number congruent to $m'(\bmod a^m)$ must also be congruent to $(n+1)^*(\bmod a^n)$ for $1 \leqslant n < m$.

To complete the proof we will merely mention which r, t, and s are engulfed by which congruences of the D, E, F, G, and H components:

(1) D engulfs s_0; $t_{0,1}$; ...; $t_{0,6}$; $r_{0,1}$; ...; $r_{0,6}$;

(2) e_n engulfs s_n; $t_{n,1}$; ...; $t_{n,6}$; $r_{n,n+1}$ ...; $r_{n,6}$, $n = 1, 2, 3, 4, 5$;

(3) f_{n-5} engulfs s_n; $r_{n,1}$; ... $r_{n,6}$; $t_{n,n-4}$; ...; $t_{n,6}$, $n = 6, 7, 8, 9, 10$,

(4) $g_{m,n}$ engulfs $r_{n-1,m}$, $1 \leqslant m < n \leqslant 6$,

(5) $h_{m,n}$ engulfs $t_{n+4,m}$, $1 \leqslant m < n \leqslant 6$.

Notice that all cases are engulfed by these. Hence $\bigcup_A^H X$ is a covering class of residues in $Z(\sqrt{-2})$ and the norms being divisors of the odd integer 5,845,851 are necessarily odd.

We have not used the divisors $a^j\beta^j\gamma$ for $j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ nor $a^6\gamma$ or $\beta^6\gamma$ of $a^6\beta^6\gamma$ as possible moduli so perhaps a simpler covering class of residues in $Z(\sqrt{-2})$ can be found.

3. Remarks. Although this does not shed any light on questions 2 and 4, the method of constructing the example may be able to be used in attempts at settling these questions.

The basic ingredient of $Z(\sqrt{-2})$ that allowed this example to be constructed was the existence of two primes whose norms were 3. These did an excellent job of covering a large portion of $Z(\sqrt{-2})$ and only the one additional prime $3+\sqrt{2i}$ was needed to complete the cover.

The method of this paper indicates that we can obtain infinitely many essentially different covers of $Z(\sqrt{-2})$ that have odd norms.

References

[1] H. Davenport, *The higher arithmetic*, New York 1960, p. 57.

[2] P. Erdös, *On a problem concerning congruence system*, Math. Lapok 3 (1952), pp. 122-128.

[3] — *Proceedings of the 1963 Number Theory Conference*, University of Colorado, Proposed problem no. 28.

[4] J. H. Jordan, *Covering classes of residues*, Canadian J. Math. 19 (1967), pp. 514-519.

[5] J. L. Selfridge, *Proceedings of the 1963 Number Theory Conference*, University of Colorado, Proposed problem no. 28.

Research for this paper was supported in part by NSF Grant No. GP-6227 and WSU Grant-in-Aids for research project number 729.

Reçu par la Rédaction le 21. 2. 1967

ACTA ARITHMETICA
XIII (1968)

Sur un théorème de Rényi. II

par

H. DELANGE (Paris)

1. Introduction. Soient $\omega(n)$ le nombre des diviseurs premiers de l'entier positif n et $\Omega(n)$ le nombre total des facteurs dans la décomposition de n en facteurs premiers.

A. Rényi a montré (1) que, pour chaque entier $q \geqslant 0$, l'ensemble des n pour lesquels on a $\Omega(n)-\omega(n) = q$ possède une densité d_q, la suite des nombres d_q étant déterminée par le fait que, pour $|z| < 2$,

$$\sum_{q=0}^{+\infty} d_q z^q = \frac{6}{\pi^2}\prod \frac{1-z/(p+1)}{1-z/p},$$

où p parcourt la suite des nombres premiers.

Dans un article précédent (2) de même titre que celui-ci, nous avons montré que le fait que la fonction $\zeta(s)$ de Riemann n'a aucun zéro de partie réelle 1 entraîne le résultat suivant, qui précise celui de Rényi:

Si $\nu_q(x)$ est le nombre des $n \leqslant x$ pour lesquels on a

$$\Omega(n)-\omega(n) = q \quad (q \textit{ entier } \geqslant 0),$$

on a pour x infini:

$$\nu_q(x) = d_q x + o[x^{1/2}(\log\log x)^q].$$

Nous nous proposons ici de montrer que ceci peut aussi s'établir élémentairement à partir du théorème des nombres premiers sous la forme $\pi(x) \sim x/\log x$, ou plus précisèment à partir du fait équivalent que la fonction de Möbius satisfait à

$$\sum_{n\leqslant x}\mu(n) = o[x]. \tag{1}$$

On peut même établir le théorème plus général suivant:

(1) *On the density of certain sequences of integers*, Publications de l'Institut de Mathématiques de l'Académie Serbe des Sciences 8 (1955), pp. 157-162.

(2) Acta Arithmetica 11 (1965), pp. 241-252.

THÉORÈME A. *Soit E un ensemble non vide quelconque de nombres premiers.*

Désignons par $\omega_E(n)$ le nombre des diviseurs premiers de l'entier positif n qui appartiennent à E, et par $\Omega_E(n)$ le nombre total des facteurs qui appartiennent à E dans la décomposition de n en facteurs premiers. Autrement dit, soient ω_E et Ω_E les fonctions de l'entier positif n définies de la façon suivante:

$$\omega_E(1) = \Omega_E(1) = 0$$

et, si $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r} m$, où $p_1, p_2, \dots, p_r$ sont des éléments distincts de E, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ des entiers positifs et m un entier positif qui n'est divisible par aucun nombre de E,

$$\omega_E(n) = r \quad \text{et} \quad \Omega_E(n) = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_r.$$

Soit $\nu_q(x, E)$ le nombre des entiers positifs n au plus égaux à x tels que $\Omega_E(n) - \omega_E(n) = q$.

Soit, d'autre part, F_E la fonction méromorphe définie par

$$F_E(z) = \left\{\prod_{p \in E}\left(1 - \frac{1}{p^2}\right)\right\}\prod_{p \in E}\frac{1 - z/(p+1)}{1 - z/p},$$

et soit $\sum_{q=0}^{+\infty} \delta_q(E) z^q$ le développement en série entière de $F_E(z)$ au voisinage de zéro, de sorte que

$$\delta_0(E) = \prod_{p \in E}\left(1 - \frac{1}{p^2}\right).$$

Alors, pour tout $q \geqslant 0$, on a quand x tend vers $+\infty$:

$$\nu_q(x, E) = \delta_q(E) x + o[x^{1/2}(\log\log x)^q].$$

Le résultat rappelé plus haut est le cas particulier où E est l'ensemble P de tous les nombres premiers.

Nous verrons que notre méthode permet dans ce cas, en utilisant au lieu de (1) le fait que

$$\sum_{n \leqslant x} \mu(n) = O[x e^{-a\sqrt{\log x}}],$$

avec $a > 0$ convenable, d'obtenir un meilleur résultat:

THÉORÈME B. *Avec les mêmes notations que plus haut, pour chaque $q \geqslant 1$, on a quand x tend vers $+\infty$:*

$$\nu_q(x) = d_q x + O\left[\frac{x^{1/2}(\log\log x)^{q-1}}{\log x}\right]. \tag{2}$$

Le théorème B fournit la meilleure évaluation que nous sachions établir de la différence $\nu_q(x) - d_q x$.

Cependant, alors que (2) entraîne seulement que

$$\int_0^x [\nu_q(t) - d_q t]\,dt = O\left[\frac{x^{3/2}(\log\log x)^{q-1}}{\log x}\right],$$

on peut montrer par des méthodes analytiques que

$$\int_0^x [\nu_q(t) - d_q t]\,dt \sim -\frac{8}{3}\zeta\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{(q-1)!}\cdot\frac{x^{3/2}(\log\log x)^{q-1}}{(\log x)^2}.$$

1.1. Dans toute la suite, la lettre p représente toujours un nombre premier, tandis que m, n, d, r représentent des entiers > 0.

$E(u)$ désigne le plus grand entier $\leqslant u$.

Une somme qui ne contient aucun terme est considérée comme nulle et un produit qui ne contient aucun facteur est considéré comme égal à 1.

