\vartheta'}{k\sqrt{x}}, \frac{2\pi h}{k} + \frac{\vartheta''}{k\sqrt{x}}\right) \qquad (\pi \leqslant \vartheta', \vartheta'' \leqslant 2\pi).$$

Auf Grund der Beziehung (25) kann leicht festgestellt werden, daß für $s = 1/x+it$, $k \leqslant \sqrt{x}$ und

$$\left|t - 2\pi\frac{h}{k}\right| \leqslant \frac{1}{k\sqrt{x}}$$

([3]) Es kann leicht festgestellt werden (integrierbare Majorante), daß $F(x, a, b)$ eine stetige Funktion der Veränderlichen a, b, x im Gebiet $a, b, x \in E_1$, $b \geqslant 0$, $x > 0$ ist.

(speziell für $t \in \mathfrak{B}_{h,k}$)

$$(36)\qquad \Theta(s) = \frac{\pi^{r/2} S_{h,k} \exp\left\{-\dfrac{\pi^2 R_k}{k^2(s-2\pi i h/k)}\right\}}{\sqrt{D}\prod\limits_{j=1}^{r} M_j k^r (s-2\pi i h/k)^{r/2}} + \frac{c\mu x^{r/2} \exp\left\{-\dfrac{cx}{k^2(1+x^2|t-2\pi h/k|^2)}\right\}}{k^{r/2}(1+x^2|t-2\pi h/k|^2)^{r/4}}$$

ist. Benutzt man nämlich den Ausdruck (25) und sondert man in der Summe das Glied mit den, in der Definition 2 für $S_{h,k}$ benutzten, $m_1, m_2, \ldots, m_r$ aus, so ist in der übrigen Summe nach der Bemerkung 1 immer $((m_1', m_2', \ldots, m_r') \neq (m_1, m_2, \ldots, m_r))$

$$\bar{Q}\left(\frac{m_j'}{M_j} - a_j k\right) \geqslant c,$$

und da für $s = 1/x+it$, $|t-2\pi h/k| \leqslant 1/k\sqrt{x}$

$$\operatorname{Re}\frac{1}{k^2\left(s-\dfrac{2\pi i h}{k}\right)} = \frac{x}{k^2\left(1+x^2\left(t-\dfrac{2\pi h}{k}\right)^2\right)} > c$$

ist, bekommt man sofort die Beziehung (36) (siehe auch (26)).

b) Das Intervall $[-2\pi T_1, 2\pi T_1)$ wird mit einer minimalen Anzahl der Intervalle $\mathfrak{B}_{h,k}$ $(k \leqslant \sqrt{x})$ überdeckt. Ihre Vereinigung ist ein Intervall der Länge $2T$, wo nach (35) $T = 2\pi T_1 + O(1/\sqrt{x})$ ist. Nach dem Lemma 1 ist für $\langle x\rangle \geqslant x^{-r/2}$ oder $\langle x\rangle = 0$ $(s = 1/x+it)$

$$(37)\qquad A'(x) = \sum_{k\leqslant\sqrt{x}} \sum_{|h|\leqslant kT_1} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathfrak{B}_{h,k}} \frac{e^{xs}}{s}\Theta(s)\, dt + O(1)$$

und aus (36) bekommen wir (siehe (35))

$$(38)\qquad \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathfrak{B}_{h,k}} \frac{e^{xs}}{s}\Theta(s)\, dt =$$

$$\frac{\pi^{r/2} S_{h,k}}{\sqrt{D}\prod\limits_{j=1}^{r} M_j k^2} \cdot \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathfrak{B}_{h,k}} \frac{\exp\left\{xs - \dfrac{\pi^2 R_k}{k^2(s-2\pi i h/k)}\right\}}{(s-2\pi i h/k)^{r/2} s}\, dt +$$

$$+ c\mu\left(\frac{x}{k}\right)^{r/2} \int\limits_{-c/k\sqrt{x}}^{c/k\sqrt{x}} \frac{\exp\left\{-\dfrac{cx}{k^2(1+x^2u^2)}\right\} du}{(1+x^2u^2)^{r/4}\left|\dfrac{1}{x} + i\left(u + \dfrac{2\pi h}{k}\right)\right|}$$

Wir betrachten zuerst die zweiten Glieder — wir bezeichnen sie mit $T_{h,k}$ — der rechten Seite von (38). Für $h=0$ (und also notwendig $k=1$) bekommen wir

$$T_{0,1} \ll x^{r/4+1/2} \int\limits_0^{c/\sqrt{x}} \left(\frac{x}{1+x^2u^2}\right)^{r/4+1/2} e^{-cx/(1+x^2u^2)}\,du \ll x^{r/4}, \tag{39}$$

da die Funktion $\xi^c e^{-c\xi}$ im Intervall $[0,+\infty)$ beschränkt ist. Für $h\neq 0$ genügt es natürlich den Fall $h>0$ zu betrachten. Für $t\in\mathfrak{B}_{h,k}$ ist aber (siehe (35))

$$\lim_{x\to+\infty}\left|\frac{1}{x}+it\right| = \frac{2\pi h}{k}$$

und ähnlich wie in (39) erhalten wir ($|1/x+i(u+2\pi h/k)|\gg h/k$)

$$T_{h,k} \ll \left(\frac{x}{k}\right)^{r/2} \frac{k}{h} \int\limits_0^{c/k\sqrt{x}} \frac{e^{-cx/k^2(1+x^2u^2)}}{(1+x^2u^2)^{r/4}}\,du \tag{40}$$

$$\ll \frac{x^{r/4}k}{h} \int\limits_0^{c/k\sqrt{x}} \left(\frac{x}{k^2(1+x^2u^2)}\right)^{r/4} e^{-cx/k^2(1+x^2u^2)}\,du \ll \frac{x^{r/4-1/2}}{h}.$$

Durch Summation von (40) über die betrachteten h und k bekommen wir zusammen mit (39) für die entsprechenden x nach (37) und (38)

$$A'(x) = \frac{\pi^{r/2}}{\sqrt{D}\prod\limits_{j=1}^{r} M_j} \sum_{k\leq\sqrt{x}} \sum_{|h|\leq kT_1} \frac{S_{h,k}}{k^r} \times$$

$$\times \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathfrak{B}_{h,k}} \frac{\exp\left\{xs-\dfrac{\pi^2R_k}{k^2(s-2\pi ih/k)}\right\}}{(s-2\pi ih/k)^{r/2}s}\,dt + O(x^{r/4}\lg x).$$

c) Um (34) zu beweisen, bedenken wir, daß

$$\left|F(x,0,\pi^2R_1) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathfrak{B}_{0,1}} \frac{\exp\left\{xs-\dfrac{\pi^2R_1}{s}\right\}}{s^{r/2+1}}\,dt\right|$$

$$\ll \int\limits_{c/\sqrt{x}}^{\infty} \frac{dt}{|1/x+it|^{r/2+1}} \ll \int\limits_{c/\sqrt{x}}^{\infty} \frac{dt}{t^{r/2+1}} \ll x^{r/4}$$

und für $h>0$ ist

$$\left|\frac{S_{\pm h,k}}{k^r}\left(F\left(x,\pm 2\pi\frac{h}{k},\frac{\pi^2R_k}{k^2}\right) - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathfrak{B}_{\pm h,k}} \frac{\exp\left\{xs-\dfrac{\pi^2R_k}{k^2(s\pm 2\pi ih/k)}\right\}}{(s\pm 2\pi ih/k)^{r/2}s}\,dt\right)\right|$$

$$\ll \frac{x^{r/2+1}}{k^{r/2}} \int\limits_{c/k\sqrt{x}}^{\infty} \frac{du}{(1+x^2u^2)^{r/4}\left(1+x^2\left(u-\dfrac{2\pi h}{k}\right)^2\right)^{1/2}}$$

$$\ll \frac{x^{r/2+1}}{k^{r/2}}\left(\int\limits_{c/k\sqrt{x}}^{\pi h/k}\ldots du + \int\limits_{\pi h/k}^{\infty}\ldots du\right) \ll \frac{1}{hk^{r/2-1}}\int\limits_{c/k\sqrt{x}}^{\infty}\frac{du}{u^{r/2}} + \frac{x}{k^{r/2}}\int\limits_{\pi h/k}^{\infty}\frac{du}{u^{r/2}}$$

$$\ll \frac{x^{r/4-1/2}}{h} + \frac{x}{kh^{r/2-1}}.$$

Summation über h und k ergibt

$$O\left(x\sum_{k\leq\sqrt{x}}\frac{1}{k}\sum_{h=1}^{T_1k}\frac{1}{h^{r/2-1}} + x^{r/4-1/2}\sum_{k\leq\sqrt{x}}\sum_{h=1}^{T_1k}\frac{1}{h}\right) = O(x^{r/4}\lg x). \tag{41}$$

Dadurch ist (34) vollkommen bewiesen. Wir bemerken noch ausdrücklich, daß alle Abschätzungen für $R_k\in[0,+\infty)$ gleichmäßig sind.

