References

[1] A. S. Bang, *Taltheoretiske Undersogelser*, Tidsskrift for Math. 4 (1886), pp. 70-80, 130-137.

[2] G. D. Birkhoff and H. S. Vandiver, *On the integral divisors of a^n-b^n*, Ann. of Math. (2), 5 (1904), pp. 173-180.

[3] E. Bombieri, *On the large sieve*, Mathematika 12 (1965), pp. 201-225.

[4] P. Erdös, *On pseudoprimes and Carmichael numbers*, Publ. Math. Debrecen 4 (1955), pp. 201-206.

[5] H. Halberstam, W. B. Jurkat and H.-E. Richert, *Un nouveau résultat de la méthode du crible*, C. R. Acad. Sci. Paris, 264 (1967), pp. 920-923.

[6] W. Haneke, *Verschärfung der Abschätzung von $\zeta(\frac{1}{2}+it)$*, Acta Arith. 8 (1962/63), pp. 357-430.

[7] A. E. Ingham, *On the difference between consecutive primes*, Quart. J. Math. 8 (1937), pp. 255-266.

[8] W. B. Jurkat and H.-E. Richert, *An improvement of Selberg's sieve method I*, Acta Arith. 11 (1965), pp. 215-240.

[9] H. J. Kanold, *Sätze über Kreisteilungspolynome und ihre Anwendungen auf einige zahlentheoretische Probleme*, Journal für Math. 187 (1950), pp. 169-172.

[10] A. Rotkiewicz, *Les intervalles contenants les nombres pseudopremiers*, Rend. Circ. Mat. Palermo 14 (1965), pp. 278-280.

[11] — *Sur les nombres pseudopremiers de la forme $ax+b$*, C. R. Acad. Sci. Paris 257 (1963), 2601-2604.

[12] — *On the pseudoprimes of the form $ax+b$*, Proc. Cambridge Phil. Soc. 63 (1967), pp. 389-392.

[13] — *Elementarny dowód istnienia dzielnika pierwszego pierwotnego liczby a^n-b^n*, Prace Mat. 4 (1960), pp. 21-28.

[14] A. Schinzel, *On primitive prime factors of a^n-b^n*, Proc. Cambridge Phil. Soc. 58 (1962), pp. 555-562.

[15] K. Zsigmondy, *Zur Theorie der Potenzreste*, Monatsh. Math. 3 (1892), pp. 265-284.

UNIVERSITY OF NOTTINGHAM
INSTITUTE OF MATHEMATICS, POLISH ACADEMY OF SCIENCES
UNIVERSITY OF CAMBRIDGE

Reçu par la Rédaction le 8. 3. 1967

ACTA ARITHMETICA
XIII (1968)

Zur Anzahl Abelscher Gruppen gegebener Ordnung II

von

PETER GEORG SCHMIDT (Marburg)

Einleitung (1). $A(x)$ sei die Anzahl der wesentlich verschiedenen Abelschen Gruppen, deren Ordnung x nicht übersteigt, und $\Delta(x)$ das Restglied in der asymptotischen Entwicklung

$$A(x) = A_1 x + A_2 x^{1/2} + A_3 x^{1/3} + \Delta(x)$$

mit

$$A_\mu := \prod_{\substack{\nu=1 \\ \nu\neq\mu}}^{\infty} \zeta\left(\frac{\nu}{\mu}\right) \qquad (\mu = 1, 2, 3).$$

Ist ϑ die untere Grenze aller θ, für die

$$\Delta(x) \ll x^\theta \qquad (x\to\infty)$$

gilt, so zeigten (1) P. Erdös und G. Szekeres, D. G. Kendall und R. A. Rankin, H. E. Richert, W. Schwarz, der Verfasser

$$\vartheta \leqslant 1/2,\ 1/3,\ 3/10,\ 20/69 \approx 0.29, \qquad 5/18 = 0.2\dot{7}\ldots$$

In dieser Arbeit soll $\vartheta \leqslant 7/27 = 0.\overline{259}\ldots$ oder genauer

$$\Delta(x) \ll x^{7/27}\log^2 x \qquad (x\to\infty) \tag{1}$$

bewiesen werden.

Nach Hilfssatz 1 genügt es, letztere Ungleichung für das dort erklärte Restglied $\Delta_3(x)$ zu zeigen. Ausgangspunkt sei daher unsere in [3], § 1 gegebene Darstellung der Funktion $\Delta_3(x)$ durch gewisse Doppelsummen (Hilfssatz 2), zu deren Abschätzung die van der Corput-Methode (Hilfssätze 3-6) herangezogen wird. In unserem Falle beruht die van der Corput-Methode vornehmlich auf der wiederholten Transformation gewisser Exponentialdoppelsummen vermöge „Weylscher" und „van der Corputscher Schritte" (Hilfssätze 4 und 5), wobei sowohl die Schrittfolge

(1) Ausführlicheres, insbesondere weitere Literatur, findet sich in [3], Einleitung.

als auch die Summationsreihenfolge bei jedem einzelnen Schritt wesentlich ist. Ganz spezielle Schrittfolgen der eben beschriebenen Art führen schließlich zur Abschätzung (1) [2].

Ohne Beweis sei noch erwähnt, daß (1) durch geeignetere Schrittfolgen zu $\Delta(x) \ll x^{8/31}$ verschärft werden kann, womit die Grenze der skizzierten Methode in etwa erreicht ist.

Für reelle u sei $e(u) := e^{2\pi i u}$ und $B(u) := u - [u] - \frac{1}{2}$ das erste Bernoullische „Polynom". Die Summationsbedingung $a, b < n \leqslant c, d$ sei mit $\max(a, b) < n \leqslant \min(c, d)$ gleichbedeutend. Leere Summen mögen stets den Wert Null haben.

