ACTA ARITHMETICA
XIII (1968)

Induzierte Masse und Jacobischer Algorithmus

von

FRITZ SCHWEIGER (Wien)

Diese Arbeit verallgemeinert Sätze von S. D. Chatterji [2] auf Jacobische Algorithmen für den Fall $n = 2$. Soweit wir Begriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie verwenden, verweise ich auf [1]. Für den Jacobischen Algorithmus verweise ich auf [4], [5] oder [6]. Die Idee der hier skizzierten Methode findet sich für gewöhnliche Kettenbrüche in [7].

P bezeichne ein Wahrscheinlichkeitsmaß und L das gewöhnliche Lebesguemaß im $\boldsymbol{R}_2$. Zunächst sei $B^{(0)}$ das Einheitsquadrat. Mit

$$x = \begin{bmatrix} a_1^{(1)} & \dots & a_1^{(m)} & \dots \\ a_2^{(1)} & \dots & a_2^{(m)} & \dots \end{bmatrix}$$

bezeichnen wir die Entwicklung eines Punktes $x \in B^{(0)}$. $B^{(s)}$ bezeichne folgenden meßbaren Bereich des $\boldsymbol{R}_2$:

$$B^{(s)} = \{x \in B^{(0)} |\ a^{(i)}(x) = k^{(i)},\ 1 \leqslant i \leqslant s\}.$$

Das System der $B^{(s)}$ erzeugt dieselbe σ-Algebra wie die offenen Mengen.

Grundlegend ist die Abschätzung

$$C_1(\omega_{02}^{(s+1)})^{-3} < L(B^{(s)}) < C_2(\omega_{02}^{(s+1)})^{-3} \tag{1}$$

wo die Näherungsnenner den Rekursionsformeln

$$\omega_{02}^{(s+1)} = k_2^{(s)}\omega_{02}^{(s)} + k_1^{(s)}\omega_{02}^{(s-1)} + \omega_{02}^{(s-2)} \tag{2}$$

genügen. Mit dem Jacobischen Algorithmus verbunden ist die Abbildung $\delta\colon B^{(0)} \to B^{(0)}$, definiert durch

$$\delta(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \left(\dfrac{x_2}{x_1} - \left[\dfrac{x_2}{x_1}\right], \dots, \dfrac{1}{x_1} - \left[\dfrac{1}{x_1}\right]\right) & \text{für} \quad (x_i) \neq (0), \\ 0 & \text{für} \quad (x_i) = (0). \end{cases}$$

Es gibt ein gegenüber dieser Transformation invariantes und ergodisches Maß μ, welches den Ungleichungen

$$C_3 L(E) \leqslant \mu(E) \leqslant C_4 L(E) \tag{3}$$

genügt, d.h. zu L äquivalent ist.

Satz 1. *Sei ein Maß P gegeben durch*

$$P(B^{(s)}) = p(k^{(1)}, \dots, k^{(s)})$$

so ist P bezüglich L singulär genau wenn

$$\lim_{s\to\infty} \big(\omega_{02}^{(s+1)}(x)\big)^3 p\big(k^{(1)}(x), \dots, k^{(s)}(x)\big) = 0$$

fast überall im Lebesgueschen Sinn.

Beweis. Die zufälligen Variablen

$$Z^{(s)}(x) = P(B^{(s)})/L(B^{(s)})$$

bilden nämlich ein Martingal. Dann folgt die Behauptung aus (1) nach folgendem Satz (siehe [3]): $\lim\limits_{s\to\infty} Z^{(s)}(x)$ *existiert fast überall und ist gleich* 0 *genau dann, wenn P bezüglich L singulär ist.*

Satz 2. *Sei ein Maß P gegeben wie folgt:*

$$P(B^{(s)}) = p(0, k^{(1)})\, p(k^{(1)}, k^{(2)}) \dots p(k^{(s-1)}, k^{(s)})$$

und sei P invariant und ergodisch bezüglich, dann ist P bezüglich L singulär.

Beweis. Da μ mit L äquivalent ist und zwei verschiedene invariante ergodische Maße zueinander singulär sind, braucht man nur $\mu = P$ zu widerlegen. Wir nehmen daher an:

$$\mu(B^{(s)}) = p(0, k^{(1)}) \dots p(k^{(s-1)}, k^{(s)}). \tag{4}$$

Wir betrachten folgende spezielle Bereiche:

$$\begin{aligned}
&B_1^{(3N+1)}\colon\ k^{(i)} = \binom{0}{1}, && i = 1, \dots, 3N+1,\\
&B_2^{(3N+1)}\colon\ k^{(i)} = \binom{0}{2}, && i = 1, \dots, 3N+1,\\
&B_3^{(3N+1)}\colon\ k^{(1)} = \binom{0}{1},\ k^{(i)} = \binom{0}{1}, && i = 2, 3, 5, 6, \dots, 3N-1, 3N,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\quad k^{(i)} = \binom{0}{2}, && i = 4, 7, \dots, 3N+1,\\
&B_4^{(3N+1)}\colon\ k^{(1)} = \binom{0}{2},\ k^{(i)} = \binom{0}{2}, && i = 2, 3, 5, 6, \dots, 3N-1, 3N,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\quad k^{(i)} = \binom{0}{1}, && i = 4, 7, \dots, 3N+1.
\end{aligned}$$