Bemerkung 4. Wenn $R_k\geq c$ ist, erhalten wir ähnlich für $h>0$

$$\frac{S_{\pm h,k}}{k^r}F\left(x,\pm 2\pi\frac{h}{k},\frac{\pi^2R_k}{k^2}\right)$$

$$\ll \left(\frac{x}{k}\right)^{r/2} \int\limits_{-c/k\sqrt{x}}^{c/k\sqrt{x}} \frac{e^{-\frac{cx}{k^2(1+x^2u^2)}}}{(1+x^2u^2)^{r/4}\left|\dfrac{1}{x}+i\left(u+\dfrac{2\pi h}{k}\right)\right|}\,du +$$

$$+\frac{x^{r/2+1}}{k^{r/2}} \int\limits_{c/k\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{du}{(1+x^2u^2)^{r/4}\left(1+x^2\left(u-\dfrac{2\pi h}{k}\right)^2\right)^{1/2}}$$

$$\ll \frac{x^{r/4-1/2}}{h} + \frac{x}{kh^{r/2-1}}$$

und für $h = 0$ (d.h. $k = 1$, $R_1 \neq 0$)

$$F(x, 0, \pi^2 R_1) \ll x^{r/2+1} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-cx/(1+x^2t^2)}}{(1+x^2t^2)^{r/4+1/2}} dt$$

$$\ll x^{r/4+1/2} \int_0^{c/\sqrt{x}} \left(\frac{x}{1+x^2t^2}\right)^{r/4+1/2} e^{-cx/(1+x^2t^2)} dt +$$

$$+ x^{r/2+1} \int_{c/\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{dt}{(1+x^2t^2)^{r/4+1/2}} \ll x^{r/4} + \int_{c/\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{dt}{t^{r/2+1}} \ll x^{r/4}.$$

Der Beitrag dieser Summanden ist nach (41) höchstens $O(x^{r/4}\lg x)$. Mit Rücksicht auf die Bemerkung 2 bekommt man daher, daß der Beitrag der Glieder der Beziehung (34), bei denen eine Willkür für die Wahl von $S_{h,k}$ vorsteht, $O(x^{r/4}\lg x)$ nicht überschreitet.

Bemerkung 5. Wir geben ohne Beweis bekannte Eigenschaften von Besselfunktionen an, die wir für positive ν, z brauchen werden. Es ist

$$(42) \qquad I_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j (z/2)^{2j}}{j!\,\Gamma(\nu+j+1)}.$$

Wie bekannt, ist

$$\lim_{z\to 0+} z^{-\nu} I_\nu(z) = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}$$

und

$$I_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + O(z^{-3/2})$$

für $z \to +\infty$. Es ist also

$$(43) \qquad I_\nu(z) \ll z^\nu, \qquad I_\nu(z) \ll z^{-1/2}$$

und

$$(44) \qquad I_\nu(z) \ll 1$$

gleichmäßig für $z \in (0, +\infty)$. Weiter gilt

$$(45) \qquad \frac{d}{dz}\big(z^\nu I_\nu(z)\big) = z^\nu I_{\nu-1}(z)$$

und aus der Hankelschen Formel ergibt sich sofort

$$(46) \qquad \frac{1}{2\pi i} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} \frac{e^{xs-b/s}}{s^{\nu+1}} ds = \begin{cases} \left(\dfrac{x}{b}\right)^{\nu/2} I_\nu(2\sqrt{bx}) & \text{für} \quad b > 0, \\ \dfrac{x^\nu}{\Gamma(\nu+1)} & \text{für} \quad b = 0, \end{cases}$$

wenn $d > 0$ ist.

LEMMA 4. *Es sei $a, b \in E_1$, $a \neq 0$, $b > 0$. Dann gilt*

$$(47) \qquad F(x, 0, b) = \left(\frac{x}{b}\right)^{r/4} I_{r/2}(2\sqrt{bx}), \qquad F(x, 0, 0) = \frac{x^{r/2}}{\Gamma(\frac{1}{2}r+1)},$$

$$(48) \quad F(x, a, b) = e^{iax} \sum_{0\leqslant j<r/4-1} \frac{(-1)^j}{(ai)^{j+1}} \left(\frac{x}{b}\right)^{r/4-(j+1)/2} I_{r/2-j-1}(2\sqrt{bx}) + \psi(x, a, b)$$

und

$$(49) \qquad F(x, a, 0) = e^{iax} \sum_{0\leqslant j<r/4-1} \frac{(-1)^j}{(ai)^{j+1}} \cdot \frac{x^{r/2-j-1}}{\Gamma(\frac{1}{2}r-j)} + \psi(x, a, 0),$$

wo $\psi(x, a, d)$ eine bestimmte, für $a, d \in E_1$, $a \neq 0$, $d \geqslant 0$ definierte Funktion ist, für die bei $n = -[1-r/4]$

$$(50) \qquad \psi(x, a, d) \ll \frac{x^{r/2-n-1}}{|a|^{n+1}} \lg(1+|ax|)$$

gleichmäßig für $d \in [0, +\infty)$ gilt.

Beweis. Die Beziehungen (47) folgen unmittelbar aus (46). Es sei $a \neq 0$ und $n = -[1-r/4]$, d.h. n ist die kleinste ganze Zahl, für die $r/4 - 1 \leqslant n$ ist. Immer ist $(r > 4)$ $n \geqslant 1$ und $r/4+1 \geqslant r/2-n > r/4 > 1$. Beachtet man, daß für $s \in E$, $\operatorname{Re} s \neq 0$, $a \in E_1$, $a \neq 0$

$$\frac{1}{s+ai} = \frac{1}{ai} \sum_{j=0}^{n-1} \left(-\frac{s}{ai}\right)^j + \frac{(-s/ai)^n}{s+ai}$$

ist und für $a > 0$, $d \geqslant 0$

$$\left| \int_{1/x-i\infty}^{1/x+i\infty} \frac{e^{xs-d/s}}{s^{r/2-n}(s \pm ai)} ds \right| \ll x^{r/2-n+1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{(1+x^2t^2)^{r/4-n/2}(1+x^2|t\pm a|^2)^{1/2}}$$

$$\ll x^{r/2-n} \int_0^\infty \frac{du}{(1+u)(1+|u-ax|)} \ll \frac{x^{r/2-n}}{ax} \lg(1+ax)$$

gleichmäßig für $d \in [0, +\infty)$ ist, bekommt man aus der Definition der Funktion F durch Benutzung von (46) sofort die Behauptung des Lemma.

DEFINITION 3. *Sei $0 \leqslant j < r/4-1$, $0 \leqslant h < k$.* Für $y \in E_1$ setzen wir

$$(51) \qquad f_j(y, h, k) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{\substack{m \neq -\frac{h}{k} \\ |m|<N}} \frac{e^{2\pi i m y}}{\left(m + \frac{h}{k}\right)^{j+1}}.$$

Weiter sei

$$\varphi(k,j,x)=\begin{cases}\left(\dfrac{xk^2}{\pi^2R_k}\right)^{r/4-(j+1)/2} I_{r/2-j-1}\left(2\pi\sqrt{\dfrac{xR_k}{k^2}}\right) & \text{für}\quad R_k\neq 0,\\[2ex] \dfrac{x^{r/2-j-1}}{\Gamma(\frac{1}{2}r-j)} & \text{für}\quad R_k=0\end{cases}\tag{52}$$

und

$$\varphi(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{x}{\pi^2R_1}\right)^{r/4} I_{r/2}(2\pi\sqrt{R_1x}) & \text{für}\quad R_1\neq 0,\\[2ex] \dfrac{x^{r/2}}{\Gamma(\frac{1}{2}r+1)} & \text{für}\quad R_1=0.\end{cases}\tag{53}$$

Lemma 5. *Sei $0\leqslant j<r/4-1$. Wir setzen $\min(A,1/0)=A$ für $A>0$. Dann ist*

$$\varphi(k,j,x)\ll\left(xk^2\min\left(\frac{x}{k^2},\frac{1}{R_k}\right)\right)^{r/4-(j+1)/2}.\tag{54}$$

Weiter gilt für $0\leqslant h<k$

$$f_0(y,0,1)=2i\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{\sin 2\pi my}{m}=\begin{cases}2\pi i(\frac{1}{2}+[y]-y) & \textit{für nichtganze } y,\\ 0 & \textit{für ganze } y,\end{cases}\tag{55}$$

$$f_j(y,0,1)=O(1).\tag{56}$$

Ist $h\neq 0$, dann ist

$$f_0(y,h,k)=\frac{k}{h}-2\frac{h}{k}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{\cos 2\pi my}{m^2-h^2/k^2}+ +2i\frac{h^2}{k^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi my}{m(m^2-h^2/k^2)}+2i\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin 2\pi my}{m}\tag{57}$$

und

$$f_j(y,h,k)\ll\max{}^{j+1}\left(\frac{k}{h},\frac{k}{k-h}\right).\tag{58}$$

Die gegebenen Abschätzungen sind für $y\in E_1$ gleichmäßig. Die Funktionen $f_j(y,h,k)$ sind für $j>0$ im E_1 stetig, die ersten zwei Reihen in (57) geben eine stetige Funktion der Veränderlichen y im E_1 an (4).