2. Quelques lemmes.

2.1. LEMME 1. *Soient f et g deux fonctions réelles ou complexes, f définie sur l'ensemble des entiers positifs, g sur l'ensemble des nombres réels $\geqslant 1$.*

On suppose que

(a) *Pour $x \geqslant 1$,*

$$\sum_{n \leqslant x} |f(n)| \leqslant \Phi(x) \quad \text{et} \quad \left|\sum_{n \leqslant x} f(n)\right| \leqslant \Psi(x),$$

Φ et Ψ étant deux fonctions positives de la variable réelle x définies pour $x \geqslant 1$, et Ψ étant non décroissante;

(b) *Pour $x \geqslant 1$, $|g(x)| \leqslant K$, où K est une constante positive;*

(c) *g est à variation bornée sur tout intervalle $[1, X]$ où $1 < X < +\infty$, On désigne par $V(X)$ la variation de g sur l'intervalle $[1, X]$.*

Alors on a pour $1 \leqslant u < x$

$$\left|\sum_{n \leqslant x} f(n) g\left(\frac{x}{n}\right)\right| \leqslant K\Phi(u) + \left[|g(1)| + \left|g\left(\frac{x}{u}\right)\right| + V\left(\frac{x}{u}\right)\right]\Psi(x).$$

Démonstration. On a

$$\left|\sum_{n \leqslant x} f(n) g\left(\frac{x}{n}\right)\right| \leqslant \left|\sum_{n \leqslant u} f(n) g\left(\frac{x}{n}\right)\right| + \left|\sum_{u < n \leqslant x} f(n) g\left(\frac{x}{n}\right)\right|.$$

Le premier terme du second membre est évidemment au plus égal à $K\Phi(u)$.

Pour évaluer le second, introduisons $n_1 = \mathrm{E}(u)$ et $n_2 = \mathrm{E}(x)$.
On a évidemment $1 \leqslant n_1 \leqslant n_2$.
Si $n_1 = n_2$,

$$\sum_{u<n\leqslant x} f(n)g\left(\frac{x}{n}\right) = 0.$$

Si $n_1 < n_2$,

$$\sum_{u<n\leqslant x} f(n)g\left(\frac{x}{n}\right) = \sum_{n=n_1+1}^{n_2} f(n)g\left(\frac{x}{n}\right).$$

Nous transformerons cette expression en introduisant la fonction F définie sur $[1, +\infty[$ par

$$F(t) = \sum_{n\leqslant t} f(n).$$

Pour $1 \leqslant t \leqslant x$, $|F(t)| \leqslant \Psi(t) \leqslant \Psi(x)$.
On peut écrire

$$\sum_{n_1+1}^{n_2} f(n)g\left(\frac{x}{n}\right) = \sum_{n_1+1}^{n_2} [F(n)-F(n-1)]\, g\left(\frac{x}{n}\right).$$

Si $n_2 = n_1+1$, ceci se réduit à

$$\sum_{n_1+1}^{n_2} f(n)g\left(\frac{x}{n}\right) = [F(n_1+1)-F(n_1)]\, g\left(\frac{x}{n_1+1}\right),$$

d'où

$$\left|\sum_{n_1+1}^{n_2} f(n)g\left(\frac{x}{n}\right)\right| \leqslant 2\Psi(x)\left|g\left(\frac{x}{n_1+1}\right)\right|.$$

Mais on a

$$2g\left(\frac{x}{n_1+1}\right) = \left[g\left(\frac{x}{n_1+1}\right)-g(1)\right] - \left[g\left(\frac{x}{u}\right)-g\left(\frac{x}{n_1+1}\right)\right] + g(1) + g\left(\frac{x}{u}\right),$$

d'où

$$\begin{aligned}2\left|g\left(\frac{x}{n_1+1}\right)\right| &\leqslant \left|g\left(\frac{x}{n_1+1}\right)-g(1)\right| + \left|g\left(\frac{x}{u}\right)-g\left(\frac{x}{n_1+1}\right)\right| + |g(1)| + \left|g\left(\frac{x}{u}\right)\right| \\ &\leqslant V\left(\frac{x}{u}\right) + |g(1)| + \left|g\left(\frac{x}{u}\right)\right|\end{aligned}$$

puisque $1 \leqslant x/(n_1+1) < x/u$.

Si $n_2 > n_1+1$, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{n_1+1}^{n_2} f(n)g\left(\frac{x}{n}\right) \\ = F(n_2)g\left(\frac{x}{n_2}\right) - F(n_1)g\left(\frac{x}{n_1+1}\right) + \sum_{n_1+1}^{n_2-1} F(n)\left[g\left(\frac{x}{n}\right)-g\left(\frac{x}{n+1}\right)\right],\end{aligned}$$

d'où

$$\left|\sum_{n_1+1}^{n_2} f(n)g\left(\frac{x}{n}\right)\right| \leqslant \Psi(x)\left[\left|g\left(\frac{x}{n_2}\right)\right| + \left|g\left(\frac{x}{n_1+1}\right)\right| + \sum_{n_1+1}^{n_2-1}\left|g\left(\frac{x}{n}\right)-g\left(\frac{x}{n+1}\right)\right|\right].$$

Mais

$$\left|g\left(\frac{x}{n_2}\right)\right| \leqslant |g(1)| + \left|g\left(\frac{x}{n_2}\right)-g(1)\right|,$$

$$\left|g\left(\frac{x}{n_1+1}\right)\right| \leqslant \left|g\left(\frac{x}{u}\right)\right| + \left|g\left(\frac{x}{u}\right)-g\left(\frac{x}{n_1+1}\right)\right|.$$

Le crochet est donc au plus égal à

$$\begin{aligned}&|g(1)| + \left|g\left(\frac{x}{u}\right)\right| + \\ &+ \left|g\left(\frac{x}{u}\right)-g\left(\frac{x}{n_1+1}\right)\right| + \sum_{n_1+1}^{n_2-1}\left|g\left(\frac{x}{n}\right)-g\left(\frac{x}{n+1}\right)\right| + \left|g\left(\frac{x}{n_2}\right)-g(1)\right|,\end{aligned}$$

donc à $|g(1)|+|g(x/u)|+V(x/u)$ puisque x/n décroit de $x/(n_1+1)$ à x/n_2 quand n croît de n_1+1 à n_2, et $1 \leqslant x/n_2 < x/(n_1+1) < x/u$.

On voit donc que, dans tous les cas,

$$\left|\sum_{u<n\leqslant x} f(n)g\left(\frac{x}{n}\right)\right| \leqslant \left[|g(1)| + \left|g\left(\frac{x}{u}\right)\right| + V\left(\frac{x}{u}\right)\right]\Psi(x).$$

2.2. LEMME 2. *A chaque ensemble non vide A d'entiers >1 premiers entre eux deux à deux, associons la fonction μ_A définie sur l'ensemble des entiers >0 par*

$$\mu_A(1) = 1,$$

et pour $n>1$,

$$\mu_A(n) = \begin{cases}(-1)^r & \text{si } n \text{ est le produit de } r \text{ nombres distincts de } A,\\ 0 & \text{si } n \text{ n'est pas de cette forme.}\end{cases}$$

Définissons aussi la fonction M_A sur l'ensemble des nombres réels >0 par

$$M_A(x) = \sum_{n\leqslant x} \mu_A(n).$$

Soit enfin $N_A(x)$ le nombre des $n \leqslant x$ qui ne sont divisibles par aucun nombre de A.

Alors

1°. *On a*

$$\sum_{d|n} \mu_A(n) = \begin{cases} 1 \text{ si } n \text{ n'est divisible par aucun nombre de } A, \\ 0 \text{ dans le cas contraire,} \end{cases}$$

et par suite, pour tout $x \geqslant 1$,

$$N_A(x) = \sum_{n \leqslant x} \mu_A(n) \mathrm{E}\left(\frac{x}{n}\right).$$

2°. *Si $\sum_{m \in A} (1/m) < +\infty$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \big(\mu_A(n)/n\big)$ est absolument convergente et a pour somme $\prod_{m \in A} (1-1/m)$.*

3°. *Si A est un ensemble de nombres premiers* [3], *on a pour x infini*

$$M_A(x) = o[x].$$

2.2.1. Démonstration de 1°.

a. Si n n'est divisible par aucun nombre de A, $\mu_A(d) = 0$ pour tout diviseur d de n autre que 1, donc

$$\sum_{d|n} \mu_A(d) = \mu_A(1) = 1.$$

Dans le cas contraire, soit D l'ensemble des nombres de A qui divisent n et soit q le nombre des éléments de D.