§ 1. Hilfsmittel.

Hilfssatz 1 [3]. *Ist $\Delta_3(x)$ das Restglied in der asymptotischen Entwicklung*

$$\sum_{n_1 n_2^2 n_3^3 \leqslant x} 1 = A_1^* x + A_2^* x^{1/2} + A_3^* x^{1/3} + \Delta_3(x)$$

mit

$$A_\mu^* := \prod_{\substack{\nu=1\\ \nu\neq\mu}}^{3} \zeta\left(\frac{\nu}{\mu}\right) \qquad (\mu = 1, 2, 3),$$

so folgt für $x \to \infty$ aus $\theta > \frac{1}{4}$ und $\Delta_3(x) \ll x^\theta \log^{\theta'} x$

$$\Delta(x) \ll x^\theta \log^{\theta'} x.$$

Hilfssatz 2 [4]. *Ist (α, β, γ) eine Permutation der Ziffern $(1, 2, 3)$ und*

$$S_{\alpha,\beta,\gamma}(x) := \sum_{\substack{m^\alpha + \beta n^\gamma \leqslant x\\ m > n}} \sum B\left(\sqrt[\alpha]{\frac{x}{m^\beta n^\gamma}}\right),$$

so gilt für $x \to \infty$

$$\Delta_3(x) = -\sum_{(\alpha,\beta,\gamma)} S_{\alpha,\beta,\gamma}(x) + O(x^{1/6}).$$

Hilfssatz 3 [5]. *Ist $K > 0$, u_q reell, und durchläuft q eine endliche Indexfolge, so gilt*

$$\sum_q B(u_q) \ll K^{-1} \sum_q 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \min\left(\frac{1}{k}, \frac{K}{k^2}\right) \Big| \sum_q e(k u_q) \Big|.$$

[2] Man vergleiche hierzu die Beweise der Sätze 1 und 2.
[3] [2], Lemmata 11 und 12, Satz 4; [3], Hilfssatz 1.
[4] [3], Satz 1.
[5] [2], Lemma 7.

Hilfssatz 4 [6] („Weylscher Schritt"). *Die reelle Funktion $f(m, n)$ sei definiert auf der Punktmenge*

$$G \subseteq R := \{(m, n) \mid M < m \leqslant M^*,\ N < n \leqslant N^*\}.$$

Ist dann $0 < r \leqslant M^* - M$, so gilt

$$\sum_{(m,n)\in G}\sum e\big(f(m, n)\big) \ll r^{-1/2}(M^* - M + 1)(N^* - N + 1) +$$

$$+ \Big\{r^{-1}(M^* - M + 1)(N^* - N + 1) \sum_{1 \leqslant q \leqslant r-1} \Big| \sum_{\substack{(m,n)\in G\\ (m+q,n)\in G}}\sum e\big(f(m+q, n) - f(m, n)\big)\Big|\Big\}^{1/2}.$$

Hilfssatz 5 [7] („van der Corputscher Schritt"). *Es sei $f(m)$ im Intervall $a < m \leqslant b$ reell und viermal stetig differenzierbar, $0 < F_2 \ll -f''(m) \ll F_2$, $f^{(j)}(m) \ll F_j$ für $j = 3, 4$ und $F_3^2 = F_2 F_4$. Ist dann $c := f'(b)$, $d := f'(a)$ und $m(\mu) \in (a, b]$ für $\mu \in (c, d]$ durch $f'\big(m(\mu)\big) = \mu$ definiert, so gilt*

$$\sum_{a < m \leqslant b} e\big(f(m)\big) = e\left(-\tfrac{1}{8}\right) \sum_{c < \mu \leqslant d} \big|f''\big(m(\mu)\big)\big|^{-1/2} e\Big(f\big(m(\mu)\big) - \mu m(\mu)\Big) +$$

$$+ O\big(F_2^{-1/2}\big) + O\big(\log\{2 + (b-a)F_2\}\big) + O\big((b-a)F_3^{1/3}\big).$$

Hilfssatz 6 [8]. *Ist $f(n)$ im Intervall $a < n \leqslant b$ reell, j-mal stetig differenzierbar $(j = 2, 3, \ldots)$, und gilt dort $0 < F_j \ll |f^{(j)}(n)| \ll F_j$, so folgt mit von j unabhängiger $\ll$-Konstanten*

$$\sum_{a < n \leqslant b} e\big(f(n)\big) \ll (b - a + 1) F_j^{1/(2^j - 2)} + (b - a + 1)^{1 - 2^{2-j}} F_j^{-1/(2^j - 2)}.$$

Hilfssatz 7 [9]. *Sind für $a < m \leqslant b$ die positiven u_m monoton mit m und $\ll U$ und die w_m beliebig komplex, so gilt*

$$\sum_{a < m \leqslant b} u_m w_m \ll U \max_{a < b' \leqslant b} \Big| \sum_{a < m \leqslant b'} w_m \Big|.$$

Hilfssatz 8. *Ist die Punktmenge G einer m-n-Ebene endlich, sind ferner die positiven u_m für alle in Betracht kommenden Werte von m monoton mit m und $\ll U$, und ist Analoges für die positiven $v_n \ll V$ erfüllt, so gilt für beliebig komplexe $w_{m,n}$ mit geeigneten reellen Zahlen b' und d'* [10]

$$\sum_{(m,n)\in G}\sum u_m v_n w_{m,n} \ll UV \Big| \sum_{\substack{(m,n)\in G\\ m \leqslant b',\, n \leqslant d'}}\sum w_{m,n} \Big|.$$

[6] [4], Lemma β'. Für $0 < r < 1$ ist der Hilfssatz trivial. Die Einschränkung auf ganzzahlige r darf entfallen.
[7] [1], Lemma 3.
[8] [5], 5.9, 5.11, 5.13.
[9] [5], 5.2, S. 82.
[10] Geeignete Paare (b', d') findet man in jedem G umfassenden Rechteck.