(4) Einen Teil von diesem Lemma gibt Walfisz in [12] an. Man beachte, daß die letzte Summe in (57) von h und k unabhängig ist.

Beweis. Die Beziehung (54) bekommen wir sofort von (52), (43) und (44). Die Beziehungen (55) und (56) sind klar. Zum Beweis von (57) bedenken wir, daß für $m\geqslant 1$ und $\xi\in(0,1)$

$$\frac{e^{2\pi imy}}{m+\xi}+\frac{e^{-2\pi imy}}{\xi-m}=-\frac{2\xi\cos 2\pi my}{m^2-\xi^2}+\frac{2i\xi^2\sin 2\pi my}{m(m^2-\xi^2)}+\frac{2i\sin 2\pi my}{m}$$

ist und daß die in (57) auftretenden Reihen konvergent sind. Daher bekommen wir auch, daß ($h\neq 0$)

$$|f_0(y,h,k)| \leqslant\frac{k}{h}+2\frac{h}{k}\cdot\frac{1}{1-h^2/k^2}+2\sum_{m=2}^{+\infty}\frac{1}{m^2-1}+2\frac{h^2}{k^2}\cdot\frac{1}{1-h^2/k^2}+2\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{m(m^2-1)}+\pi \ll\frac{k}{h}+\frac{k}{k-h}\ll\max\left(\frac{k}{h},\frac{k}{k-h}\right)$$

ist. Für $j>0$, $h>0$ ist ähnlich

$$|f_j(y,h,k)|\ll\frac{k^{j+1}}{h^{j+1}}+\frac{1}{(1-h/k)^{j+1}}+\sum_{m=2}^{\infty}\frac{1}{(m-1)^{j+1}}\ll\max{}^{j+1}\left(\frac{k}{h},\frac{k}{k-h}\right).$$

Den Letzten Teil der Behauptung erhält man sofort aus der absoluten und gleichmäßigen Konvergenz der zugehörigen Reihen für $y\in E_1$.

Satz 1 (Verallgemeinerung des Peterssonschen Satzes).

$$P'(x)=\frac{\pi^{r/2}}{\sqrt{D}\prod_{j=1}^{r}M_j}\sum_{0\leqslant j<r/4-1}\frac{(-1)^j}{(2\pi i)^{j+1}}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\varphi(k,j,x)}{k^r}\times \times\sum_h{}' S_{h,k}e^{2\pi i\frac{h}{k}x}f_j(x,h,k)+O(x^{r/4}\lg x).\tag{59}$$

Der Beweis wird in einigen Teilen durchgeführt.

a) Wir setzen

$$M=\frac{1}{\sqrt{D}\prod_{j=1}^{r}M_j}.$$

Für $h\neq 0$, $k\leqslant\sqrt{x}$ ist nach Lemma 4 und der Definition 3

$$F\left(x,2\pi\frac{h}{k},\pi^2\frac{R_k}{k^2}\right) =e^{2\pi i\frac{h}{k}x}\sum_{0\leqslant j<r/4-1}\frac{(-1)^jk^{j+1}}{(2\pi ih)^{j+1}}\varphi(k,j,x)+O\left(\frac{x^{r/4}k^{r/4}}{|h|^{r/4}}\right)\lg\left(1+\left|\frac{2\pi hx}{k}\right|\right),$$

da $(|2\pi hx/k|>1)$ für $h>0$, $n=-\left[1-\frac{r}{4}\right]$

$$\frac{x^{r/2-n-1}}{(2\pi h)^{n+1}}k^{n+1}=\frac{x^{r/4}k^{r/4}}{(2\pi h)^{r/4}}\left(\frac{2\pi hx}{k}\right)^{r/4-n-1}\ll\frac{x^{r/4}k^{r/4}}{h^{r/4}}$$

ist. Ähnlich ist für $h=0$.

$$F(x,0,\pi^2R_1)=\varphi(x).$$

Durch Einsetzen in die Beziehung (34) ergibt sich für $\langle x\rangle\geqslant x^{-r/2}$ oder $\langle x\rangle=0$ (siehe auch (26))

$$(60)\quad A'(x)=M\pi^{r/2}\varphi(x)S_{0,1}+$$
$$+M\pi^{r/2}\sum_{k\leqslant\sqrt{x}}\sum_{\substack{|h|\leqslant kT_1\\ h\neq 0}}\sum_{0\leqslant j<r/4-1}\frac{e^{2\pi i\frac{h}{k}x}(-1)^jk^{j+1}}{k^r(2\pi ih)^{j+1}}S_{h,k}\varphi(k,j,x)+$$
$$+O(x^{r/4}\lg x)+O\left(x^{r/4}\sum_{k\leqslant\sqrt{x}}\sum_{h=1}^{kT_1}\frac{\lg(1+2\pi hx/k)}{h^{r/4}k^{r/4}}\right)$$
$$=M\pi^{r/2}\varphi(x)S_{0,1}+M\pi^{r/2}\sum_{0\leqslant j<r/4-1}\frac{(-1)^j}{(2\pi i)^{j+1}}\sum_{k\leqslant\sqrt{x}}\frac{\varphi(k,j,x)}{k^{r-j-1}}\sum_{0<|h|\leqslant kT_1}\frac{S_{h,k}e^{2\pi i\frac{h}{k}x}}{h^{j+1}}+$$
$$+O(x^{r/4}\lg x).$$

Die letzte Summe kann man in der Form

$$(61)\quad\sum_{0<|h|\leqslant kT_1}\frac{S_{h,k}e^{2\pi i\frac{h}{k}x}}{h^{j+1}}=\frac{1}{k^{j+1}}\sum_h{}'S_{h,k}e^{2\pi i\frac{h}{k}x}\sum_{0<|m+h/k|\leqslant T_1}\frac{e^{2\pi imx}}{(m+h/k)^{j+1}}$$

schreiben. Nimmt man Rücksicht darauf, daß $T_1=[x^r]$ ist, bekommt man leicht für $\langle x\rangle\geqslant x^{-r/2}$ oder $\langle x\rangle=0$, $0\leqslant h<k$

$$\lim_{T\to+\infty}\sum_{T_1<|m+h/k|<T}\frac{e^{2\pi imx}}{(m+h/k)^{j+1}}\ll x^{-r/2}$$

(für $j=0$ benutzen wir eine zu (57) analoge Zerlegung). Der Ausdruck (61) unterscheidet sich also von

$$(62)\quad\frac{1}{k^{j+1}}\sum_h{}'S_{h,k}e^{2\pi i\frac{h}{k}x}f_j(x,h,k)$$

für die betrachteten x um (siehe (26))

$$O\left(x^{-r/2}k^{-j-1}\sum_h{}'k^{r/2}\right)=O\left(\frac{k^{r/2-j}}{x^{r/2}}\right).$$

Ersetzt man also in (60) den Ausdruck (61) durch (62), so wird ein Fehler (siehe (54))

$$O\left(x^{-r/2}\sum_{0\leqslant j<r/4-1}\sum_{k\leqslant\sqrt{x}}\frac{x^{r/2-j-1}k^{r/2-j}}{k^{r-j-1}}\right)=O\left(\frac{1}{x}\right)$$

gemacht. Nach (53) und (54) ist weiter

$$M\pi^{r/2}S_{0,1}\varphi(x)=V(x)\quad\text{für}\quad R_1=0,\qquad\varphi(x)=O(x^{r/4})\quad\text{für}\quad R_1\neq 0.$$

Man kann also schreiben (immer für $\langle x\rangle\geqslant x^{-r/2}$ oder $\langle x\rangle=0$)

$$(63)\quad P'(x)$$
$$=M\pi^{r/2}\sum_{0\leqslant j<r/4-1}\frac{(-1)^j}{(2\pi i)^{j+1}}\sum_{k\leqslant\sqrt{x}}\frac{\varphi(k,j,x)}{k^r}\sum_h{}'S_{h,k}e^{2\pi i\frac{h}{k}x}f_j(x,h,k)+O(x^{r/4}\lg x).$$