Si un produit de nombres de A divise n, chacun de ces nombres appartient à D. Inversement, tout produit de nombres de D distincts divise n. Les diviseurs de n pour lesquels $\mu_A(d) \neq 0$ sont donc 1 et les produits de nombres distincts de D.

Comme, pour chaque $r \geqslant 1$ et $\leqslant q$, il y a exactement $\binom{q}{r}$ produits de r nombres de D distincts, on a

$$\sum_{d|n} \mu_A(d) = 1 + \sum_{r=1}^{q} \binom{q}{r} (-1)^r = (1-1)^q = 0.$$

b. Le résultat qui précède entraîne évidemment que, pour $x \geqslant 1$,

$$N_A(x) = \sum_{n \leqslant x} \Big[\sum_{d|n} \mu_A(d)\Big] = \sum_{d \leqslant x} \mu_A(d) \mathrm{E}\left(\frac{x}{d}\right).$$

---

[3] En fait le résultat est valable quel que soit E.

2.2.2. Démonstration de 2°.

a. Si l'ensemble A est fini, le résultat à établir est évident car la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \big(\mu_A(n)/n\big)$ n'a qu'un nombre fini de termes non nuls — exactement 2^q si A a q éléments — et ce sont précisèment ceux que l'on obtient en développant le produit $\prod_{m \in A} (1-1/m)$.

On voit de même que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\mu_A(n)|}{n} = \prod_{m \in A} \left(1+\frac{1}{m}\right).$$

b. Si A est infini, rangeons ses éléments en la suite $m_1, m_2, \ldots, m_j, \ldots$, et soit A_q l'ensemble des q premiers termes de cette suite.

Quel que soit $N \geqslant 1$, on a pour chaque $q \geqslant 1$

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} |\mu_{A_q}(n)| \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} |\mu_{A_q}(n)| = \prod_{j=1}^{q} \left(1+\frac{1}{m_j}\right);$$

donc

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} |\mu_{A_q}(n)| < \prod_{m \in A} \left(1+\frac{1}{m}\right),$$

et, en faisant tendre q vers $+\infty$, on obtient à la limite

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{|\mu_A(n)|}{n} \leqslant \prod_{m \in A} \left(1+\frac{1}{m}\right).$$

La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \big(|\mu_A(n)|/n\big)$ est donc convergente.

Comme, par ailleurs, quel que soit $n \geqslant 1$, on a pour tout q

$$|\mu_{A_q}(n)| \leqslant |\mu_A(n)|,$$

on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mu_A(n)}{n} = \lim_{q \to +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \mu_{A_q}(n) = \lim_{q \to +\infty} \prod_{j=1}^{q} \left(1-\frac{1}{m_j}\right) = \prod_{m \in A} \left(1-\frac{1}{m}\right).$$

2.2.3. Démonstration de 3°.

a. Remarquons d'abord que, si $\sum_{m \in A} (1/m) = +\infty$, on a pour x infini

$$N_A(x) = o[x].$$

En effet, soient, comme plus haut, $m_1, m_2, \ldots, m_j, \ldots$ les nombres de A, et A_q l'ensemble des nombres $m_1, m_2, \ldots, m_q$.

Pour chaque $q \geqslant 1$, $N_A(x)$ est au plus égal à $N_{A_q}(x)$, c'est-à-dire, d'après le 1°, à

$$\sum_{n\leqslant x} \mu_{A_q}(n)\mathrm{E}\left(\frac{x}{n}\right) = x\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n}\mu_{A_q}(n) - \sum_{n\leqslant x}\mu_{A_q}(n)\left[\frac{x}{n} - \mathrm{E}\left(\frac{x}{n}\right)\right].$$

Si $x \geqslant m_1 m_2 \ldots m_q$, tous les n — au nombre de 2^q — pour lesquels $\mu_{A_q}(n) \neq 0$ sont au plus égaux à x, donc

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n}\mu_{A_q}(n) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}\mu_{A_q}(n) = \prod_{j=1}^{q}\left(1-\frac{1}{m_j}\right),$$

tandis que

$$\left|\sum_{n\leqslant x}\mu_{A_q}(n)\left[\frac{x}{n} - \mathrm{E}\left(\frac{x}{n}\right)\right]\right| \leqslant \sum_{n\leqslant x}|\mu_{A_q}(n)| = 2^q,$$

et par suite

$$N_A(x) \leqslant x\prod_{j=1}^{q}\left(1-\frac{1}{m_j}\right) + 2^q.$$

On voit donc que, pour tout $q \geqslant 1$,

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\,\frac{1}{x}N_A(x) \leqslant \prod_{j=1}^{q}\left(1-\frac{1}{m_j}\right).$$

En faisant tendre q vers $+\infty$, on obtient à la limite

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\,\frac{1}{x}N_A(x) \leqslant 0.$$

b. Supposons maintenant que A soit un ensemble de nombres premiers.

Le résultat à démontrer se réduit à (1) dans le cas où A est l'ensemble P de tous les nombres premiers.

Il est une conséquence immédiate de ce qui précède si $\sum_{p\in P-A}(1/p) = +\infty$, car les n pour lesquels $\mu_A(n) \neq 0$ ne sont divisibles par aucun nombre de $P-A$ et par suite, pour tout $x \geqslant 1$,

$$|M_A(x)| \leqslant \sum_{n\leqslant x}|\mu_A(n)| \leqslant N_{P-A}(x).$$

Reste donc à traiter le cas où $A \neq P$ et $\sum_{p\in P-A}(1/p) < +\infty$.

Pour cela nous introduirons la fonction arithmétique g_A définie par

$$g_A(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ n'est divisible par aucun nombre de } A, \\ 0 & \text{dans le cas contraire.} \end{cases}$$

Remarquons d'abord que la série $\sum_1^{+\infty}(g_A(n)/n)$ est convergente car, pour tout $x \geqslant 1$,

$$\sum_{n\leqslant x}\frac{g_A(n)}{n} \leqslant \prod_{\substack{p\in P-A\\ p\leqslant x}}\left[1+\sum_{\substack{j\geqslant 1\\ p^j\leqslant x}}\frac{1}{p^j}\right] \leqslant \prod_{\substack{p\in P-A\\ p\leqslant x}}\frac{1}{1-1/p} \leqslant \prod_{p\in P-A}\frac{1}{1-1/p}.$$

D'autre part, d'après le 1°, on a pour tout $n \geqslant 1$

$$g_A(n) = \sum_{d|n}\mu_A(n).$$

Il en résulte que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\mu_A(n) = \sum_{d|n}\mu(d)g_A\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n}g_A(d)\mu\left(\frac{n}{d}\right),$$

et par suite, pour tout $x \geqslant 1$,

$$M_A(x) = \sum_{n\leqslant x}g_A(n)M\left(\frac{x}{n}\right),$$

d'où

$$|M_A(x)| \leqslant \sum_{n\leqslant x}g_A(n)\left|M\left(\frac{x}{n}\right)\right|,$$

où

$$M(x) = \sum_{n\leqslant x}\mu(n).$$

Etant donné $\varepsilon > 0$, il existe $x_0 \geqslant 1$ tel que

$$|M(x)| \leqslant \varepsilon x \quad \text{pour} \quad x \geqslant x_0.$$

Alors, pour $x \geqslant x_0$,

$$|M_A(x)| \leqslant \sum_{n\leqslant x/x_0}g_A(n)\left|M\left(\frac{x}{n}\right)\right| + \sum_{x/x_0<n\leqslant x}g_A(n)\left|M\left(\frac{x}{n}\right)\right|,$$

$$\leqslant \varepsilon x\sum_{n\leqslant x/x_0}\frac{g_A(n)}{n} + x\sum_{x/x_0<n\leqslant x}\frac{g_A(n)}{n}.$$

Il résulte de là que

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{1}{x}|M_A(x)|\leqslant\varepsilon\sum_1^{+\infty}\frac{g_A(n)}{n}.$$

Ceci ayant lieu pour tout $\varepsilon>0$, on a bien le résultat désiré.