Es ist dann

$$\begin{aligned}
&\mu(B_1) = p\left(0, \tfrac{0}{1}\right) p\begin{pmatrix}0&0\\1,&1\end{pmatrix}^{3N},\\
&\mu(B_2) = p\left(0, \tfrac{0}{2}\right) p\begin{pmatrix}0&0\\2,&2\end{pmatrix}^{3N},\\
&\mu(B_3) = p\left(0, \tfrac{0}{1}\right) p\begin{pmatrix}0&0\\1,&1\end{pmatrix}^{N} p\begin{pmatrix}0&0\\1,&2\end{pmatrix}^{N} p\begin{pmatrix}0&0\\2,&1\end{pmatrix}^{N},\\
&\mu(B_4) = p\left(0, \tfrac{0}{2}\right) p\begin{pmatrix}0&0\\2,&2\end{pmatrix}^{N} p\begin{pmatrix}0&0\\2,&1\end{pmatrix}^{N} p\begin{pmatrix}0&0\\1,&2\end{pmatrix}^{N},
\end{aligned} \tag{5}$$

wie man durch Einsetzen in (4) erkennt. Wir bezeichnen nun der Kürze halber die Näherungsnenner $\omega_{02}^{(i)}$, $i = 1, 2, \dots, 3N+1$ der $x \in B_j^{(3N+1)}$, $j = 1, 2, 3, 4$ einfach mit $q_j^{(i)}$. Die Abschätzungen (1) und (3) zusammen ergeben dann:

$$C_5 (q_j^{(3N+1)})^{-3} \leqslant \mu B(_j^{(3N+1)}) \leqslant C_6 (q_j^{(3N+1)})^{-3}. \tag{6}$$

Die Untersuchung der Größenordnung der $q_j^{(3N+1)}$ führt auf das Studium von linearen Differenzengleichungen, die sich aus (2) durch Einsetzen ergeben. Diese Differenzengleichungen führen auf vier algebraische Gleichungen

$$\begin{aligned}
x^3 - x^2 - 1 &= 0,\\
x^3 - 2x^2 - 1 &= 0,\\
x^9 - 5x^6 + 3x^3 - 1 &= 0,\\
x^9 - 7x^6 + 3x^3 - 1 &= 0
\end{aligned}$$

deren absolut größte Nullstellen wir mit ξ_1, ξ_2, ξ_3 und ξ_4 bezeichnen. Bei den ersten zwei Gleichungen sind diese die einzigen reellen, die anderen liegen im Einheitskreis. Bei den zweiten zwei Gleichungen nehmen wir ξ_3 und ξ_4 reell – die anderen Nullstellen mit gleichem größtem Absolutbetrag unterscheiden sich nur um dritte Einheitswurzeln. Übrigens liegen die weiteren Nullstellen auch hier im Einheitskreis. Es ist dann leicht einzusehen, daß

$$C_7 q_j^{(3N+1)} \leqslant \xi_j^{3N+1} \leqslant C_8 q_j^{(3N+1)} \tag{7}$$

gilt, d.h. $q_j^{(3N+1)}$ wächst wie ξ_j^{3N+1}. Die Abschätzung (6) geht dann über in:

$$C_9 \xi_j^{-3N-1} \leqslant \mu(B_j^{(3N+1)}) \leqslant C_{10} \xi_j^{-3N-1}. \tag{8}$$

Setzt man nun in (8) die Werte für $\mu(B_j)$ gemäß (5) ein und beachtet, daß die Konstanten C_9 und C_{10} von N nicht abhängen, so ist dies für $N \geqslant N_0$ nur richtig, wenn

$$\begin{aligned}
p\begin{pmatrix}0&0\\1,&1\end{pmatrix} &= \xi_1,\\
p\begin{pmatrix}0&0\\2,&2\end{pmatrix} &= \xi_2,\\
p\begin{pmatrix}0&0\\2,&2\end{pmatrix} p\begin{pmatrix}0&0\\1,&2\end{pmatrix} p\begin{pmatrix}0&0\\2,&1\end{pmatrix} &= \xi_3^3,\\
p\begin{pmatrix}0&0\\2,&2\end{pmatrix} p\begin{pmatrix}0&0\\2,&1\end{pmatrix} p\begin{pmatrix}0&0\\1,&2\end{pmatrix} &= \xi_4^3
\end{aligned}$$