Nach (26), (56) und (58) ist für $0\leqslant j<r/4-1$

$$(64)\qquad\left|\sum_h{}'S_{h,k}e^{2\pi i\frac{h}{k}x}f_j(x,h,k)\right|\ll k^{r/2+j+1}\lg 2k.$$

Es ist also für $0\leqslant j<r/4-1$ (siehe (54))

$$\left|\sum_{k>\sqrt{x}}\frac{\varphi(k,j,x)}{k^r}\sum_h{}'S_{h,k}e^{2\pi i\frac{h}{k}x}f_j(x,h,k)\right|\ll x^{r/2-j-1}\sum_{k>\sqrt{x}}\frac{\lg 2k}{k^{r/2-j-1}}\ll x^{r/4}\lg x.$$

Die rechten Seiten in (63) und (59) unterscheiden sich voneinander um $O(x^{r/4}\lg x)$. Die Beziehung (59) ist also für $\langle x\rangle\geqslant x^{-r/2}$ oder $\langle x\rangle=0$ bewiesen.

b) Zum Beweis des Satzes genügt es die Gültigkeit der Beziehung (59) auf stetig wachsende x zu erweitern, d.h. folgendes zu beweisen: Es sei

$$(65)\qquad A'(x)=\Phi(x)+O(x^{r/4}\lg x)$$

für $\langle x\rangle\geqslant x^{-r/2}$ oder $\langle x\rangle=0$, wo $\Phi(x)$ die für $x>0$ nach (59) definierte Funktion ist. Dann gilt diese Beziehung auch für $0<\langle x\rangle\leqslant x^{-r/2}$.

Wir erwägen nun, daß die Funktion $A'(x)$ in jedem, ganze Zahlen nicht enthaltenden Intervall konstant ist. Es genügt also zu zeigen: wenn

$$(66)\qquad n-\tfrac{1}{2}<x<n\quad\text{bzw.}\quad n<x<n+\tfrac{1}{2}$$

und
$$\langle x\rangle \leqslant x^{-r/2}$$
ist, dann ist auch

(67) $$\Phi(x)-\lim_{y\to n-}\Phi(y)\ll \frac{1}{x} \quad \text{bzw.} \quad \Phi(x)-\lim_{y\to n+}\Phi(y)\ll\frac{1}{x}.$$

(Ist z.B. $n-\frac{1}{2}<x<n$, $0<\langle x\rangle\leqslant x^{-r/2}$, so wähle man x_1 so, daß $\langle x_1\rangle = x_1^{-r/2}$ und $n-\frac{1}{2}<x_1<n$ ist. Nun ist $A'(x)=A'(x_1)$ und aus (65) bzw. (67) folgt
$$A'(x_1)=\Phi(x_1)+O(x^{r/4}\lg x)$$
bzw.
$$\Phi(x_1)-\lim_{y\to n-}\Phi(y)\ll\frac{1}{x},\qquad \Phi(x)-\lim_{y\to n-}\Phi(y)\ll\frac{1}{x}.$$
Daraus folgt sofort
$$A'(x)=\Phi(x)+O(x^{r/4}\lg x).)$$

Wir setzen für $0<j<r/4-1$
$$\Phi_j(x)=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\varphi(k,j,x)}{k^r}\sum_h{}' S_{h,k}e^{2\pi i\frac{h}{k}x}f_j(x,h,k);$$
weiter sei
$$\Phi_1'(x)=\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\varphi(k,0,x)}{k^r}\sum_h{}' S_{h,k}e^{2\pi i\frac{h}{k}x}\frac{k}{h},$$
$$\Phi_2'(x)=-2\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\varphi(k,0,x)}{k^r}\sum_h{}' S_{h,k}e^{2\pi i\frac{h}{k}x}\frac{h}{k}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{\cos 2\pi mx}{m^2-h^2/k^2},$$
$$\Phi_3'(x)=2i\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\varphi(k,0,x)}{k^r}\sum_h{}' S_{h,k}e^{2\pi i\frac{h}{k}x}\frac{h^2}{k^2}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{\sin 2\pi mx}{m(m^2-h^2/k^2)},$$
$$\Phi_4'(x)=2i\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{\sin 2\pi mx}{m}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\varphi(k,0,x)}{k^r}\sum_h{}' S_{h,k}e^{2\pi i\frac{h}{k}x}$$
$$=\begin{cases}2\pi i(\frac{1}{2}+[x]-x)\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\varphi(k,0,x)}{k^r}\sum_h{}' S_{h,k}e^{2\pi i\frac{h}{k}x} & \text{für}\quad \langle x\rangle\neq 0,\\ 0 & \text{für}\quad \langle x\rangle = 0.\end{cases}$$

Nach dem ersten Teil des Beweises leuchtet es sofort ein, daß
$$\Phi(x)=V(x)+M\pi^{r/2}\Big(\sum_{0<j<r/4-1}\frac{(-1)^j}{(2\pi i)^{j+1}}\Phi_j(x)+\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{4}\Phi_j'(x)\Big)$$

ist. Zum Beweis des Satzes genügt es also unter der Voraussetzung (66) die Beziehungen (67) zu beweisen. Der Einfachheit halber geben wir nur einen Teil dieser Behauptung an, d.h. zur Illustration beweisen wir: ist $n-\frac{1}{2}<x<n$, $0<\langle x\rangle\leqslant x^{-r/2}$, $0<j<r/4-1$, dann ist
$$\Phi_j(x)-\lim_{y\to n-}\Phi_j(y)\ll\frac{1}{x^j},\qquad \Phi_4'(x)-\lim_{y\to n-}\Phi_4'(y)\ll\frac{1}{x}.$$
Die übrigen nötigen Beziehungen kann man analog beweisen.

Wir wollen daran erinnern, daß nach (45) und (54) für $0\leqslant j<r/4-1$

(68) $$\varphi(k,j,x)\ll x^{r/2-j-1},\qquad \frac{d}{dx}\varphi(k,j,x)\ll x^{r/2-j-2}$$

gleichmäßig für $R_k\in[0,+\infty)$ ist. Bei der Abschätzung der Differenzen von Funktionenwerten werden wir ohne weiteres den Mittelwertsatz benutzt. Es ist so z.B.
$$e^{2\pi i\frac{h}{k}n}-e^{2\pi i\frac{h}{k}x}=e^{2\pi i\frac{h}{k}x}(e^{2\pi i\frac{h}{k}(n-x)}-1)\ll\min\Big(1,\Big|\frac{h}{k}\langle x\rangle\Big|\Big).$$

Sei $0<j<r/4-1$. Da die Funktionen $f_j(x,h,k)$, $\varphi(k,j,x)$ und $\Phi_j(x)$ stetig sind (die zu ihnen gehörenden Reihen sind absolut und gleichmäßig konvergent) genügt es die Differenz
$$\Phi_j(n)-\Phi_j(x)$$
abzuschätzen. Für $0\leqslant h<k$ ist aber ($\langle x\rangle=n-x$)
$$\varphi(k,j,n)e^{2\pi i\frac{h}{k}n}-\varphi(k,j,x)e^{2\pi i\frac{h}{k}x}e^{2\pi imx}$$
$$=\varphi(k,j,x)e^{2\pi i\frac{h}{k}x}(1-e^{2\pi imx})+\varphi(k,j,x)(e^{2\pi i\frac{h}{k}n}-e^{-2\pi i\frac{h}{k}x})+$$
$$+e^{2\pi i\frac{h}{k}n}(\varphi(k,j,n)-\varphi(k,j,x))$$
$$\ll x^{r/2-j-1}\min(|m|\langle x\rangle,1)+x^{r/2-j-1}\frac{h}{k}\langle x\rangle+x^{r/2-j-2}\langle x\rangle$$
(für $m\neq 0$ überwiegt das erste Glied). Es ist also
$$\Phi_j(n)-\Phi_j(x)\ll\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{r/2}}\sum_h{}'\sum_{m\neq -h/k}\frac{|\varphi(k,j,x)e^{2\pi i\frac{h}{k}x}e^{2\pi imx}-\varphi(k,j,n)e^{2\pi i\frac{h}{k}n}|}{|m+h/k|^{j+1}}$$
$$\ll\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{x^{r/2-j-1}\min(m\langle x\rangle,1)}{m^{j+1}}+\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k^{r/2}}\sum_h{}'\Big(\frac{k^{j+1}}{h^{j+1}}x^{r/2-j-1}\frac{h}{k}\langle x\rangle+$$
$$+\frac{k^{j+1}}{h^{j+1}}\langle x\rangle x^{r/2-j-2}+\frac{k^{j+1}}{(k-h)^{j+1}}x^{r/2-j-1}\langle x\rangle+x^{r/2-j-1}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{\min(m\langle x\rangle,1)}{m^{j+1}}\Big)$$