2.3. LEMME 3. *Soit A un ensemble non vide d'entiers >1 premiers entre eux deux à deux.*

On suppose que $\sum_{m\in A}(1/m)<+\infty$ et, avec les notations du lemme 2, que l'on a pour $x\geqslant 1$

$$\sum_{n\leqslant x}|\mu_A(n)|\leqslant\nu(x)\qquad\text{et}\qquad|M_A(x)|\leqslant\mathfrak{M}(x),$$

où ν et $\mathfrak{M}$ sont des fonctions positives définies pour $x\geqslant 1$, $\mathfrak{M}$ étant non-décroissante et telle que

$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathfrak{M}(x)}{x^2}\,dx<+\infty.$$

Alors on a, pour $1\leqslant u\leqslant x$,

$$\Big|N_A(x)-x\prod_{m\in A}\Big(1-\frac{1}{m}\Big)\Big|\leqslant\nu(u)+\Big(2\frac{x}{u}-1\Big)\mathfrak{M}(x)+x\int_x^{+\infty}\frac{\mathfrak{M}(t)}{t^2}\,dt.$$

2.3.1. Remarquons que l'on a nécessairement pour x infini

$$\mathfrak{M}(x)=o[x]$$

car on a pour tout $x\geqslant 1$

$$\int_x^{+\infty}\frac{\mathfrak{M}(t)}{t^2}\,dt\geqslant\int_x^{+\infty}\frac{\mathfrak{M}(x)}{t^2}\,dt=\frac{\mathfrak{M}(x)}{x}.$$

Ceci permet d'affirmer que $M_A(x)=o[x]$ sans faire appel au lemme 2.

De plus, l'intégrale $\int_1^{+\infty}(M_A(t)/t^2)\,dt$ est évidemment absolument convergente.

2.3.2. **Démonstration.** D'après le lemme 2, on a pour $x\geqslant 1$

$$\begin{aligned}N_A(x)-x\prod_{m\in A}\Big(1-\frac{1}{m}\Big)&=\sum_{n\leqslant x}\mu_A(n)\,\mathrm{E}\Big(\frac{x}{n}\Big)-x\sum_1^{+\infty}\frac{\mu_A(n)}{n}\\&=-\sum_{n\leqslant x}\mu_A(n)\Big[\frac{x}{n}-\mathrm{E}\Big(\frac{x}{n}\Big)\Big]-x\sum_{n>x}\frac{\mu_A(n)}{n}\end{aligned}$$

et par suite

$$\Big|N_A(x)-x\prod_{m\in A}\Big(1-\frac{1}{m}\Big)\Big|\leqslant\Big|\sum_{n\leqslant x}\mu_A(n)\Big[\frac{x}{n}-\mathrm{E}\Big(\frac{x}{n}\Big)\Big]\Big|+x\Big|\sum_{n>x}\frac{\mu_A(n)}{n}\Big|.$$

La fonction g définie par

$$g(t)=t-\mathrm{E}(t)$$

satisfait à $|g(t)|\leqslant 1$ pour tout $t\geqslant 1$ et est à variation bornée sur tout invervalle $[1,X]$, où $1<X<+\infty$, sa variation sur cet intervalle étant égale à $X+\mathrm{E}(X)-2$.

Alors, d'après le lemme 1, si $1\leqslant u<x$,

$$\Big|\sum_{n\leqslant x}\mu_A(n)\Big[\frac{x}{n}-\mathrm{E}\Big(\frac{x}{n}\Big)\Big]\Big|\leqslant\nu(u)+2\Big(\frac{x}{u}-1\Big)\mathfrak{M}(x).$$

Il est évident que cette inégalité a encore lieu si $u=x\geqslant 1$.

Pour achever la démonstration, il suffit donc de montrer que, pour $x\geqslant 1$,

$$\Big|\sum_{n>x}\frac{\mu_A(n)}{n}\Big|\leqslant\frac{\mathfrak{M}(x)}{x}+\int_x^{+\infty}\frac{\mathfrak{M}(t)}{t^2}\,dt.$$

Mais, si $y>x$, on a pour chaque n satisfaisant à $x<n\leqslant y$

$$\frac{\mu_A(n)}{n}-\frac{\mu_A(n)}{y}=\int_n^y\frac{\mu_A(n)}{t^2}\,dt=\int_x^y\frac{\mu_A(n)\,\delta(t-n)}{t^2}\,dt,$$

où

$$\delta(u)=\begin{cases}1&\text{si}\quad u\geqslant 0,\\0&\text{si}\quad u<0.\end{cases}$$

Par addition, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{x<n\leqslant y}\frac{\mu_A(n)}{n}-\frac{M_A(y)-M_A(x)}{y}&=\int_x^y\frac{M_A(t)-M_A(x)}{t^2}\,dt\\&=\int_x^y\frac{M_A(t)}{t^2}\,dt+\frac{M_A(x)}{y}-\frac{M_A(x)}{x},\end{aligned}$$

d'où

$$\sum_{x<n\leqslant y}\frac{\mu_A(n)}{n}=\frac{M_A(y)}{y}-\frac{M_A(x)}{x}+\int_x^y\frac{M_A(t)}{t^2}\,dt.$$

En faisant tendre y vers $+\infty$, ceci donne à la limite

$$\sum_{n>x} \frac{\mu_A(n)}{n} = -\frac{M_A(x)}{x} + \int_x^{+\infty} \frac{M_A(t)}{t^2}\, dt, \tag{3}$$

d'où le résultat désiré.

2.4. LEMME 4. *Soient f et g deux fonctions arithmétiques multiplicatives et soit h la fonction arithmétique définie par*

$$h(n) = \sum_{d^2|n} f(d)\, g\left(\frac{n}{d^2}\right).$$

Alors h est multiplicative.

Démonstration. En utilisant les décompositions en facteurs premiers, on voit immédiatement que, si $(m, n) = 1$, on obtient tous les entiers positifs dont le carré divise mn, chacun une fois, en formant les produits $d_1 d_2$, où $d_1^2|m$ et $d_2^2|n$.

Ainsi

$$h(mn) = \sum_{\substack{d_1^2|m\\ d_2^2|n}} f(d_1 d_2)\, g\left(\frac{mn}{d_1^2 d_2^2}\right) = \sum_{\substack{d_1^2|m\\ d_2^2|n}} f(d_1)\, g\left(\frac{m}{d_1^2}\right) f(d_2)\, g\left(\frac{n}{d_2^2}\right)$$
$$= \left\{\sum_{d_1^2|m} f(d_1)\, g\left(\frac{m}{d_1^2}\right)\right\}\left\{\sum_{d_2^2|n} f(d_2)\, g\left(\frac{n}{d_2^2}\right)\right\} = h(m)\, h(n).$$

2.5. LEMME 5. *Soit $\mathfrak{M}$ une fonction positive définie pour $x \geqslant 1$ et telle que*

$$\int_x^{+\infty} \frac{\mathfrak{M}(t)}{t^2}\, dt < +\infty,$$

et soit $\mathfrak{M}^*$ la fonction définie pour $x \geqslant 1$ par

$$\mathfrak{M}^*(x) = x \int_x^{+\infty} \frac{\mathfrak{M}(t)}{t^2}\, dt.$$

Si $\mathfrak{M}$ est non décroissante, $\mathfrak{M}^*$ l'est aussi.

Démonstration. Si $1 \leqslant x' < x''$, on a

$$\mathfrak{M}^*(x'') - \mathfrak{M}^*(x') = (x''-x') \int_{x''}^{+\infty} \frac{\mathfrak{M}(t)}{t^2}\, dt - x' \int_{x'}^{x''} \frac{\mathfrak{M}(t)}{t^2}\, dt.$$

Mais

$$(x''-x') \int_{x''}^{+\infty} \frac{\mathfrak{M}(t)}{t^2}\, dt \geqslant (x''-x') \int_{x''}^{+\infty} \frac{\mathfrak{M}(x'')}{t^2}\, dt = \left(1 - \frac{x'}{x''}\right) \mathfrak{M}(x'')$$

et

$$x' \int_{x'}^{x''} \frac{\mathfrak{M}(t)}{t^2}\, dt \leqslant x' \int_{x'}^{x''} \frac{\mathfrak{M}(x'')}{t^2}\, dt = \left(1 - \frac{x'}{x''}\right) \mathfrak{M}(x'').$$

Donc $\mathfrak{M}^*(x'') - \mathfrak{M}^*(x') \geqslant 0$.