Beweis. $R := \{(m,n) \mid a < m \leqslant b,\ c < n \leqslant d\}$ sei ein G umfassendes Rechteck. $\bar{u}_m$ sei für $a < m \leqslant b$ eine „monotone Fortsetzung" von u_m mit $0 < \bar{u}_m \ll U$. $\bar{v}_n$ sei analog definiert. Ferner sei $\bar{w}_{m,n} := w_{m,n}$ oder 0, je nachdem ob (m,n) in G liegt oder nicht. Dann folgt aus Hilfssatz 7 mit geeigneten b' und d'

$$\sum_{(m,n)\in G}\sum u_m v_n w_{m,n} = \sum_{a<m\leqslant b} \bar{u}_m \Big(\sum_{c<n\leqslant d} \bar{v}_n \bar{w}_{m,n}\Big) \ll U \Big| \sum_{a<m\leqslant b'} \Big(\sum_{c<n\leqslant d} \bar{v}_n \bar{w}_{m,n}\Big)\Big|$$
$$= U \Big| \sum_{c<n\leqslant d} \bar{v}_n \Big(\sum_{a<m\leqslant b'} \bar{w}_{m,n}\Big)\Big| \ll UV \Big| \sum_{c<n\leqslant d'} \Big(\sum_{a<m\leqslant b'} \bar{w}_{m,n}\Big)\Big|$$
$$= UV \Big| \sum_{\substack{(m,n)\in G \\ m\leqslant b',\, n\leqslant d'}}\sum w_{m,n} \Big|.$$

§ 2. Wir schicken dem Beweise des Hauptsatzes zwei Sätze voraus. Satz 1 ist nur eine Ergänzung des tieferliegenden Satzes 2.

SATZ 1. *Sind x, M, N positiv, ist $(\beta, \gamma) := (2,3)$ oder $(3,2)$, $M^{1+\beta}N^{\gamma} \leqslant x^{8/9}$, so gilt für $x \to \infty$*

$$S := \sum_{\substack{M<m\leqslant 2M \\ N<n\leqslant 2N \\ m>n}}\sum B(xm^{-\beta}n^{-\gamma}) \ll x^{7/27}.$$

Beweis. Wir dürfen $x \geqslant 1$ und $2M > N \geqslant 1/2$ voraussetzen. Zunächst liefert Hilfssatz 3 für positives K

$$S \ll K^{-1}MN + \sum_{k=1}^{\infty} \min\left(\frac{1}{k}, \frac{K}{k^2}\right) |S_1| \tag{2}$$

mit

$$S_1 := \sum_{\substack{M<m\leqslant 2M \\ N<n\leqslant 2N \\ m>n}}\sum e(kxm^{-\beta}n^{-\gamma})\ (^{11}).$$

Auf S_1 wenden wir Hilfssatz 4 an und erhalten unter der Voraussetzung

$$0 < r \leqslant M \tag{3}$$

$$S_1 \ll r^{-1/2}MN + \Big\{r^{-1}MN \sum_{1\leqslant q\leqslant r-1} |S_2|\Big\}^{1/2} \tag{4}$$

mit

$$S_2 := \sum_{N<n\leqslant 2N}\ \sum_{M,n<m\leqslant 2M-q} e\big(g(m,n)\big), \tag{5}$$

$$g(m,n) := -\beta\cdot qkx \int_0^1 (m+qt)^{-1-\beta}\,dt\, n^{-\gamma}.$$

---

[11] Freie Parameter (hier $M, N, k, x, \beta, \gamma$) mögen ihrer letzten Vereinbarung oder Verwendung entsprechend eingeschränkt sein (k also auf $k = 1, 2, 3, \ldots$).

Definiert man F durch $F := xM^{-1-\beta}N^{-\gamma}$, so folgt für $j = 1, 2, 3, 4$ die Abschätzung

$$qkFM^{-j} \ll (-1)^{j-1} g_{m^j}(m,n) \ll qkFM^{-j}. \tag{6}$$

Wir wenden nun Hilfssatz 5 auf alle nicht-leeren inneren Summen (5) an. Die Voraussetzungen dazu sind wegen (6) mit $F_j := qkFM^{-j}$ $(j = 2, 3, 4)$ erfüllt. Setzt man

$$\mu_1(n) := g_m(2M-q, n), \quad \mu_2(n) := g_m(M, n), \quad \mu_3(n) := g_m(n, n), \tag{7}$$

so gilt also, wenn die Funktion $m(\mu, n) \in (M, 2M]$ im Intervall $\mu_1(n) < \mu \leqslant \min\{\mu_2(n), \mu_3(n)\}$ durch

$$g_m\big(m(\mu,n), n\big) = \mu \tag{8}$$

erklärt wird,

$$S_2 = \sum_{N<n\leqslant 2N} \Big\{e(-\tfrac{1}{8}) \sum_{\mu_1<\mu\leqslant\mu_2,\mu_3} \big|g_{m^2}\big(m(\mu,n), \mu\big)\big|^{-1/2} e\big(\varphi(\mu,n)\big) + O(\{qkF\}^{-1/2}M) + O(\{qkF\}^{1/3})\Big\} \tag{9}$$

mit

$$\varphi(\mu,n) := g\big(m(\mu,n), n\big) - \mu m(\mu,n).$$

Die Funktionen $\mu_1(n), \mu_2(n), \mu_3(n)$ sind streng monoton fallend mit n. Daher liefert die Vertauschung der Summationsreihenfolge in (9)

$$S_2 \ll \sum_{{}_1(2N)<\mu\leqslant\mu_2(N)} |S_3| + (qkF)^{-1/2}MN + (qkF)^{1/3}N, \tag{10}$$

wenn

$$S_3 := \sum_{n\in I_\mu} \big|g_{m^2}\big(m(\mu,n), n\big)\big|^{-1/2} e\big(\varphi(\mu,n)\big) \tag{11}$$

gesetzt wird, und die I_μ gewisse, ganz im Intervall $(N, 2N]$ gelegene (evt. leere) Intervalle bezeichnen.