(die ersten zwei Glieder nach dem $\sum'$-Zeichen entsprechen dem Wert $m=0$, das dritte $m=-1$ und das vierte den übrigen m), d.h.

$$\Phi_j(n)-\Phi_j(x) \ll x^{r/2-j-1}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{r/2-1}}\sum_{m=1}^{+\infty}\frac{\min(m\langle x\rangle,1)}{m^{j+1}}+$$
$$+x^{r/2-j-1}\langle x\rangle\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k^{r/2-j-1}}\sum_h{}'\left(\frac{1}{kh^j}+\frac{1}{xh^{j+1}}+\frac{1}{(k-h)^{j+1}}\right).$$

Da

$$\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k^{r/2-j-1}}\sum_h{}'\left(\frac{1}{kh^j}+\frac{1}{xh^{j+1}}+\frac{1}{(k-h)^{j+1}}\right)\ll\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{1}{k^{r/2-j-1}}\ll 1$$

und

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\min(m\langle x\rangle,1)}{m^{j+1}}\ll\langle x\rangle\lg\frac{1}{\langle x\rangle},$$

bekommen wir sofort

$$\Phi_j(n)-\Phi_j(x)\ll\frac{1}{x^j}.$$

Für die Abschätzung der Differenz

$$\lim_{y\to n-}\Phi_4'(y)-\Phi_4'(x)$$

bemerke man, daß

$$\tfrac12+[x]-x=\langle x\rangle-\tfrac12,\qquad \lim_{y\to n-}(\tfrac12+[y]-y)=-\tfrac12$$

und (für $0\leqslant h<k$)

$$-\tfrac12\varphi(k,0,n)e^{2\pi i\frac{h}{k}n}-(\langle x\rangle-\tfrac12)e^{2\pi i\frac{h}{k}x}\varphi(k,0,x)$$
$$=\tfrac12 e^{2\pi i\frac{h}{k}n}\big(\varphi(k,0,x)-\varphi(k,0,n)\big)+\tfrac12\varphi(k,0,x)\big(e^{2\pi i\frac{h}{k}x}-e^{2\pi i\frac{h}{k}n}\big)-$$
$$-\langle x\rangle e^{2\pi i\frac{h}{k}x}\varphi(k,0,x)$$
$$\ll x^{r/2-2}\langle x\rangle+x^{r/2-1}\frac{h}{k}\langle x\rangle+x^{r/2-1}\langle x\rangle\ll\frac{1}{x}.$$

ist.

Da der Ausdruck

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\varphi(k,0,x)}{k^r}\sum_h{}' S_{h,k}e^{2\pi i\frac{h}{k}x}$$

eine stetige Funktion der Variablen x ist (die Reihe ist absolut und gleichmäßig konvergent), kann man

$$\lim_{y\to n-}\Phi_4'(y)-\Phi_4'(x)=2\pi i\Bigg(-\frac12\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\varphi(k,0,n)}{k^r}\sum_h{}' S_{h,k}e^{2\pi i\frac{h}{k}n}-$$
$$-\left(\langle x\rangle-\frac12\right)\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\varphi(k,0,x)}{k^r}\sum_h{}' S_{h,k}e^{2\pi i\frac{h}{k}x}\Bigg)$$
$$\ll\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{r/2}}\sum_h{}'\left|-\frac12 e^{2\pi i\frac{h}{k}n}\varphi(k,0,n)-\left(\langle x\rangle-\frac12\right)e^{2\pi i\frac{h}{k}x}\varphi(k,0,x)\right|$$
$$\ll\frac1x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{r/2}}\sum_h{}' 1\ll\frac1x$$

schreiben. Damit ist der Satz bewiesen.

Satz 1a. *Es seien die Zahlen $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r$ rational und sei H der kleinste gemeinsame Nenner der Zahlen $\alpha_1M_1,\alpha_2M_2,\ldots,\alpha_rM_r$. Dann gilt*

$$P'(x)=\frac{\pi^{r/2}}{\sqrt{D}\prod_{j=1}^{r}M_j}\sum_{0\leqslant j<r/4-1}\frac{(-1)^j x^{r/2-j-1}}{(2\pi i)^{j+1}\Gamma(\frac12 r-j)}\times\tag{69}$$
$$\times\sum_{\substack{k=1\\ H|k}}^{\infty}\frac{1}{k^r}\sum_h{}' S_{h,k}e^{2\pi i\frac{h}{k}x}f_j(x,h,k)+O(x^{r/4}\lg x).$$

Beweis. Mit Rücksicht auf die Voraussetzung ist $R_k=0$ für $k\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,H)$, $R_k>c$ für $k\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,H)$. Setzt man nach (52) in (59) ein und nimmt in Betracht, daß nach (54) und (64) $(0\leqslant j<r/4-1)$

$$\left|\frac{(-1)^j}{(2\pi i)^{j+1}}\sum_{\substack{k=1\\ R_k>c}}^{+\infty}\frac{\varphi(k,j,x)}{k^r}\sum_h{}' S_{h,k}e^{2\pi i\frac{h}{k}x}f_j(x,h,k)\right|$$
$$\ll x^{r/4-(j+1)/2}\sum_{\substack{k=1\\ R_k>c}}^{+\infty}\min{}^{r/4-(j+1)/2}\left(\frac{x}{k^2},\frac{1}{R_k}\right)\lg 2k$$
$$\ll x^{r/4-(j+1)/2}\sum_{k\leqslant\sqrt{x}}\lg 2k+x^{r/2-j-1}\sum_{k>\sqrt{x}}\frac{\lg 2k}{k^{r/2-j-1}}\ll x^{r/4}\lg x$$

ist, bekommt man sofort (69).

§ 4. Folgerungen des verallgemeinerten Peterssonschen Satzes.

SATZ 2.

$$P(x) = O\left(x^{r/4-1/2} \sum_{k\leqslant\sqrt{x}} \min{}^{r/4-1/2}\left(\frac{x}{k^2}, \frac{1}{R_k}\right) \lg 2k\right) \text{ [5]}. \tag{70}$$

Beweis. Nachdem für nichtganze x, $P(x) = P'(x)$ ist, die Funktion $P(x)$ rechtsseitig stetig ist und

$$x^{r/4-1/2} \sum_{k\leqslant\sqrt{x}} \min{}^{r/4-1/2}\left(\frac{x}{k^2}, \frac{1}{R_k}\right) \lg 2k$$

rechtsseitig stetig und nichtfallend ist, genügt es

$$P'(x) \leqslant x^{r/4-1/2} \sum_{k\leqslant\sqrt{x}} \min{}^{r/4-1/2}\left(\frac{x}{k^2}, \frac{1}{R_k}\right) \lg 2k$$

zu beweisen. Nach (59), (64) und (54) bekommen wir aber

$$\begin{aligned}
P'(x) &\leqslant \sum_{0\leqslant j<r/4-1} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|\varphi(k,j,x)|}{k^r} \left| \sum_h{}' S_{h,k} e^{2\pi i \frac{h}{k}x} f_j(x,h,k)\right| + O(x^{r/4}\lg x) \\
&\leqslant \sum_{0\leqslant j<r/4-1} x^{r/4-(j+1)/2} \sum_{k=1}^{+\infty} \min{}^{r/4-(j+1)/2}\left(\frac{x}{k^2}, \frac{1}{R_k}\right)\lg 2k + O(x^{r/4}\lg x) \\
&\leqslant x^{r/4-1/2} \sum_{k\leqslant\sqrt{x}} \min{}^{r/4-1/2}\left(\frac{x}{k^2}, \frac{1}{R_k}\right)\lg 2k + \\
&\quad + \sum_{0\leqslant j<r/4-1} x^{r/2-j-1} \sum_{k>\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{\lg 2k}{k^{r/2-j-1}} + O(x^{r/4}\lg x).
\end{aligned}$$

Da aber $(0\leqslant j<r/4-1)$

$$x^{r/2-j-1} \sum_{k>\sqrt{x}}^{+\infty} \frac{\lg 2k}{k^{r/2-j-1}} \leqslant x^{r/4}\lg x$$

und $(R_k\leqslant 1)$

$$x^{r/4-1/2} \sum_{k\leqslant\sqrt{x}} \min{}^{r/4-1/2}\left(\frac{x}{k^2}, \frac{1}{R_k}\right)\lg 2k \geqslant x^{r/4-1/2} \sum_{k\leqslant\sqrt{x}} \lg 2k \geqslant x^{r/4}\lg x$$

[5] $\min\left(A, \frac{1}{0}\right) = A$ für $A>0$.

ist, ist der Satz bewiesen.