3. Démonstration du théorème A dans le cas où $q = 0$. Definissons une fonction $\mathfrak{M}_E$ sur l'ensemble des nombres réels $\geqslant 1$ par

$$\mathfrak{M}_E(x) = \operatorname*{Sup}_{t \leqslant x} |M_E(t^{1/2})|.$$

Il est clair que $\mathfrak{M}_E$ est une fonction non décroissante et que l'on a

$$\mathfrak{M}_E(x) \leqslant x^{1/2} \quad \text{pour tout } x \geqslant 1, \quad \text{et} \quad \mathfrak{M}_E(1) = 1.$$

De plus, le fait que $M_E(x) = o[x]$ pour x infini entraîne que

$$\mathfrak{M}_E(x) = o[x^{1/2}].$$

Remarquons maintenant que l'on a

$$\Omega_E(n) - \omega_E(n) = 0$$

si, et seulement si, n n'est divisible par le carré d'aucun nombre de E. Autrement dit, on a

$$\nu_0(x, E) = N_A(x),$$

où A est l'ensemble des carrés des nombres de E.

On a

$$\prod_{m \in A} \left(1 - \frac{1}{m}\right) = \delta_0(E).$$

De plus, on voit immédiatement que l'on a

$$\mu_A(n) = \begin{cases} \mu_E(\sqrt{n}) & \text{si } n \text{ est un carré,} \\ 0 & \text{dans le cas contraire,} \end{cases}$$

ce qui entraîne que, pour tout $x \geqslant 1$,

$$M_A(x) = M_E(x^{1/2}) \quad \text{et par suite} \quad |M_A(x)| \leqslant \mathfrak{M}_E(x),$$

et que

$$\sum_{n \leqslant x} |\mu_A(n)| \leqslant x^{1/2}.$$

Le lemme 3 montre donc que, pour $1 \leqslant u \leqslant x$,

$$|\nu_0(x, E) - \delta_0(E)x| \leqslant u^{1/2} + \left(2\frac{x}{u} - 1\right)\mathfrak{M}_E(x) + x\int_x^{+\infty} \frac{\mathfrak{M}_E(t)}{t^2}\,dt.$$

En prenant $u = x^{2/3}\mathfrak{M}_E(x)^{2/3}$, on trouve

$$|\nu_0(x, E) - \delta_0(E)x| \leqslant 3x^{1/3}\mathfrak{M}_E(x)^{1/3} - \mathfrak{M}_E(x) + x\int_x^{+\infty} \frac{\mathfrak{M}_E(t)}{t^2}\,dt.$$

Le second membre est $o[x^{1/2}]$ quand x tend vers $+\infty$.

4. Théorème préparatoire au cas où $q > 0$. Avant de démontrer le théorème A pour $q > 0$, nous établirons le résultat suivant.

Théorème préparatoire. *Soit E un ensemble non vide quelconque de nombres premiers.*

F étant une partie non vide de E, désignons par $N_{E,F}(x)$ le nombre des $n \leqslant x$ qui ne sont divisibles par aucun nombre de F et par le carré d'aucun nombre de $E-F$.

Pour chaque q entier $\geqslant 1$, il existe une fonction positive $\varphi_{E,q}$ dependant seulement de E et q, définie pour $x \geqslant 1$, non décroissante et satisfaisant à

$$\varphi_{E,q}(x) = o[x^{1/2}] \quad \textit{quand } x \textit{ tend vers } +\infty,$$

telle que, si F a au plus q éléments, on a pour tout $x \geqslant 1$

$$\left|N_{E,F}(x) - \delta_0(E)x\prod_{p\in F}\frac{1}{1+1/p}\right| \leqslant \varphi_{E,q}(x).$$

4.1. Démonstration. Fixons un $q \geqslant 1$ et soit F une partie non vide de E ayant au plus q éléments.

Nous allons appliquer le lemme 3 en prenant A égal à l'ensemble des nombres de F et des carrés des nombres de $E-F$, et utilisant des fonctions ν et $\mathfrak{M}$ indépendantes de F.

4.1.1. Remarquons d'abord que l'on a

$$\prod_{m\in A}\left(1-\frac{1}{m}\right) = \left\{\prod_{p\in F}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right\}\left\{\prod_{p\in E-F}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\right\}$$
$$= \left\{\prod_{p\in E}\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\right\}\left\{\prod_{p\in F}\frac{1}{1+1/p}\right\}$$
$$= \delta_0(E)\prod_{p\in F}\frac{1}{1+1/p}.$$

4.1.2. Soit maintenant λ_F la fonction arithmétique multiplicative déterminée par

$$\lambda_F(p^r) = \begin{cases} (-1)^r & \text{si} \quad p\in F, \\ 0 & \text{si} \quad p\notin F. \end{cases}$$

Comme la fonction μ_E est multiplicative, la fonction arithmétique μ^* définie par

$$\mu^*(n) = \sum_{d^2|n}\mu_E(d)\lambda_F\left(\frac{n}{d^2}\right)$$

est multiplicative d'après le lemme 4.

On vérifie immédiatement que l'on a

$$\mu^*(p^r) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad p\in F \text{ et } r=1, \text{ ou } p\in E-F \text{ et } r=2, \\ 0 & \text{si} \quad p\in F \text{ et } r\neq 1, \text{ ou } p\in E-F \text{ et } r\neq 2, \text{ ou } p\notin E, \end{cases}$$

et il en résulte que $\mu^*(n) = \mu_A(n)$ pour tout $n \geqslant 1$.

Autrement dit, on a pour tout $n \geqslant 1$

$$\mu_A(n) = \sum_{d^2|n}\mu_E(d)\lambda_F\left(\frac{n}{d^2}\right)$$

et par suite on a pour $x \geqslant 1$

$$M_A(x) = \sum_{n\leqslant x}\left(\sum_{d^2|n}\mu_E(d)\lambda_F\left(\frac{n}{d^2}\right)\right) = \sum_{md^2\leqslant x}\mu_E(d)\lambda_F(m)$$
$$= \sum_{m\leqslant x}\lambda_F(m)M_E\left(\sqrt{\frac{x}{m}}\right),$$

d'où

$$|M_A(x)| \leqslant \sum_{m\leqslant x}|\lambda_F(m)|\cdot\left|M_E\left(\sqrt{\frac{x}{m}}\right)\right|. \tag{4}$$

4.1.3. Comme on a évidemment $\frac{1}{t}|M_E(t)| \leqslant 1$ pour tout $t \geqslant 1$, on peut définir une fonction réelle u_E pour $x \geqslant 1$ par

$$u_E(x) = \operatorname*{Sup}_{t\geqslant x}\frac{1}{t}|M_E(t)|.$$

Il est clair que la fonction u_E est non croissante et que, pour tout $x \geqslant 1$,

$$0 \leqslant u_E(x) \leqslant 1.$$

On a d'ailleurs $u_E(1) = 1$ car $M_E(1) = 1$.

Le 3° du lemme 2 montre que $u_E(x)$ tend vers zéro quand x tend vers $+\infty$.

Comme on a évidemment $|M_E(x)| \leqslant x u_E(x)$ pour tout $x \geqslant 1$, (4) montre que, pour $x \geqslant 1$,

$$|M_A(x)| \leqslant \sum_{m\leqslant x} |\lambda_F(m)| \sqrt{\frac{x}{m}}\, u_E\left(\sqrt{\frac{x}{m}}\right)$$

$$\leqslant \sum_{m\leqslant x^{1/2}} |\lambda_F(m)| \sqrt{\frac{x}{m}}\, u_E\left(\sqrt{\frac{x}{m}}\right) + \sum_{x^{1/2}<m\leqslant x} |\lambda_F(m)| \sqrt{\frac{x}{m}}\, u_E\left(\sqrt{\frac{x}{m}}\right)$$

$$\leqslant x^{1/2} u_E(x^{1/4}) \sum_{m\leqslant x^{1/2}} \frac{|\lambda_F(m)|}{\sqrt{m}} + x^{1/4} \sum_{m\leqslant x} |\lambda_F(m)|.$$

Mais $|\lambda_F(m)|$ est égal à 1 si tous les diviseurs premiers de m appartiennent à F, et à zéro dans le cas contraire.