Wir beabsichtigen, S_3 durch partielle Summation (Hilfssatz 7) zu vereinfachen und anschließend durch Hilfssatz 6 abzuschätzen. Dazu schränken wir r auf

$$0 < r \leqslant \varepsilon M \quad (0 < \varepsilon \leqslant \tfrac{1}{6}) \tag{12}$$

ein und zeigen, daß bei hinreichend kleinem konstanten ε sowohl

$$\frac{\partial}{\partial n} g_{m^2}\big(m(\mu,n), n\big) < 0 \tag{13}$$

als auch

$$qkFN^{-2} \ll -\varphi_{n^2}(\mu,n) \ll qkFN^{-2} \tag{14}$$

gilt. Für positive α ist nämlich

$$1-\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{q}{m} < \int\limits_0^1\left(1+\frac{q}{m}t\right)^{-\alpha}dt < 1 \tag{15}$$

und im Falle $\alpha q/m \leqslant 1$

$$1 < \left\{\int\limits_0^1\left(1+\frac{q}{m}t\right)^{-\alpha}dt\right\}^{-1} < 1+\alpha\frac{q}{m}.$$

Aus diesen Ungleichungen ergibt sich, wenn man die Identität (8) nach n differenziert,

$$m_n(\mu,n) = -\frac{g_{mn}}{g_{m^2}} = -\frac{\gamma}{2+\beta}\,m(\mu,n)\,n^{-1}\left\{1+O\left(\frac{q}{m}\right)\right\},$$

da ja $(3+\beta)q/m < 6r/M \leqslant 1$ ist. Daher folgt mit (12) und (15)

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial n}g_{m^2}\big(m(\mu,n),n\big) &= g_{m^3}m_n+g_{m^2n}\\ &= -\beta(1+\beta)\gamma qkx\,m(\mu,n)^{-3-\beta}n^{-1-\gamma}\{1+O(\varepsilon)\}\end{aligned} \tag{16}$$

und weiter unter Berücksichtigung der Identität (8)

$$\begin{aligned}\varphi_n &= g_n+(g_m-\mu)m_n = g_n,\\ \varphi_{nn} &= g_{nm}m_n+g_{nn}\\ &= -\beta\gamma\left(1+\frac{\gamma}{2+\beta}\right)qkx\,m(\mu,n)^{-1-\beta}n^{-2-\gamma}\{1+O(\varepsilon)\}.\end{aligned} \tag{17}$$

Bei hinreichend kleinem konstanten ε sind aber (13) und (14) unmittelbare Konsequenzen von (16) und (17).

Der Faktor $\left|g_{m^2}\big(m(\mu,n),n\big)\right|^{-1/2}$ in (11) ist also monoton mit n und nach (6) von der Ordnung $(qkF)^{-1/2}M$. Daher liefert Hilfssatz 7

$$S_3 \ll (qkF)^{-1/2}M\left|\sum_{n\in I'_\mu}e\big(\varphi(\mu,n)\big)\right|,$$

worin die I'_μ geeignete Teilintervalle der I_μ bedeuten. Wegen (14) und $I'_\mu \subseteq (N, 2N]$ folgt nun aus Hilfssatz 6, wenn wir dort $(a,b] := I'_\mu$, $j := 2$ und $F_2 := qkFN^{-2}$ setzen,

$$\sum_{n\in I'_\mu}e\big(\varphi(\mu,n)\big) \ll (qkF)^{1/2}+(qkF)^{-1/2}N,$$

also

$$S_3 \ll M+(qkF)^{-1}MN.$$

Nach (6) und (7) ist $\mu_2(N) \ll qkFM^{-1}$. Somit ergibt (10) wegen $F \geqslant 1$ und $N \ll M$

$$S_2 \ll qkF+(qkF)^{-1/2}MN+(qkF)^{1/3}(MN)^{1/2}.$$

Dies in (4) eingesetzt liefert

$$S_1 \ll r^{-1/2}MN+(rkFMN)^{1/2}+(rkF)^{-1/4}MN+(rkF)^{1/6}(MN)^{3/4}.$$

Wählen wir $r := \varepsilon(kF)^{-1/2}(MN)^{1/2}$, so ist (12) und folglich auch (3) erfüllt, und wir erhalten

$$S_1 \ll (kF)^{1/4}(MN)^{3/4}+(kF)^{-1/8}(MN)^{7/8}+(kF)^{1/12}(MN)^{5/6}.$$

Setzt man dies in (2) ein, so hat man schließlich

$$S \ll K^{-1}MN+(KF)^{1/4}(MN)^{3/4}+F^{-1/8}(MN)^{7/8}+(KF)^{1/12}(MN)^{5/6}$$

oder mit $K := (F^{-1}MN)^{1/5}$

$$\begin{aligned}S &\ll F^{1/5}(MN)^{4/5}+F^{1/15}(MN)^{17/20}\\ &= \{F(MN)^3\}^{1/5}(MN)^{1/5}+\{F(MN)^3\}^{1/15}(MN)^{13/20},\end{aligned}$$

woraus wegen $MN \ll (M^{1+\beta}N^{\gamma})^{1/3} \leqslant x^{8/27}$ und $F(MN)^3 \ll x$ sofort die Behauptung des Satzes 1 folgt.