SATZ 3. *Immer ist*

$$P(x) = O(x^{r/2-1}). \tag{71}$$

Ist aber wenigstens eine der Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ irrational, so ist

$$P(x) = o(x^{r/2-1}). \tag{72}$$

Beweis. Da

$$x^{r/4-1/2} \sum_{k\leqslant\sqrt{x}} \min{}^{r/4-1/2}\left(\frac{x}{k^2}, \frac{1}{R_k}\right)\lg 2k \leqslant x^{r/2-1} \sum_{k\leqslant\sqrt{x}} \frac{\lg 2k}{k^{r/2-1}} \leqslant x^{r/2-1}$$

ist, gilt nach (70) die Abschätzung (71).

Sei wenigstens eine der Zahlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ irrational, d.h. $R_k\neq 0$ für alle k. Für $x>c$ bestimmen wir die natürliche Zahl $\psi(x)$ so, daß

$$\sum_{k\leqslant\psi(x)} \frac{\lg 2k}{R_k^{r/4-1/2}} \leqslant \frac{x^{r/4-1/2}}{\lg x} < \sum_{k\leqslant\psi(x)+1} \frac{\lg 2k}{R_k^{r/4-1/2}}$$

gilt. Die Funktion $\psi(x)$ ist für $x>c$ nichtfallend, $\psi(x)\to+\infty$ für $x\to+\infty$ und es ist

$$\begin{aligned}
x^{r/4-1/2} \sum_{k\leqslant\sqrt{x}} \min{}^{r/4-1/2}\left(\frac{x}{k^2}, \frac{1}{R_k}\right)\lg 2k &\leqslant x^{r/4-1/2} \sum_{k\leqslant\psi(x)} \frac{\lg 2k}{R_k^{r/4-1/2}} + x^{r/2-1} \sum_{k>\psi(x)} \frac{\lg 2k}{k^{r/2-1}} \\
&\leqslant \frac{x^{r/2-1}}{\lg x} + o(x^{r/2-1}) = o(x^{r/2-1}).
\end{aligned}$$

SATZ 4. *Sei $\psi(x)$ eine positive, fallende, für $x>0$ definierte Funktion, $\psi(x) = o(1)$. Dann gibt es ein r-tupel $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ so, daß für dazugehörende Funktion $P(x) = P(x; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ gilt* (72) *und*

$$P(x) = \Omega\big(x^{r/2-1}\psi(x)\big). \tag{73}$$

Beweis. Wir schreiben

$$A(x; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) = A(x; \alpha_j).$$

Sei $\mathfrak{M}$ der abgeschlossene Einheitswürfel im E_r (d.h. die Menge aller $(u_1, u_2, \ldots, u_r)$, für die $0\leqslant u_j\leqslant 1$, $j = 1, 2, \ldots, r$, ist). Sei $\mathfrak{M}_n$ die Menge aller $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r)\in\mathfrak{M}$, für die es ein $x = x(n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r) > n$ gibt so, daß

$$\frac{|A(x;\beta_j)|}{x^{r/2-1}\psi(x)} > n$$

ist. Wir beweisen zuerst, daß die Mengen $\mathfrak{M}_n$ offen und dicht in $\mathfrak{M}$ sind.

Sei $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r) \in \mathfrak{M}_n$, d.h. für passendes $x_1 > n$ ist

$$\frac{|A(x_1; \beta_j)|}{x_1^{r/2-1}\psi(x_1)} > n.$$

Da die Funktion $A(x; \beta_j)$ bei festem x eine stetige Funktion von $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r)$ ist, gilt diese Ungleichung in einer gewissen Umgebung des Punktes $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r)$, d.h. $\mathfrak{M}_n$ ist in $\mathfrak{M}$ offen.

Sei weiter $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r)$ ein Punkt mit rationalen Koordinaten und sei $H > 1$ der kleinste gemeinsame Nenner der Zahlen $\beta_1 M_1, \beta_2 M_2, \ldots, \beta_r M_r$. In der Arbeit [11] bewies Walfisz diese Behauptung: Es sollen die Zahlen h und k so existieren, daß $k \equiv 0 \pmod{H}$ und $S_{h,k} \neq 0$. Dann gilt

$$A(x; \beta_j) = P(x; \beta_j) = \Omega(x^{r/2-1}). \tag{74}$$

Mit Rücksicht auf die Beziehung (27) vom Lemma 2 kann man behaupten, daß (74) bestimmt in dem Fall gilt, wenn die Zahl $H > 1$ die Beziehung $(H, 2D\prod_{j=1}^{r} M_j^2) = 1$ erfüllt. Da die Menge solcher Punkte $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r)$ dicht im $\mathfrak{M}$ ist, genügt es zu beweisen, daß aus (74)

$$(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r) \in \mathfrak{M}_n$$

für jedes natürliche n gilt. Gilt aber (74), so ist

$$\limsup_{x\to+\infty} \frac{|A(x; \beta_j)|}{x^{r/2-1}} > c(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r).$$

Da $\psi(x) = o(1)$, gibt es für jedes natürliche n eine Zahl $x = x(n, \beta_1, \beta_2, \ldots \ldots, \beta_r) > n$ so, daß

$$\frac{c(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r)}{\psi(x)} > n$$

und

$$\frac{|A(x; \beta_j)|}{x^{r/2-1}} > c(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r)$$

ist.

Es ist also

$$\frac{|A(x; \beta_j)|}{x^{r/2-1}\psi(x)} > n,$$

d.h. der Punkt $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r)$, für den (74) gilt, liegt in allen Mengen $\mathfrak{M}_n$.

Sei $\mathfrak{N}$ die Menge aller Punkte $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_r) \in \mathfrak{M}$ mit rationalen Koordinaten. Die Mengen $\mathfrak{M} - \mathfrak{M}_n$ sind im $\mathfrak{M}$ für alle natürlichen n nirgends dicht, die Menge $\mathfrak{N}$ ist erster Kategorie im $\mathfrak{M}$. Es ist also auch die Menge

$$\mathfrak{N} \cup \bigcup_{n=1}^{+\infty} (\mathfrak{M} - \mathfrak{M}_n)$$

erster Kategorie im $\mathfrak{M}$ d.h. ($\mathfrak{M}$ ist ein vollständiger Raum) es gibt einen Punkt

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) \in \mathfrak{M} - \mathfrak{N} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (\mathfrak{M} - \mathfrak{M}_n) = (\mathfrak{M} - \mathfrak{N}) \cap \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{M}_n \ (^6).$$

Da $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) \notin \mathfrak{N}$ ist, gilt nach dem Satz 3 die Beziehung (72). Weiter ist $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) \in \mathfrak{M}_n$ für jedes n d.h. für jedes n gibt es ein $x = x(n; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$ so, daß

$$x > n \quad \text{und} \quad \frac{|A(x; \alpha_j)|}{x^{r/2-1}\psi(x)} > n$$

d.h.

$$P(x; \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) = A(x; \alpha_j) = \Omega\big(x^{r/2-1}\psi(x)\big).$$

Hiermit ist der Satz bewiesen.

Lemma 6. *Sei $0 < E < F$ und sei $W(E, F)$ die Menge aller $(u_1, u_2, \ldots \ldots, u_r) \in E_r$, $E \leqslant u_j \leqslant F$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$. Für $n \geqslant 0$, $m_j > 0$ $(j = 1, 2, \ldots \ldots, r)$ sei $\mathfrak{M}(n; m_1, m_2, \ldots, m_r)$ die Menge aller $(u_1, u_2, \ldots, u_r) \in W(E, F)$ so, daß*

$$|m_j u_j - m_1 u_1| \leqslant \frac{2F}{2^n} \quad (j = 1, 2, \ldots, r).$$

Seien weiter $k_1, k_2, \ldots, k_r$ nichtnegative ganze Zahlen. Wir sagen, daß die Menge $\mathfrak{M}(n; m_1, m_2, \ldots, m_r)$ zur Klasse $[n; k_1, k_2, \ldots, k_r]$ gehört, wenn

$$2^{k_j} \leqslant m_j < 2^{k_j+1} \quad (j = 1, 2, \ldots, r)$$

ist. Dann gilt: Es existiert eine Menge

$$\mathfrak{N}(E, F) \subset W(E, F)$$

vom r-dimensionalen Lebesgueschen Maß Null so, daß zu jedem

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) \in W(E, F) - \mathfrak{N}(E, F)$$

es ein n_0 gibt, so daß für $n \geqslant n_0$ und alle $k_1, k_2, \ldots, k_r$ der Punkt $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \ldots, \alpha_r)$ höchstens in

$$U(n; k_1, k_2, \ldots, k_r) = \frac{2^{k_1}}{2^{n(r-1)}} (n+1)^2 \prod_{j=1}^{r} (k_j+1)^2.$$

Mengen $\mathfrak{M}(n; m_1, m_2, \ldots, m_r)$ der Klasse $[n; k_1, k_2, \ldots, k_r]$ liegt.