Si donc $p_1, p_2, \ldots, p_k$ sont les éléments de F et si $r_j(x)$ est le plus grand entier r tel que $p_j^r \leqslant x^{1/2}$, on a

$$\sum_{m\leqslant x^{1/2}} \frac{|\lambda_F(m)|}{\sqrt{m}} \leqslant \prod_{j=1}^{k} \left\{\sum_{r=0}^{r_j(x)} \frac{1}{p_j^{r/2}}\right\} \leqslant \prod_{j=1}^{k} \frac{1}{1-1/\sqrt{p}} \leqslant \left(\frac{1}{1-1/\sqrt{2}}\right)^q = 2^{q/2}(1+\sqrt{2})^q.$$

D'autre part, $\sum\limits_{m\leqslant x} |\lambda_F(m)|$ est le nombre des entiers $\leqslant x$ qui sont de la forme $p_1^{r_1} p_2^{r_2} \ldots p_k^{r_k}$, tous les r_j étant $\geqslant 0$.

Comme on doit avoir, pour chaque j, $p_j^{r_j} \leqslant x$, d'ou $r_j \leqslant \dfrac{\log x}{\log p_j}$, ce nombre est au plus égal à

$$\prod_{j=1}^{k} \left(1 + \frac{\log x}{\log p_j}\right) \leqslant \left(1 + \frac{\log x}{\log 2}\right)^q.$$

En définitive, on a pour tout $x \geqslant 1$

$$|M_A(x)| \leqslant G_{E,q}(x),$$

où

$$G_{E,q}(x) = 2^{q/2}(1+\sqrt{2})^q x^{1/2} u_E(x^{1/4}) + x^{1/4}\left(1 + \frac{\log x}{\log 2}\right)^q.$$

Notons que la fonction $G_{E,q}$ dépend de E et q, mais non de F.

4.1.4. Il est clair que, pour $1 \leqslant t \leqslant x$,

$$G_{E,q}(t) \leqslant 2^{q/2}(1+\sqrt{2})^q x^{1/2} + x^{1/4}\left(1 + \frac{\log x}{\log 2}\right)^q < +\infty.$$

On peut donc définir une fonction positive $\mathfrak{M}_{E,q}$ pour $x \geqslant 1$ par

$$\mathfrak{M}_{E,q}(x) = \operatorname{Min}[x, \sup_{1\leqslant t\leqslant x} G_{E,q}(t)].$$

Cette fonction dépend encore de E et q, mais non de F.

Comme on a $|M_A(x)| \leqslant x$, il est clair que l'on a pour $x \geqslant 1$

$$|M_A(x)| \leqslant \mathfrak{M}_{E,q}(x).$$

De plus, la fonction $\mathfrak{M}_{E,q}$ est évidemment non décroissante et, comme pour x infini $G_{E,q}(x) = o[x^{1/2}]$, on a aussi

$$\mathfrak{M}_{E,q}(x) = o[x^{1/2}],$$

de sorte que $\int_1^{+\infty} (\mathfrak{M}_{E,q}(t)/t^2)\,dt < +\infty$.

4.1.5. La somme $\sum\limits_{n\leqslant x} |\mu_A(n)|$ est le nombre des $n \leqslant x$ pour lesquels $\mu_A(n) \neq 0$. Chacun de ceux-ci est de la forme $p_1^{r_1} p_2^{r_2} \ldots p_k^{r_k} m^2$, où chaque r_j est 0 ou 1 et m est 1 ou un produit de nombres distincts de $E-F$.

On a par suite

$$\sum_{n\leqslant x} |\mu_A(n)| \leqslant \sum_{0\leqslant r_j\leqslant 1} \mathrm{E}\left[\sqrt{\frac{x}{p_1^{r_1} p_2^{r_2} \ldots p_k^{r_k}}}\right] \leqslant \sqrt{x} \sum_{0\leqslant r_j\leqslant 1} \frac{1}{\sqrt{p_1^{r_1} p_2^{r_2} \ldots p_k^{r_k}}}$$

$$\leqslant \sqrt{x} \prod_{j=1}^{k} \left[1 + \frac{1}{\sqrt{p_j}}\right] \leqslant \sqrt{x}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^q = x^{1/2} 2^{-q/2} (1+\sqrt{2})^q.$$

4.1.6. On voit maintenant que, d'après le lemme 3, on a pour $1 \leqslant u \leqslant x$

$$\left|N_{E,F}(x) - \delta_0(E)\, x \prod_{p\in F} \frac{1}{1+1/p}\right|$$

$$\leqslant 2^{-q/2}(1+\sqrt{2})^q u^{1/2} + \left(2\frac{x}{u} - 1\right)\mathfrak{M}_{E,q}(x) + x\int_x^{+\infty} \frac{\mathfrak{M}_{E,q}(t)}{t^2}\,dt$$

$$\leqslant 2^{-q/2}(1+\sqrt{2})^q u^{1/2} + 2\frac{x}{u}\,\mathfrak{M}_{E,q}(x) + x\int_x^{+\infty} \frac{\mathfrak{M}_{E,q}(t)}{t^2}\,dt.$$

En prenant $u = K_{E,q}^{-2/3} x^{2/3} \mathfrak{M}_{E,q}(x)^{2/3}$, où $K_{E,q} = \sup\limits_{t\geqslant 1} t^{-1/2}\mathfrak{M}_{E,q}(t)$, on voit que, pour $x \geqslant 1$,

$$\left|N_{E,F}(x) - \delta_0(E)\, x \prod_{p\in F} \frac{1}{1+1/p}\right| \leqslant \varphi_{E,q}(x),$$

où

$$\varphi_{E,q}(x) = [2K_{E,q}^{2/3} + 2^{-q/2}(1+\sqrt{2})^q K_{E,q}^{-1/3}]\, x^{1/3} \mathfrak{M}_{E,q}(x)^{1/3} + x\int_x^{+\infty} \frac{\mathfrak{M}_{E,q}(t)}{t^2}\,dt.$$

4.1.7. La fonction $\varphi_{E,q}$ dépend de E et q mais non de F.

Comme $\mathfrak{M}_{E,q}$ est non décroissante, le lemme 5 montre que $\varphi_{E,q}$ est non décroissante.

Enfin on a pour x infini

$$\varphi_{E,q}(x) = o[x^{1/2}]$$

parce que

$$\mathfrak{M}_{E,q}(x) = o[x^{1/2}].$$

5. Démonstration du théorème A pour $q > 0$.

5.1. Etant donné l'ensemble non vide E de nombres premiers et l'entier positif q, nous désignerons par $\mathscr{E}_q(E)$ l'ensemble des entiers de la forme

$$p_1^{1+\alpha_1}p_2^{1+\alpha_2}\dots p_r^{1+\alpha_r},$$

où $p_1, p_2, \dots, p_r$ sont des nombres premiers distincts appartenant à E et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r$ des entiers positifs dont la somme est q (r pouvant être quelconque $\leqslant q$).

Nous désignerons par $N_q(E, x)$ le nombre des nombres de $\mathscr{E}_q(E)$ au plus égaux à x.

Nous introduirons, d'autre part, les fonctions arithmétiques h et l définies par

$$h(n) = \prod_{p|n} p \quad \text{et} \quad l(n) = \prod_{p|n} \frac{1}{1+1/p}.$$

5.2. Ceci dit, fixons maintenant l'ensemble non vide E de nombres premiers et l'entier $q \geqslant 1$.

5.2.1. Pour tout $m \in \mathscr{E}_q(E)$, $h(m)$ est un produit de nombres premiers distincts appartenant à E et en nombre au plus égal à q.

Inversement, $p_1, p_2, \dots, p_r$ étant r nombres premiers distincts appartenant à E, avec $r \leqslant q$, il y a exactement $\binom{q-1}{r-1}$ nombres de $\mathscr{E}_q(E)$ pour lesquels $h(m) = p_1p_2\dots p_r$ [4].

Comme, pour tout $m \in \mathscr{E}_q(E)$, $h(m)^2 \leqslant m$, pour les m de $\mathscr{E}_q(E)$ au plus égaux à x, $h(m) \leqslant x^{1/2}$.