Satz 2. *Sind y, M, N, ϱ, σ positiv und ist $F := yM^{-1-\varrho}N^{-\sigma}$, so gilt mit nur von ϱ und σ abhängiger $\ll$-Konstanten*

$$S := \sum_{\substack{M<m\leqslant 2M\\ N<n\leqslant 2N\\ m^{1+\varrho}n^{\sigma}\leqslant y\\ m>n}}\sum B(ym^{-\varrho}n^{-\sigma}) \ll F^{7/27}(MN)^{7/9}+F^{11/27}(MN)^{13/18}.$$

Bemerkung. Der erste Summand rechts spielt die Rolle des Hauptgliedes. Satz 2 ist auf den Fall $\varrho = 2$, $\sigma = 3$ zugeschnitten; denn für diese ϱ, σ nimmt das Hauptglied den von M und N unabhängigen Wert $y^{7/27}$ an.

Beweis. Die Summe S sei nicht leer, insbesondere also $2M > N \geqslant 1/2$, $y > 2$, $F > 1$. $c_1, c_2, c_3, \ldots$ seien geeignete positive, nur von ϱ und σ abhängige Zahlen. Die auftretenden O- und $\ll$-Konstanten hängen nur von ϱ und σ ab.

Wir gehen wieder von (2) aus. S_1 hat jetzt die Bedeutung

$$S_1 := \sum_{N<n\leqslant 2N}\;\sum_{M,n<m\leqslant 2M,(yn^{-\sigma})^{1/(1+\varrho)}}e\big(h(m,n)\big)$$

mit

$$h(m,n) := -kym^{-\varrho}n^{-\sigma}\,(^{12}).$$

Auf alle nicht-leeren inneren Summen wenden wir Hilfssatz 5 an. Die Voraussetzungen dazu sind wegen

$$kFM^{1-j} \ll (-1)^{j+1}h_{m^j}(m,n) \ll kFM^{1-j} \quad (j = 0,1,2,3,4) \tag{18}$$

[12] Vgl. Fußnote [11].

mit $F_j := kFM^{1-j}$ $(j = 2, 3, 4)$ erfüllt. Setzt man also

$$\mu_1(n) := h_m(2M, n) = \varrho ky(2M)^{-1-\varrho}n^{-\sigma},$$
$$\mu_2 := h_m(\{yn^{-\sigma}\}^{1/(1+\varrho)}, n) = \varrho k,$$
$$\mu_3(n) := h_m(M, n) = \varrho kyM^{-1-\varrho}n^{-\sigma},$$
$$\mu_4(n) := h_m(n, n) = \varrho kyn^{-1-\varrho-\sigma},$$

so gilt, wenn die Funktion $m(\mu, n)\in(M, 2M]$ im Intervall

$$\max\{\mu_1(n), \mu_2\} < \mu \leqslant \min\{\mu_3(n), \mu_4(n)\}$$

durch

$$h_m\big(m(\mu, n), n\big) = \varrho kym(\mu, n)^{-1-\varrho}n^{-\sigma} = \mu \tag{19}$$

oder

$$m(\mu, n) := (\varrho ky\,\mu^{-1}n^{-\sigma})^{1/(1+\varrho)}$$

definiert wird,

$$S_1 = \sum_{N<n\leqslant 2N}\Big\{e(-\tfrac{1}{8})\sum_{\mu_1,\mu_2<\mu\leqslant\mu_3,\mu_4}\big|h_{m^2}\big(m(\mu, n), n\big)\big|^{-1/2}e\big(\psi(\mu, n)\big)+$$
$$+O(\{kF\}^{-1/2}M^{1/2})+O(\{kFM\}^{1/3})\Big\}$$

mit

$$\psi(\mu, n) := h\big(m(\mu, n), n\big)-\mu m(\mu, n) = -c_1(ky\mu^{\varrho}n^{-\sigma})^{1/(1+\varrho)}.$$

Nun sind wegen

$$\big|h_{m^2}\big(m(\mu, n), n\big)\big|^{-1/2} = \{(1+\varrho)h_m m^{-1}\}^{-1/2} = \{(1+\varrho)\mu m^{-1}\}^{-1/2}$$
$$= c_2(ky\,\mu^{-2-\varrho}n^{-\varrho})^{1/(2+2\varrho)}$$

die Voraussetzungen des Hilfssatzes 8 zur Anwendung auf S_1 erfüllt. Daher liefert die aus (18) folgende Abschätzung

$$\big|h_{m^2}\big(m(\mu, n), n\big)\big|^{-1/2} \ll (kF)^{-1/2}M^{1/2}$$

$$S_1 \ll (kF)^{-1/2}M^{1/2}|S_2|+(kF)^{-1/2}M^{1/2}N+(kFM)^{1/3}N \tag{20}$$

mit

$$S_2 := \sum_{N<n\leqslant N'}\;\sum_{\mu_1,\mu_2<\mu\leqslant\mu_3,\mu_4,\mu'} e\big(\psi(\mu, n)\big),$$

worin N' $(N'\leqslant 2N)$ und μ' $(\mu'\leqslant\mu_3(N) = \varrho kF)$ geeignete Zahlen bezeichnen.