erfüllt ist. Dies heißt aber

$$\xi_1 \xi_4^3 = \xi_2 \xi_3^3. \tag{9}$$

Nun ist aber

$$1{,}46557123 < \xi_1 < 1{,}46557124,$$
$$2{,}20556943 < \xi_2 < 2{,}20556944,$$
$$4{,}36523001 < \xi_3^3 < 4{,}36523002,$$
$$6{,}56631577 < \xi_4^3 < 6{,}56631578$$

und daher

$$\xi_1\xi_4^3 = 9{,}62340346 + A,$$
$$\xi_2\xi_3^3 = 9{,}62781786 + B,$$

mit $|A| \leqslant 8{,}1\cdot 10^{-8}$ und $|B| \leqslant 6{,}6\cdot 10^{-8}$, d.h. (9) ist nicht erfüllt.

Bemerkung 1. Ist nun ein solches Maß singulär, so ist es entweder rein atomar oder rein nicht-atomar. P ist atomar genau dann, wenn

$$\sup p(k^{(1)}, \ldots, k^{(s)}) \geqslant C > 0$$

für alle s gilt. Gibt es nämlich einen Punkt $y \in B^{(0)}$ mit $p\big(k^{(1)}(y), \ldots, k^{(s)}(y)\big) \geqslant C > 0$ für alle s, so ist die abzählbare Menge

$$A = \bigcup_N \{x \in B^{(0)} |\ \delta^j x = \delta^j y,\ j \geqslant N\}$$

gegen δ invariant und daher $P(A) = 1$. Die Umkehrung ist klar.

Bemerkung 2. Wäre die explizite Gestalt von μ bekannt, so wäre Satz 2 vermutlich durch Einsetzen zu beweisen.

Zuletzt danke ich noch Herrn Dr. K. Kreiter, der mich bei der genauen Berechnung der Nullstellen unterstützt hat.

Literaturverzeichnis

[1] P. Billingsley, *Ergodic theory and information*, New York 1965.

[2] S. D. Chatterji, *Maße, die von regelmäßigen Kettenbrüchen induziert sind*, Math. Ann. 164 (1966), S. 113-117.

[3] J. L. Doob, *Stochastic processes*, New York 1953.

[4] F. Schweiger, *Geometrische und elementare Sätze über den Jacobischen Algorithmus*, S. B. Öster. Akad. d. Wiss., Math.-naturw. Kl. II, 173 (1964), S. 59-92.

[5] — *Ergodische Theorie des Jacobischen Algorithmus*, Acta Arith. 11 (1966), S. 451-460.

[6] — *Mischungseigenschaften und Entropie beim Jacobischen Algorithmus*, J. f. d. Reine u. Angew. Math. (im Druck).

[7] — *Eine Bemerkung zu einer Arbeit von S. D. Chatterji* (im Druck).

Reçu par la Rédaction le 17. 3. 1967

ACTA ARITHMETICA
XIII (1968)

Verallgemeinerung eines Peterssonschen Satzes und Gitterpunkte mit Gewichten

von

B. Novák (Praha)

§ 1. Einleitung. Es sei r eine natürliche Zahl, $r \geqslant 2$ und sei

(1) $$Q(u) = Q(u_j) = \sum_{l,j=1}^{r} a_{lj} u_l u_j$$

eine positiv definite quadratische Form mit der Determinante D. Seien weiter

(2) $$M_1, M_2, \ldots, M_r, b_1, b_2, \ldots, b_r, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \quad (M_1 > 0, M_2 > 0, \ldots, M_r > 0)$$

reelle Zahlen. Wir betrachten $x > 0$ und erwägen die Funktion $A(x)$, die durch

(3) $$A(x) = \sum e^{2\pi i \sum_{j=1}^{r} \alpha_j u_j}$$

definiert ist, wobei über alle r-tupel $u_1, u_2, \ldots, u_r$ reeller Zahlen, für die

(4) $$Q(u_1, u_2, \ldots, u_r) \leqslant x$$

und

(5) $$u_j \equiv b_j \pmod{M_j} \quad (j = 1, 2, \ldots, r)$$

ist, summiert wird.

In dem Spezialfall

6) $$\alpha_j = b_j = 0, \quad M_j = 1 \quad (j = 1, 2, \ldots, r)$$

gibt (3) die Anzahl der Gitterpunkte (d.h. der Punkte mit ganzzahligen Koordinaten), die im Gebiet (4) liegen, an. Im allgemeinen Fall wird also eine „Ausdehnung" und „Verschiebung" des Gitters zugelassen und jeder Punkt wird mit einem gewissen „Gewicht" gerechnet. Unter der Voraus-