On voit donc que, pour chaque $r \geqslant 1$ et $\leqslant q$, le nombre des nombres de $\mathscr{E}_q(E)$ ayant r diviseurs premiers et au plus égaux à x est au plus égal à $\binom{q-1}{r-1}$ fois le nombre des entiers au plus égaux à $x^{1/2}$ qui sont

[4] $\binom{q-1}{r-1}$ est le nombre de solutions en entiers > 0 de l'equation $\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_r = q$.

des produits de r nombres premiers distincts, donc est

$$O\left[\frac{x^{1/2}(\log\log x)^{r-1}}{\log x}\right]$$

quand x tend vers $+\infty$.

On a par suite, quand x tend vers $+\infty$

$$N_q(E, x) = O\left[\frac{x^{1/2}(\log\log x)^{q-1}}{\log x}\right]. \tag{5}$$

On voit aussi que, pour chaque $r \geqslant 1$ et $\leqslant q$, la somme

$$\sum_{\substack{m\in\mathscr{E}_q(E)\\ \omega(m)=r;\ m\leqslant x}} \frac{1}{m^{1/2}}$$

est au plus égale à $\binom{q-1}{r-1}$ fois la somme des inverses des entiers au plus égaux à $x^{1/2}$ qui sont des produits de r nombres premiers distincts.

Par suite, quand x tend vers $+\infty$,

$$\sum_{\substack{m\in\mathscr{E}_q(E)\\ m\leqslant x}} \frac{1}{m^{1/2}} = O[(\log\log x)^q], \tag{6}$$

ce que l'on pourrait d'ailleurs déduire de (5).

Notons que (5) entraîne

$$\sum_{m\in\mathscr{E}_q(E)} \frac{1}{m} < +\infty, \quad \text{et par suite} \quad \sum_{m\in\mathscr{E}_q(E)} \frac{l(m)}{m} < +\infty.$$

En effet, si $m_1, m_2, \dots, m_j, \dots$ sont les nombres de $\mathscr{E}_q(E)$ rangés par ordre croissant, on a $N_q(E, m_r) = r$.

(5) entraîne donc que, pour r assez grand, $r < m_r^{1/2}$ et par suite $1/m_r < 1/r^2$.

5.2.2. On va voir maintenant que

$$\delta_q(E) = \delta_0(E) \sum_{m\in\mathscr{E}_q(E)} \frac{l(m)}{m}. \tag{7}$$

En effet, soient $p_1, p_2, \dots, p_j, \dots$ les nombres de E rangés par ordre croissant, et soit E_r l'ensemble des nombres $p_1, p_2, \dots, p_r$.

Pour chaque j, on a pour $|z| < p_1$

$$\frac{1-z/(p_j+1)}{1-z/p_j} = 1 + \frac{z}{(p_j+1)(p_j-z)} = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{p_j^{k+1}(1+1/p_j)}.$$

On en déduit aisément que, quel que soit $r \geqslant 1$, on a pour $|z| < p_1$

$$\prod_{j=1}^{r} \frac{1-z/(p_j+1)}{1-z/p_j} = 1+\sum_{k=1}^{+\infty} a_k(E, r) z^k,$$

où $\quad a_k(E, r) = \sum_{m \in \mathscr{E}_k(E_r)} \frac{l(m)}{m}$.

Quand r tend vers $+\infty$, comme $\prod_{j=1}^{r} \frac{1-z/(p_j+1)}{1-z/p_j}$ converge uniformément vers $\frac{1}{\delta_0(E)} F_E(z)$ sur tout ensemble compact contenu dans le cercle ouvert $|z| < p_1$, $a_q(E, r)$ tend vers $\delta_q(E)/\delta_0(E)$.

Mais $a_q(E, r)$ tend vers $\sum_{m \in \mathscr{E}_q(E)} \frac{l(m)}{m}$ car on a évidemment pour tout $r \geqslant 1$

$$\sum_{\substack{m \in \mathscr{E}_q(E) \\ m \leqslant p_r}} \frac{l(m)}{m} \leqslant a_q(E, r) \leqslant \sum_{m \in \mathscr{E}_q(E)} \frac{l(m)}{m}.$$

5.2.3. Remarquons maintenant que l'entier positif n satisfait à

$$\Omega_E(n) - \omega_E(n) = q$$

si, et seulement si, il est le produit d'un nombre m de $\mathscr{E}_q(E)$ par un entier qui n'est divisible par aucun diviseur premier de m et par le carré d'aucun autre nombre de E. m est d'ailleurs bien déterminé quand n est donné.

On voit que le nombre des n au plus égaux à x qui satisfont à $\Omega_E(n) - \omega_E(n) = q$ et pour lesquels m est un nombré donné de $\mathscr{E}_q(E)$ est égal, avec les notations du théorème préparatoire, à

$$N_{E,F_m}(x/m),$$

où F_m est l'ensemble des diviseurs premiers de m.

On a donc

$$\nu_q(x, E) = \sum_{\substack{m \in \mathscr{E}_q(E) \\ m \leqslant x}} N_{E,F_m}(x/m).$$

Par suite, compte tenu de (7), on a

$$\nu_q(x, E) - \delta_q(E) x$$
$$= \sum_{\substack{m \in \mathscr{E}_q(E) \\ m \leqslant x}} \left[N_{E,F_m}\left(\frac{x}{m}\right) - \delta_0(E) \frac{x}{m} l(m)\right] - x\delta_0(E) \sum_{\substack{m \in \mathscr{E}_q(E) \\ m > x}} \frac{l(m)}{m}.$$

Comme, d'après le théorème préparatoire, pour chaque m appartenant à $\mathscr{E}_q(E)$ et $\leqslant x$,

$$\left|N_{E,F_m}\left(\frac{x}{m}\right) - \delta_0(E) \frac{x}{m} l(m)\right| \leqslant \varphi_{E,q}\left(\frac{x}{m}\right),$$

on voit finalement que

$$(8) \qquad |\nu_q(x, E) - \delta_q(E) x| \leqslant \sum_{\substack{m \in \mathscr{E}_q(E) \\ m \leqslant x}} \varphi_{E,q}\left(\frac{x}{m}\right) + x\delta_0(E) \sum_{\substack{m \in \mathscr{E}_q(E) \\ m > x}} \frac{1}{m}.$$

5.2.4. La conclusion du théorème résulte de ce que l'on a pour x infini

$$(9) \qquad \sum_{\substack{m \in \mathscr{E}_q(E) \\ m > x}} \frac{1}{m} = O\left[\frac{x^{-1/2} (\log\log x)^{q-1}}{\log x}\right],$$

$$(10) \qquad \sum_{\substack{m \in \mathscr{E}_q(E) \\ m \leqslant x}} \varphi_{E,q}\left(\frac{x}{m}\right) = o\,[x^{1/2} (\log\log x)^q].$$

(9) résulte immédiatement de (5) et de la formule

$$\sum_{\substack{m \in \mathscr{E}_q(E) \\ m > x}} \frac{1}{m} = -\frac{N_q(E, x)}{x} + \int_x^{+\infty} \frac{N_q(E, t)}{t^2}\, dt,$$

que l'on peut établir de la même manière que (3) dans la démonstration du lemme 3.

Pour établir (10), remarquons que, d'une part, il existe $H > 0$ tel que

$$\varphi_{E,q}(x) \leqslant H x^{1/2} \quad \text{pour tout } x \geqslant 1,$$

d'autre part, à tout $\varepsilon > 0$ correspond un $x_0 \geqslant 1$ tel que

$$\varphi_{E,q}(x) \leqslant \varepsilon x^{1/2} \quad \text{pour} \quad x \geqslant x_0.$$

Alors, pour $x \geqslant x_0$, on peut écrire

$$\sum_{\substack{m \in \mathscr{E}_q(E) \\ m \leqslant x}} \varphi_{E,q}\left(\frac{x}{m}\right) = \sum_{\substack{m \in \mathscr{E}_q(E) \\ m \leqslant x/x_0}} \varphi_{E,q}\left(\frac{x}{m}\right) + \sum_{\substack{m \in \mathscr{E}_q(E) \\ x/x_0 < m \leqslant x}} \varphi_{E,q}\left(\frac{x}{m}\right)$$
$$\leqslant \varepsilon \sum_{\substack{m \in \mathscr{E}_q(E) \\ m \leqslant x/x_0}} \left(\frac{x}{m}\right)^{1/2} + H \sum_{\substack{m \in \mathscr{E}_q(E) \\ x/x_0 < m \leqslant x}} \left(\frac{x}{m}\right)^{1/2}$$
$$\leqslant \varepsilon x^{1/2} \sum_{\substack{m \in \mathscr{E}_q(E) \\ m \leqslant x}} \frac{1}{m^{1/2}} + H x_0^{1/2} N_q(E, x).$$

Compte tenu de (5), ceci donne

$$\varlimsup_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{1/2}(\log\log x)^q} \sum_{\substack{m\in\mathcal{E}_q(E)\\ m\leqslant x}} \varphi_{E,q}\left(\frac{x}{m}\right) \leqslant \varepsilon \varlimsup_{x\to+\infty} \frac{1}{(\log\log x)^q} \sum_{\substack{m\in\mathcal{E}_q(E)\\ m\leqslant x}} \frac{1}{m^{1/2}}.$$

(6) montre que le second membre est fini et tend vers zéro avec ε, d'où le résultat désiré.