Der Summationsbereich von S_2 liegt ganz im Rechteck

$$N < n \leqslant 2N, \qquad 0 < \mu \leqslant \varrho kF.$$

Wir wenden nun Hilfssatz 4 auf S_2 an und erhalten unter der Voraussetzung

$$0 < r \leqslant \varrho kF \tag{21}$$

$$S_2 \ll r^{-1/2}NkF+\Big\{r^{-1}NkF\sum_{1\leqslant q\leqslant r-1}|S_3|\Big\}^{1/2} \tag{22}$$

mit

$$S_3 := \sum_{N<n\leqslant N'}\;\sum_{\mu_1,\mu_2<\mu\leqslant\mu_3-q,\mu_4-q,\mu'-q} e\big(-g(\mu)n^{-\sigma/(1+\varrho)}\big),$$

$$g(\mu) := c_3q(ky)^{1/(1+\varrho)}\int_0^1(\mu+qt)^{-1/(1+\varrho)}dt.$$

$n_1(\mu), n_3(\mu), n_4(\mu)$ seien die Umkehrfunktionen von $\mu_1(n), \mu_3(n), \mu_4(n)$, also

$$n_1(\mu) = (\varrho ky)^{1/\sigma}(2M)^{-(1+\varrho)/\sigma}\mu^{-1/\sigma},$$
$$n_3(\mu) = (\varrho ky)^{1/\sigma}M^{-(1+\varrho)/\sigma}\mu^{-1/\sigma},$$
$$n_4(\mu) = (\varrho ky)^{1/(1+\varrho+\sigma)}\mu^{-1/(1+\varrho+\sigma)}.$$

Daher liefert die Vertauschung der Summationsreihenfolge in S_3

$$S_3 = \sum_{\mu_1(N'),\mu_2<\mu\leqslant\mu'-q}\;\sum_{N,n_1(\mu)<n\leqslant N',n_3(\mu+q),n_4(\mu+q)} e\big(-g(\mu)n^{-\sigma/(1+\varrho)}\big).$$

Auf alle nicht-leeren inneren Summen wenden wir jetzt Hilfssatz 5 an. Die Voraussetzungen dazu sind mit $F_j := qMN^{-j}$ $(j = 2, 3, 4)$ erfüllt; denn aus (19) und (21) folgt

$$kF \ll \mu < \mu+q \ll kF \tag{23}$$

und daraus die einfache Abschätzung

$$qM \ll g(\mu)n^{-\sigma/(1+\varrho)} \ll qM. \tag{24}$$

Setzt man also

$$f(n) := -g(\mu)n^{-\sigma/(1+\varrho)},$$

$$\nu_0(\mu) := f'(N) = B_0\int_0^1(\mu+qt)^{-1/(1+\varrho)}dt,$$

$$\nu_1(\mu) := f'\big(n_1(\mu)\big) = B_1\int_0^1\Big(1+\frac{q}{\mu}t\Big)^{-1/(1+\varrho)}dt\,\mu^{1/\sigma},$$

$$\nu_2(\mu) := f'(N') = B_2\int_0^1(\mu+qt)^{-1/(1+\varrho)}dt,$$

$$\nu_3(\mu) := f'\big(n_3(\mu+q)\big) = B_3\int_0^1(\mu+qt)^{-1/(1+\varrho)}dt\,(\mu+q)^{1/(1+\varrho)+1/\sigma},$$

$$\nu_4(\mu) := f'\big(n_4(\mu+q)\big) = B_4\int_0^1\Big(1-\frac{q}{\mu+q}t\Big)^{-1/(1+\varrho)}dt,$$

worin die B_j $(j=0,1,2,3,4)$ von μ unabhängig sind, so gilt, wenn die Funktion $n(\mu,\nu)\in(N,2N]$ im Intervall

$$\max\{\nu_2(\mu),\nu_3(\mu),\nu_4(\mu)\}<\nu\leqslant\min\{\nu_0(\mu),\nu_1(\mu)\}$$

durch

$$f'\big(n(\mu,\nu)\big)=\frac{\sigma}{1+\varrho}g(\mu)n(\mu,\nu)^{-\frac{\sigma}{1+\varrho}-1}=\nu \tag{25}$$

oder

$$n(\mu,\nu):=\left\{\frac{\sigma}{1+\varrho}g(\mu)\nu^{-1}\right\}^{\frac{1+\varrho}{1+\varrho+\sigma}} \tag{26}$$

erklärt wird,

$$S_3=\sum_{\mu_1(N'),\mu_2<\mu\leqslant\mu'-q}\Big\{e(-\tfrac{1}{8})\sum_{\nu_2,\nu_3,\nu_4<\nu\leqslant\nu_0,\nu_1}\chi(\mu,\nu)e\big(\varphi(\mu,\nu)\big)+ \tag{27}$$
$$+O(\{qM\}^{-1/2}N)+O(\{qM\}^{1/3})\Big\}$$

mit

$$\chi(\mu,\nu):=c_4\{g(\mu)n(\mu,\nu)^{-\frac{\sigma}{1+\varrho}-2}\}^{-\frac{1}{2}},$$
$$\varphi(\mu,\nu):=-g(\mu)n(\mu,\nu)^{-\sigma/(1+\varrho)}-\nu n(\mu,\nu).$$