(⁶) Die Idee, die Bairsche Kategorie zu Beweisen von Ω-Abschätzungen auszunutzen, stammt von Jarník [3].

Beweis. Für $u_1 \epsilon [E, F]$ sei $\mathfrak{N}(u_1)$ die Menge aller $(u_2, u_3, \ldots, u_r) \epsilon E_{r-1}$, für die

$$(u_1, u_2, \ldots, u_r) \epsilon \mathfrak{M}(n; m_1, m_2, \ldots, m_r)$$

ist. Die Zahl u_j muß also in einem Intervall der Länge höchstens

$$\frac{4F}{2^n m_j} \quad (j = 2, 3, \ldots, r)$$

liegen. Bezeichnen wir mit μ_p das p-dimensionale Lebesguesche Maß, so ist

$$u_r\big(\mathfrak{M}(n; m_1, m_2, \ldots, m_r)\big) \leqslant \int\limits_E^F \mu_{r-1}\big(\mathfrak{N}(u_1)\big) du_1 \leqslant \frac{(4F)^{r-1}(F-E)}{2^{n(r-1)} m_2 m_3 \ldots m_r}.$$

Die Anzahl der Mengen $\mathfrak{M}(n; m_1, m_2, \ldots, m_r)$ der Klasse $[n; k_1, k_2, \ldots, k_r]$ ist höchstens

$$2^{k_1+k_2+\ldots+k_r}.$$

Sei $\mathfrak{N}(n; k_1, k_2, \ldots, k_r)$ die Menge aller $(u_1, u_2, \ldots, u_r)$, die in mehr als $U(n; k_1, k_2, \ldots, k_r)$ Mengen $\mathfrak{M}(n; m_1, m_2, \ldots, m_r)$ der Klasse $[n; k_1, k_2, \ldots \ldots, k_r]$ liegen. Offenbar ist

$$\mu_r\big(\mathfrak{N}(n; k_1, k_2, \ldots, k_r)\big) \leqslant \frac{(4F)^{r-1}(F-E)\,2^{k_1+k_2+\ldots+k_r}}{U(n; k_1, k_2, \ldots, k_r)\,2^{n(r-1)}\,2^{k_2+\ldots+k_r}}$$
$$\leqslant \frac{(4F)^r}{(n+1)^2 \prod_{j=1}^{r}(k_j+1)^2}.$$

Sei endlich $\mathfrak{N}(E, F)$ die Menge aller $(u_1, u_2, \ldots, u_r) \epsilon W(E, F)$, die in unendlich vielen Mengen $\mathfrak{N}(n; k_1, k_2, \ldots, k_r)$ liegen. Da die Reihe

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k_1, k_2, \ldots, k_r = 0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2 \prod_{j=1}^{r}(k_j+1)^2}$$

konvergent ist, ist notwendig

$$\mu_r\big(\mathfrak{N}(E, F)\big) = 0.$$

Ist nun $(a_1, a_2, \ldots, a_r) \epsilon W(E, F) - \mathfrak{N}(E, F)$, so liegt $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ nur in endlich vielen Mengen $\mathfrak{N}(n; k_1, k_2, \ldots, k_r)$ und es gibt also ein n_0 so, daß für $n \geqslant n_0$ und alle $k_1, k_2, \ldots, k_r$ der Punkt $(a_1, a_2, \ldots, a_r)$ höchstens in $U(n; k_1, k_2, \ldots, k_r)$ Mengen $\mathfrak{M}(n; m_1, \ldots, m_r)$ der Klasse $[n; k_1, k_2, \ldots, k_r]$ liegt, w.z.b.w.

Satz 5. *Es gibt eine Menge $\mathfrak{N}$ vom r-dimensionalen Lebesgueschen Maß Null so, daß für $(a_1, a_2, \ldots, a_r) \notin \mathfrak{N}$ ist*

$$P(x; a_1, a_2, \ldots, a_r) = O(x^{r/4} \lg^{3r} x). \tag{75}$$

Beweis. Mit Rücksicht auf den Satz 2 und die Beziehung (33) genügt es folgendes zu beweisen: Sind $0 < A < B < 1$ gegebene Zahlen, gibt es im Würfel $W(A, B)$ (in der Bezeichnung vom Lemma 6) eine Menge $\overline{\mathfrak{N}}(A, B)$ vom r-dimensionalen Lebesgueschen Maß Null so, daß für $(a_1, a_2, \ldots, a_r) \epsilon W(A, B) - \overline{\mathfrak{N}}(A, B)$

$$\sum_{k \leqslant \sqrt{x}} \frac{1}{P_k^{r/2-1}} \leqslant \sqrt{x} \lg^{3r-1} x \tag{76}$$

ist.

Wir setzen im Lemma 6

$$E = \frac{1}{B} \min_{j=1,2,\ldots,r} \frac{1}{M_j}, \qquad F = \frac{1}{A} \max_{j=1,2,\ldots,r} \frac{1}{M_j}$$

und sei

$$\overline{\mathfrak{N}}(A, B) = \varphi\big(\mathfrak{N}(E, F)\big),$$

wo

$$\varphi(u_1, u_2, \ldots, u_r) = \left(\frac{1}{u_1 M_1}, \frac{1}{u_2 M_2}, \ldots, \frac{1}{u_r M_r}\right)$$

für $(u_1, u_2, \ldots, u_r) \epsilon E_r$, $u_j > 0$ $(j = 1, 2, \ldots, r)$. Offenbar ist $\mu_r\big(\overline{\mathfrak{N}}(A, B)\big) = 0$. Ist nun

$$(a_1, a_2, \ldots, a_r) \epsilon W(A, B) - \overline{\mathfrak{N}}(A, B),$$

so ist auch

$$\left(\frac{1}{a_1 M_1}, \frac{1}{a_2 M_2}, \ldots, \frac{1}{a_r M_r}\right) \epsilon W(E, F) - \mathfrak{N}(E, F)$$

und es existiert also ein n_0 so, daß die Ungleichungen

$$n \geqslant n_0, \qquad \left|\frac{m_j}{a_j M_j} - \frac{m_1}{a_1 M_1}\right| \leqslant \frac{2F}{2^n} \qquad (j = 1, 2, \ldots, r)$$

höchstens

$$\frac{2^{k_1}}{2^{n(r-1)}} (n+1)^2 \prod_{j=1}^{r} (k_j+1)^2.$$

Lösungen in natürlichen Zahlen $m_1, m_2, \ldots, m_r$ haben, für die die Ungleichungen

$$2^{k_j} \leqslant m_j < 2^{k_j+1} \qquad (j = 1, 2, \ldots, r)$$

($k_1, k_2, \ldots, k_r$ sind nichtnegative ganze Zahlen) gelten. Man wähle nun n_0 so groß, daß die Implikation

$$P_k < \frac{1}{2^{n_0}} \;\rightarrow\; a_j M_j k > 1 \qquad (j = 1, 2, \ldots, r)$$

gilt. Offensichtlich ist

$$\sum_{\substack{k\leqslant\sqrt{x}\\ 2^{n_0}P_k\geqslant 1}} \frac{1}{P_k^{r/2-1}} \ll \sqrt{x}.$$

Es genügt also zu beweisen, daß

$$\sum_{\substack{k\leqslant\sqrt{x}\\ P_k<2^{-n_0}}} \frac{1}{P_k^{r/2-1}} \ll \sqrt{x}\,\lg^{3r-1}x \tag{77}$$

gilt. Es sei $n\geqslant n_0$ und $2^{-1}\leqslant 2^n P_k<1$ für ein natürliches $k\leqslant\sqrt{x}$. Für passende natürliche Zahlen $m_1, m_2, \ldots, m_r$ ist dann

$$|a_j M_j k - m_j| < \frac{1}{2^n} \qquad (j=1,2,\ldots,r),$$

d.h.

$$\left|\frac{m_j}{a_j M_j} - \frac{m_1}{a_1 M_1}\right| \leqslant \frac{2F}{2^n} \qquad (j=1,2,\ldots,r).$$

Für

$$2^{k_j}\leqslant m_j < 2^{k_j+1} \qquad (j=1,2,\ldots,r)$$

kann aber dieses nach dem Vorgehenden höchstens in

$$\frac{2^{k_1}}{2^{n(r-1)}}(n+1)^2\prod_{j=1}^{r}(k_j+1)^2$$

Fällen auftreten und zugleich ist $(k\leqslant\sqrt{x})$ $m_j\ll\sqrt{x}$ d.h. $2^{k_j}\ll\sqrt{x}$ $(j=1,2,\ldots,r)$. Umgekehrt, wählen wir $n\geqslant n_0$, $m_1, m_2, \ldots, m_r$, so gibt es höchstens c Werte von k, die den Ungleichungen

$$|a_j M_j k - m_j| < \frac{1}{2^n} \qquad (j=1,2,\ldots,r)$$

genügen. Man kann also

$$\sum_{\substack{k\leqslant\sqrt{x}\\ P_k<2^{-n_0}}} \frac{1}{P_k^{r/2-1}} \ll \sum \frac{2^{(n+1)(r/2-1)}}{2^{n(r-1)}}\, 2^{k_1}(n+1)^2\prod_{j=1}^{r}(k_j+1)^2$$

schreiben, wobei über $n\geqslant n_0$ und $2^{k_j}\ll\sqrt{x}$ $(j=1,2,\ldots,r)$ summiert wird. Daher bekommen wir sofort (77) und so auch den Beweis des Satzes.