6. Démonstration du théorème B. Compte tenu de (8) et (9), on voit que, pour établir le théorème B, il suffit de montrer que, pour tout $q \geqslant 1$, on a quand x tend vers $+\infty$

$$\sum_{\substack{m\in\mathcal{E}_q(P)\\ m\leqslant x}} \varphi_{P,q}\left(\frac{x}{m}\right) = O\left[\frac{x^{1/2}(\log\log x)^{q-1}}{\log x}\right].$$

6.1. En reprenant la démonstration du théorème préparatoire et tenant compte de ce que

$$M_P(x) = \sum_{n\leqslant x} \mu(n) = O[xe^{-\alpha\sqrt{\log x}}],$$

avec $\alpha > 0$, on voit successivement que

$$u_p(x) = O[e^{-\alpha\sqrt{\log x}}],$$
$$G_{P,q}(x) = O[x^{1/2}e^{-(\alpha/2)\sqrt{\log x}}],$$
$$\mathfrak{M}_{P,q}(x) = O[x^{1/2}e^{-(\alpha/2)\sqrt{\log x}}],$$
$$\varphi_{P,q}(x) = O[x^{1/2}e^{-(\alpha/6)\sqrt{\log x}}].$$

Finalement on voit qu'il existe $K_q > 0$ tel que, pour $x \geqslant 1$,

$$\varphi_{P,q}(x) \leqslant K_q x^{1/2} e^{-\beta\sqrt{\log x}}, \qquad \text{avec} \qquad \beta = \tfrac{1}{6}\alpha > 0.$$

On est donc ramené à démontrer que

$$\sum_{\substack{m\in\mathcal{E}_q(P)\\ m\leqslant x}} \left(\frac{x}{m}\right)^{1/2} \exp\left[-\beta\sqrt{\log\frac{x}{m}}\right] = O\left[\frac{x^{1/2}(\log\log x)^{q-1}}{\log x}\right].$$

C'est ce que nous allons faire en partant du fait que, d'après (5), il existe $H_q > 0$ tel que, pour $x \geqslant 4$,

$$N_q(P, x) \leqslant H_q \frac{x^{1/2}(\log\log x)^{q-1}}{\log x}. \tag{11}$$

Nous remarquerons, par ailleurs, que tout nombre de $\mathcal{E}_q(P)$ est au moins égal à 2^{q+1}, donc à 4.

6.2. Supposons $x > 4^{4/3}$, de sorte que $\sqrt{\log\frac{1}{4}x} > \frac{1}{2}\sqrt{\log x}$.

Pour chaque m appartenant à $\mathcal{E}_q(P)$ (donc $\geqslant 4$) et au plus égal à x on a

$$\left(\frac{x}{m}\right)^{1/2} \exp\left[-\beta\sqrt{\log\frac{x}{m}}\right] = 1 + \int_0^{\sqrt{\log\frac{x}{m}}} e^{t^2/2-\beta t}(t-\beta)\,dt$$
$$= 1 + \int_0^{\sqrt{\log\frac{x}{4}}} e^{t^2/2-\beta t}(t-\beta)\,\delta\left[\sqrt{\log\frac{x}{m}} - t\right]dt,$$

où δ est la même fonction qu'au § 2.3.2.

Par addition on obtient

$$\sum_{\substack{m\in\mathcal{E}_q(P)\\ m\leqslant x}} \left(\frac{x}{m}\right)^{1/2} \exp\left[-\beta\sqrt{\log\frac{x}{m}}\right]$$
$$= N_q(P, x) + \int_0^{\sqrt{\log\frac{1}{4}x}} e^{t^2/2-\beta t}(t-\beta) N_q(P, xe^{-t^2})\,dt$$
$$\leqslant H_q \frac{x^{1/2}(\log\log x)^{q-1}}{\log x} + \int_0^{\sqrt{\log\frac{1}{4}x}} e^{t^2/2-\beta t}(t+\beta) N_q(P, xe^{-t^2})\,dt,$$

d'après (11).

Mais (11) montre également que, pour $0 \leqslant t \leqslant \sqrt{\log\frac{1}{4}x}$,

$$N_q(P, xe^{-t^2}) \leqslant H_q x^{1/2} e^{-t^2/2} \frac{[\log\log(xe^{-t^2})]^{q-1}}{\log x - t^2}$$
$$\leqslant H_q \frac{x^{1/2}(\log\log x)^{q-1}}{\log x} \cdot \frac{e^{-t^2/2}}{1-t^2/\log x}.$$

On a par suite

$$\int_0^{\sqrt{\log\frac{1}{4}x}} e^{t^2/2-\beta t}(t+\beta) N_q(P, xe^{-t^2})\,dt \leqslant H_q \frac{x^{1/2}(\log\log x)^{q-1}}{\log x} \int_0^{\sqrt{\log\frac{1}{4}x}} \frac{e^{-\beta t}(t+\beta)}{1-t^2/\log x}\,dt.$$

On voit donc que, pour achever la démonstration, il suffit de montrer que l'intégrale

$$\int_0^{\sqrt{\log\frac{1}{4}x}} \frac{e^{-\beta t}(t+\beta)}{1-t^2/\log x}\,dt$$

est au plus égale à un nombre fixe.

Comme, pour $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{\log x}$, $1-t^2/\log x \geqslant \frac{3}{4}$, on a

$$\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{\log x}} \frac{e^{-\beta t}(t+\beta)}{1-t^2/\log x}\,dt \leqslant \frac{4}{3}\int_0^{\frac{1}{2}\sqrt{\log x}} e^{-\beta t}(t+\beta)\,dt \leqslant \frac{4}{3}\int_0^{+\infty} e^{-\beta t}(t+\beta)\,dt = \frac{4}{3}\left(1+\frac{1}{\beta^2}\right).$$

Par ailleurs, pour $\frac{1}{2}\sqrt{\log x} \leqslant t \leqslant \sqrt{\log\frac{1}{4}x}$,

$$1-\frac{t^2}{\log x} \geqslant \frac{\log 4}{\log x}.$$

Par suite

$$\int_{\frac{1}{2}\sqrt{\log x}}^{\sqrt{\log\frac{1}{4}x}} \frac{e^{-\beta t}(t+\beta)}{1-t^2/\log x}\,dt \leqslant \frac{\log x}{\log 4}\int_{\frac{1}{2}\sqrt{\log x}}^{\sqrt{\log\frac{1}{4}x}} e^{-\beta t}(t+\beta)\,dt$$

$$\leqslant \frac{\log x}{\log 4}\int_{\frac{1}{2}\sqrt{\log x}}^{+\infty} e^{-\beta t}(t+\beta)\,dt = \frac{\log x}{\log 4}\left(\frac{1}{2\beta}\sqrt{\log x}+1+\frac{1}{\beta^2}\right)e^{-(\beta/2)\sqrt{\log x}}.$$

En définitive, on a

$$\int_0^{\sqrt{\log\frac{1}{4}x}} \frac{e^{-\beta t}(t+\beta)}{1-t^2/\log x}\,dt \leqslant \frac{4}{3}\left(1+\frac{1}{\beta^2}\right)+\frac{\log x}{\log 4}\left(\frac{1}{2\beta}\sqrt{\log x}+1+\frac{1}{\beta^2}\right)e^{-(\beta/2)\sqrt{\log x}},$$

d'où le résultat désiré.

Reçu par la Rédaction le 28. 2. 1967