Die Funktionen $\nu_0(\mu)$, $\nu_1(\mu)$, $\nu_2(\mu)$ und $\nu_4(\mu)$ sind offensichtlich streng monoton mit μ, und zwar $\nu_1(\mu)$ wachsend, die übrigen fallend. $\nu_3(\mu)$ ist unter der Bedingung $\frac{\mu}{\sigma}-\frac{q}{1+\varrho}\geqslant 0$ oder

$$\frac{q}{\mu}\leqslant\frac{1+\varrho}{\sigma} \tag{28}$$

ebenfalls streng monoton; denn dann ist die Ableitung

$$\frac{\partial\nu_3}{\partial\mu}=B_3(\mu+q)^{\frac{1}{1+\varrho}+\frac{1}{\sigma}-1}\int_0^1(\mu+qt)^{-\frac{1}{1+\varrho}-1}\left\{\frac{\mu}{\sigma}-\frac{q}{1+\varrho}+\left(\frac{1}{1+\varrho}+\frac{1}{\sigma}\right)qt\right\}dt$$

sicher positiv. Demnach liefert die Vertauschung der Summationsreihenfolge in (27), wenn man $\mu'\leqslant\varrho kF$ beachtet,

$$S_3\ll\sum_{\nu_2(\mu')<\nu\leqslant\nu_1(\mu')}\Big|\sum_{\mu\in J_\nu}\chi(\mu,\nu)e\big(\varphi(\mu,\nu)\big)\Big|+kF(qM)^{-1/2}N+kF(qM)^{1/3}, \tag{29}$$

wo die J_ν gewisse, ganz in $(0,\mu']$ gelegene (evt. leere) Intervalle bezeichnen.

Nach (26) läßt sich χ mit von μ unabhängigem B in die Form

$$\chi(\mu,\nu)=Bg(\mu)^{\frac{1+\varrho}{2(1+\varrho+\sigma)}}$$

setzen und nach (24) abschätzen durch

$$\chi(\mu,\nu)\ll(qM)^{-1/2}N.$$

$\chi(\mu,\nu)$ ist also monoton fallend mit μ, so daß aus Hilfssatz 7

$$\sum_{\mu\in J_\nu}\chi(\mu,\nu)e\big(\varphi(\mu,\nu)\big)\ll(qM)^{-1/2}N\Big|\sum_{\mu\in J'_\nu}e\big(\varphi(\mu,\nu)\big)\Big| \tag{30}$$

folgt, wo die J'_ν geeignete Teilintervalle der J_ν bezeichnen.

Auf die letzte Summe wollen wir Hilfssatz 6 mit $j:=3$ anwenden. Dazu benötigen wir eine Abschätzung von $\varphi_{\mu^3}(\mu,\nu)$. Zunächst hat man auf Grund der Identität (25)

$$\varphi_\mu=-g'n^{-\sigma/(1+\varrho)}+\left(\frac{\sigma}{1+\varrho}gn^{-\sigma/(1+\varrho)-1}-\nu\right)n_\mu=-g'n^{-\sigma/(1+\varrho)}$$

oder wegen (26)

$$\varphi_\mu(\mu,\nu)=-c_5g'(\mu)\big(g(\mu)\nu^{-1}\big)^{-\alpha}\qquad\left(\alpha:=\frac{\sigma}{1+\varrho+\sigma}\right).$$

Differenziert man zweimal nach μ, so ergibt sich

$$\varphi_{\mu^3}=-c_5\{g'''-3\alpha g''g'g^{-1}+\alpha(1+\alpha)(g')^3g^{-2}\}(g\nu^{-1})^{-\alpha}. \tag{31}$$

Nun gilt für $0\leqslant t\leqslant 1$ und $j=1,2,3$

$$\mu^{-j}\left(1-j\frac{q}{\mu}\right)\leqslant(\mu+qt)^{-j}\leqslant\mu^{-j},$$

woraus mit absoluter O-Konstanten

$$g^{(j)}(\mu)=(-1)^j\frac{1}{1+\varrho}\left(1+\frac{1}{1+\varrho}\right)\dots\left(j-1+\frac{1}{1+\varrho}\right)g(\mu)\mu^{-j}\left\{1+O\left(\frac{q}{\mu}\right)\right\}$$

folgt. Benutzt man dies in (31), so erhält man

$$\varphi_{\mu^3}(\mu,\nu)=c_6g(\mu)^{1-\alpha}\mu^{-3}\nu^\alpha\{1+O(q/\mu)\}$$

oder mit Rücksicht auf $1\leqslant q<r$, (23) und (26)

$$\varphi_{\mu^3}(\mu,\nu)=c_7g(\mu)n(\mu,\nu)^{\sigma/(1+\varrho)}\mu^{-3}\{1+O\big(r(kF)^{-1}\big)\}. \tag{32}$$

Schränken wir noch r auf

$$0<r\leqslant\varepsilon kF \tag{33}$$

ein, indem wir $\varepsilon>0$ in alleiniger Abhängigkeit von ϱ und σ so wählen, daß (21) und (28) erfüllt sind und das O-Glied in (32) dem Betrage nach kleiner als $1/2$ ausfällt, so folgt schließlich aus (23), (24) und (32)

$$qM(kF)^{-3}\ll\varphi_{\mu^3}(\mu,\nu)\ll qM(kF)^{-3}.$$

Daher liefert Hilfssatz 6 mit $j:=3$ und $F_3:=qM(kF)^{-3}$ wegen $J'_\nu\subseteq(0,\mu']\subseteq(0,\varrho kF]$

$$\sum_{\mu\in J'_\nu}e\big(\varphi(\mu,\nu)\big)\ll(kF)^{1/2}(qM)^{1/6}+kF(qM)^{-1/6}.$$

Setzt man dies in (30) ein, so hat man

$$\sum_{\mu\epsilon J_\nu}\chi(\mu,\nu)e\big(\varphi(\mu,\nu)\big)\ll(kF)^{1/2}(qM)^{-1/3}N+kF(qM)^{-2/3}N$$

und nach (29) wegen $\nu\ll qMN^{-1}$ (folgt aus (24) und (25))

$$S_3\ll(kF)^{1/2}(qM)^{2/3}+kF(qM)^{1/3}+kF(qM)^{-1/2}N.$$

(22) ergibt dann für S_2 die Abschätzung

$$S_2\ll r^{-1/2}kFN+(kF)^{3/4}(rM)^{1/3}N^{1/2}+kF(rM)^{1/6}N^{1/2}+kF(rM)^{-1/4}N$$

und (20)

$$S_1\ll r^{-1/2}(kF)^{1/2}M^{1/2}N+r^{1/3}(kF)^{1/4}M^{5/6}N^{1/2}+r^{1/6}(kF)^{1/2}M^{2/3}N^{1/2}+ \\ +r^{-1/4}(kF)^{1/2}M^{1/4}N+(kF)^{-1/2}M^{1/2}N+(kF)^{1/3}M^{1/3}N. \tag{34}$$