Bemerkung 6. Der Kern des Beweises vom Lemma 6 war im Grund die Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\psi(n)},$$

wo $\psi(n)=n^2$ ist. (Wählt man nun $\psi(n)=n^{1+\varepsilon}$ usw., kann man die Beziehung (75) in einer noch stärkeren Form beweisen.) Diese Idee ist in analogen Lemmas bei Jarník (z.B. [1], § 4) benützt.

Bemerkung 7. Für $r=4$ ist möglich eine zu (70) analoge Behauptung beweisen:

$$P(x) = O\Big(x^{r/4-1/2}\lg x\sum_{k\leqslant\sqrt{x}}\min^{r/4-1/2}\Big(\frac{x}{k^2},\frac{1}{R_k}\Big)\Big).$$

Es wird analog wie in dem Lemma 3 (und in dem Satz 2) vorgegangen, es wird aber nur die Funktion $F(x,0,\pi^2 R_1)$ benutzt. Anstatt der Beziehung (38), benutzt man die Abschätzung $(h>0)$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathfrak{B}_{h,k}}\frac{e^{xs}}{s}\Theta(s)\,dt \ll \Big(\frac{x}{k}\Big)^{r/2}\frac{k}{h}\int_0^{c/k\sqrt{x}}\frac{e^{-cR_k x/k^2(1+x^2u^2)}}{(1+x^2u^2)^{r/4}}\,du$$

$$\ll \frac{x^{r/4-1/2}}{h}\min^{r/4-1/2}\Big(\frac{x}{k^2},\frac{1}{R_k}\Big),$$

$$\Big(\Big(\frac{x}{k}\Big)^{r/2}\frac{k}{h}\int_0^{c/k\sqrt{x}}\frac{e^{-cR_k x/k^2(1+x^2u^2)}}{(1+x^2u^2)^{r/4}}\,du \ll \frac{x^{r/2-1}}{hk^{r/2-1}}\int_0^{+\infty}\frac{du}{(1+u^2)^{r/4}} \ll x^{r/4-1/2}\Big(\frac{x}{k^2}\Big)^{r/4-1/2}\frac{1}{h},$$

$$\Big(\frac{x}{k}\Big)^{r/2}\frac{k}{h}\int_0^{c/k\sqrt{x}}\frac{e^{-cR_k x/k^2(1+x^2u^2)}}{(1+x^2u^2)^{r/4}}\,du \ll \frac{x^{r/4}k}{hR_k^{r/4}}\Big(\int_0^{\sqrt{R_k/k^2x}}1\,du + \int_{\sqrt{R_k/k^2x}}^{+\infty}\Big(\frac{R_k x}{k^2}\Big)^{r/4}x^{-r/2}\frac{du}{u^{r/2}}\Big)$$

$$\ll x^{r/4-1/2}\frac{1}{hR_k^{r/4-1/2}} \qquad \text{für}\quad R_k\neq 0\Big).$$

Man kann also für $r=4$ auch die Beziehung (71) herleiten, aber nur mit $O(x\lg^2 x)$.

Bemerkung 8. Der Satz 2 und die Beziehung (33) deuten auf einen Zusammenhang zwischen der Zahl

$$f = \limsup_{x\to+\infty}\frac{\lg|P(x)|}{\lg x}$$

und dem arithmetischen Charakter des Systems $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$. Eine einfache obere Abschätzung von f in Abhängigkeit von

$$\gamma = \gamma(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r) = \sup\{\beta > 0;\ \liminf_{k\to+\infty} P_k k^\beta < +\infty\}$$

ist in [6] gegeben. Eine gründliche Untersuchung dieser Abhängigkeit (siehe die vorläufige Mitteilung [7]) wird in einem selbstständigen Artikel behandelt.

Bemerkung 9. Wir bemerken, daß offenbar

$$A(x; Q, \alpha_j, M_j, b_j) = A\left(t^3x; tQ, \frac{\alpha_j}{t}, tM_j, tb_j\right)$$

$(t > 0)$ ist, d.h. die Ergebnisse dieser Arbeit kann man auf den Fall übertragen, daß die Zahlen

$$a_{jl},\ b_j,\ M_j \quad (j, l = 1, 2, \ldots, r)$$

ganze Vielfache einer reellen Zahl sind.

Literaturverzeichnis

[1] V. Jarník, *Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden*, Math. Ann. 100 (1928), S. 699-721.

[2] — *Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden*, Zweite Abhandlung, Math. Ann. 101 (1929), S. 136-146.

[3] — *Eine Bemerkung zur Gitterpunktlehre*, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 69 (1940), S. 57-60.

[4] — *Über die Mittelwertsätze der Gitterpunktlehre*, 5. Abhandlung, Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 69 (1940), S. 148-174.

[5] E. Landau, *Ausgewählte Abhandlungen zur Gitterpunktlehre*, Berlin 1962.

[6] Б. Новак, *Целые точки в многомерных эллипсоидах*, ДАН СССР 153 (1963), S. 762-764.

[7] B. Novák, *On lattice points in high-dimensional ellipsoids*, Preliminary communication, Comment. Math. Univ. Carol. 7 (1966), S. 479-484.

[8] H. Petersson, *Über die Anzahl der Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden*, Abh. Math. Sem., Hamburg, 5 (1926), S. 116-150.

[9] A. Walfisz, *Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden*, Math. Zeitschrift 19 (1924), S. 300-307.

[10] — *Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden*, Dritte Abhandlung, Math. Zeitschrift 27 (1927), S. 245-268.

[11] — (А. З. Вальфиш), *Абсциссы сходимости некоторых рядов Дирихле*, Труды Тбилисского Мат. ин. XXII (1956), S. 33-75.

[12] — *Gitterpunkte in mehrdimensionalen Kugeln*, Warszawa 1957.

[13] V. Jarník und A. Walfisz, *Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden*, Math. Zeitschrift 32 (1930), S. 152-160.

Reçu par la Rédaction le 29. 3. 1967

ACTA ARITHMETICA
XIII (1968)

О некоторых возможностях обращения малой теоремы Ферма

М. М. Артюхов (Орджоникидзе)

В этой заметке рассматриваются вопросы такого же характера, как и в недавно опубликованной заметке [1], но результаты, полученные в той и другой, между собой независимы. Основное содержание настоящей заметки заключается в изучении одного нового аспекта обращения теоремы Ферма, в связи с чем появляются некоторые новые критерии простоты натуральных чисел.

Буква n здесь всюду будет обозначать заданное нечетное натуральное число, большее единицы, а буква A — всякое из чисел наименьшей положительной приведенной системы вычетов заданного модуля n.

В качестве основной мы примем следующую формулировку теоремы Ферма:

Если n — простое число, то каждое A удовлетворяет сравнению

$$x^{n-1} - 1 \equiv 0 \pmod{n}. \tag{F}$$

Хорошо известно, что существуют и составные числа n, обладающие этим же самым свойством. Такие числа, в отличие от простых, мы будем называть (следуя В. Серпинскому) *абсолютно псевдопростыми* (в литературе они известны также, как числа Кармайкла; наиболее полно современные сведения о них изложены в обзорной статье Е. Грассини [4]). Поскольку еще не выяснено, бесконечно или конечно множество всех абсолютно псевдопростых чисел (если допустить справедливость известной H-гипотезы А. Шинцеля [5], оно бесконечно), то теорема Ферма в указанной основной формулировке необратима даже для сколь угодно больших n. В заметке [1] установлено, что, несмотря на существование абсолютно псевдопростых чисел, своего рода „половина" теоремы Ферма обратима. Имеется в виду известное положение Эйлера о том, что,

если n — простое число, то каждый квадратичный невычет модуля n удовлетворяет сравнению

$$x^{(n-1)/2} + 1 \equiv 0 \pmod{n}. \tag{E$_1$}$$