Wir setzen nun zunächst $r:=(k/K)^{3/4}r_0$ mit von k unabhängigem r_0 und erhalten aus (2) und (34)

$$S\ll K^{-1}MN+r_0^{-1/2}(KF)^{1/2}M^{1/2}N+r_0^{1/3}(KF)^{1/4}M^{5/6}N^{1/2}+ \\ +r_0^{1/6}(KF)^{1/2}M^{2/3}N^{1/2}+r_0^{-1/4}(KF)^{1/2}M^{1/4}N+F^{-1/2}M^{1/2}N+(KF)^{1/3}M^{1/3}N.$$

Jetzt erst wählen wir r_0 und K so, daß die drei ersten Glieder rechts von gleicher Ordnung sind, nämlich

$$r_0:=\frac{\varepsilon}{2}F^{2/9}M^{-1/3}N^{2/3},\qquad K:=F^{-7/27}(MN)^{2/9}.$$

Durch diese Wahl von r_0 und K ist auch (33) erfüllt. Es ergibt sich

$$S\ll F^{7/27}(MN)^{7/9}+F^{11/27}(MN)^{13/18}+F^{17/54}(MN)^{25/36}(N/M)^{1/4}+ \\ +F^{-1/2}(MN)^{3/4}(N/M)^{1/4}+F^{20/81}(MN)^{20/27}(N/M)^{1/3}.$$

Wegen $F>1$, $MN\gg 1$, $N/M\ll 1$ wird das dritte Glied rechts vom zweiten und die beiden letzten vom ersten majorisiert, womit Satz 2 bewiesen ist.

Hauptsatz. *Für $x\to\infty$ gilt*

$$\Delta(x)\ll x^{7/27}\log^2 x.$$

Beweis. (α,β,γ) sei eine Permutation der Ziffern $(1,2,3)$ und x hinreichend groß. Die in Hilfssatz 2 auftretenden Summen $S_{\alpha,\beta,\gamma}(x)$ lassen sich je in $O(\log^2 x)$ Summen der Form

$$S_{\alpha,\beta,\gamma}(x;M,N):=\sum_{\substack{M<m\leqslant 2M\\ N<n\leqslant 2N\\ m^{\alpha+\beta}n^\gamma\leqslant x\\ m>n}}\sum B\left(\sqrt[\alpha]{\frac{x}{m^\beta n^\gamma}}\right)$$

zerlegen. Man darf offenbar $2M>N\geqslant 1/2$ und $M^{\alpha+\beta}N^\gamma<x$ voraussetzen. Satz 2 liefert, indem man dort $y:=x^{1/\alpha}$, $\varrho:=\beta/\alpha$, $\sigma:=\gamma/\alpha$, $F=(xM^{-\alpha-\beta}N^{-\gamma})^{1/\alpha}$ setzt und $\alpha+\beta+\gamma=6$ beachtet,

$$S_{\alpha,\beta,\gamma}(x;M,N)\ll\{x(M^{\alpha+\beta}N^\gamma)^{\alpha-1}(N/M)^{\alpha(3-\gamma)}\}^{7/(27\alpha)}+ \\ +\{x^{22}(M^{\alpha+\beta}N^\gamma)^{13\alpha-22}(N/M)^{13\alpha(3-\gamma)}\}^{1/(54\alpha)} \\ \ll x^{7/27}+\{x^{22}(M^{\alpha+\beta}N^\gamma)^{13\alpha-22}\}^{1/(54\alpha)}.$$

Hieraus folgt, wenn entweder $\alpha>1$ oder $\alpha=1$, $M^{1+\beta}N^\gamma>x^{8/9}$ ist,

$$S_{\alpha,\beta,\gamma}(x;M,N)\ll x^{7/27}. \tag{35}$$

Ist aber $\alpha=1$, $M^{1+\beta}N^\gamma\leqslant x^{8/9}$, so ist (35) bei hinreichend großem x mit Satz 1 identisch.

Aus (35) ergibt sich unmittelbar

$$S_{\alpha,\beta,\gamma}(x)\ll x^{7/27}\log^2 x,$$

und Hilfssatz 2 liefert

$$\Delta_3(x)\ll x^{7/27}\log^2 x.$$

Wegen Hilfssatz 1 ist damit unser Hauptsatz bewiesen.

Literaturverzeichnis

[1] E. Phillips, *The zeta-function of Riemann; further developments of van der Corput's method*, Quart. J. Math. (Oxford) 4 (1933), S. 209-225.

[2] H. E. Richert, *Über die Anzahl abelscher Gruppen gegebener Ordnung I*, Math. Zeitschr. 56 (1952), S. 21-32.

[3] P. G. Schmidt, *Zur Anzahl Abelscher Gruppen gegebener Ordnung*, erscheint in Crelles J. f. reine u. angew. Math.

[4] E. C. Titchmarsh, *The lattice-points in a circle*, Proc. London Math. Soc. (2) 38 (1935), S. 96-115.

[5] — *The theory of the Riemann zeta-function*, Oxford 1951.

Reçu par la Rédaction le 15. 3. 1967