ACTA ARITHMETICA
XIII (1967)

Über das Produkt inhomogener Linearformen

von

PETER GRUBER (Wien)

Herrn Prof. E. Hlawka
zum 50. Geburtstag gewidmet

Einleitung. Sind

$$(1)\qquad \begin{aligned} L_1 &= a_{11}u_1+\ldots+a_{1n}u_n,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ L_n &= a_{n1}u_1+\ldots+a_{nn}u_n, \end{aligned}$$

n reelle, homogene Linearformen, ist $d > 0$ der Absolutbetrag der Determinante und sind $c_1, \ldots, c_n$ n beliebige reelle Zahlen, dann besagt eine Vermutung von Minkowski, daß es ganzzahlige Werte der Variablen gibt, so daß gilt

$$\prod_{k=1}^{n} |L_k+c_k| \leqslant d\,2^{-n}.$$

Dabei ist das Gleichheitszeichen nur in einem bestimmten Fall erforderlich. Für $n = 2$ bewies Minkowski den Satz selbst. Darüberhinaus wurden bisher nur die Fälle $n = 3$ und $n = 4$ bewiesen. Für allgemeines n kann man sich der Vermutung auf mehrere Arten nähern (vgl. Cassels [59]).

Im ersten Teil dieser Arbeit folgen wir einem neuen, von Bombieri [62], [63] eingeschlagenen Weg. Sei im folgenden h stets eine natürliche Zahl. Bombieri zeigt, daß man bei passender Wahl von h aus einem hinreichend großen Intervall

$$\prod |L_k+hc_k|$$

durch ganzzahlige Werte der Variablen kleiner als eine beliebig vorgegebene positive Größe machen kann. Wir werden einige Verschärfungen seiner Ergebnisse angeben.

In der Menge aller Systeme von Linearformen der Form (1) kann man ein Maß einführen. Im zweiten Abschnitt werden wir zeigen, daß für $n = 2$ nach Ausschluß einer Menge vom Maß 0 die Konstante $\frac{1}{4}$ durch

$\frac{1}{8}$ ersetzt werden kann. Dabei sollen auch unsymmetrische Ungleichungen betrachtet werden. Ein weiterer metrischer Satz bezieht sich auf den Fall $n = 5$.

Im letzten Abschnitt formulieren wir die Vermutung für Punktgitter und zeigen, daß für hinreichend hohe Dimensionen nach Ausschluß einer Gittermenge, deren Siegelsches Maß kleiner als $e^{-0,279n}$ ist, die Konstante 2^{-n} größenordnungsmäßig durch e^{-n} ersetzt werden kann.

Sind S und T zwei Teilmengen des R^n, dann ist $S+T$ die Menge aller $\mathfrak{x}+\mathfrak{y}$ mit $\mathfrak{x}\in S$, $\mathfrak{y}\in T$. Ist t reell, dann ist tS die Menge aller $t\mathfrak{x}$ mit $\mathfrak{x}\in S$.

1. Bemerkungen zu zwei Sätzen von Bombieri. Wir betrachten zunächst nur Systeme von Linearformen mit $d = 1$. Von Bombieri stammen folgende Resultate: Ist $0 < c < 1$ fest gewählt, dann gibt es für ein passendes

$$h \leqslant [c^{-2}]+1 \quad \text{bzw.} \leqslant c^{-2} \text{ falls } c^{-2} \text{ ganz}$$

zu jedem $\varepsilon > 0$ ganzzahlige Werte der Variablen, so daß gilt

$$\prod |L_k + hc_k| < c+\varepsilon. \tag{1}$$

Ferner gibt es ein $h \leqslant 2^{(n+1)/2}$, so daß für jedes $\varepsilon > 0$ die Ungleichung

$$\prod |L_k + hc_k| < \frac{1}{2^n} + \varepsilon$$

durch ganzzahlige Wahl der Variablen erfüllt werden kann. Nach einem bekannten Satz von Tschebotareff [34] kann man die Ungleichung (1) für $c > 2^{-n/2}$ schon für $h = 1$ durch geeignete Wahl ganzzahliger Werte der Variablen erfüllen.

Satz 1. *Ist c mit $0 < c \leqslant 2^{-n/2}d$ gewählt, dann gibt es ein*

$$h \leqslant 2^{(1-n)/2}c^{-1}d, \tag{2}$$

so, daß für passende ganzzahlige Wahl der Variablen gilt:

$$\prod |L_k + hc_k| < c.$$

Ist $c < n\cdot n!^{-2}\cdot 2^{-n(n+3)/2}d$, dann kann man diese Ungleichung schon für ein

$$h \leqslant 2^{1-n}c^{-1}d \tag{3}$$

durch ganzzahlige Werte der Variablen erfüllen.

Es ist möglich, bei Beschränkung von c auf noch kleinere Intervalle, die Konstante 2^{1-n} in (3) durch kleinere zu ersetzen.

Im Beweis dieses Satzes verwenden wir eine Methode von Woods [58] und folgenden einfachen

Hilfssatz 1. *Liegt der konvexe, symmetrische Körper S vom Volumen V zwischen den beiden parallelen Stützebenen E_0 und E_1 und ist für $\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant 1$ $E_a = (1-a)E_0 + aE_1$, dann gilt für das Volumen $V(S)$ des zwischen den Ebenen E_0 und E_a gelegenen Teils S' von S*

$$V(S') \geqslant aV. \tag{4}$$

Beweis. Aus dem Satz von Brunn (vgl. Hadwiger [57], S. 177, Nr. 13) ergibt sich folgendes: Ist für $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ $v(\lambda)$ das $(n-1)$-dimensionale Volumen von $E_\lambda \cap S$, dann ist $v(\lambda)^{1/(n-1)}$ konkav in λ. Da S symmetrisch ist, folgt daß $v(\lambda)$ seinen Maximalwert für $\lambda = \frac{1}{2}$ annimmt und für $\frac{1}{2} \leqslant \lambda \leqslant 1$ monoton fällt. Es ist

$$\int_0^a \big(v(\lambda) - V\big)\,d\lambda = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad a = \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{für} \quad a = 1; \end{cases} \tag{5}$$
$$\frac{d}{da}\int_0^a \big(v(\lambda) - V\big)\,d\lambda = v(a) - V$$

monoton fallend in $\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant 1$. Deshalb ist $\int_0^a \big(v(\lambda) - V\big)\,d\lambda$ konkav für $\frac{1}{2} \leqslant a \leqslant 1$ und daher wegen (5) nicht negativ. Daraus folgt (4):

$$V(S') = \int_0^a v(\lambda)\,d\lambda = \int_0^a v(\lambda)\,d\lambda + aV - aV = \int_0^a \big(v(\lambda) - V\big)\,d\lambda + aV \geqslant aV.$$

Beweis des Satzes 1. O.B.d.A. sei $d = 1$. Sei für $h = 1, 2, \ldots$

$$m_h = \inf \prod |L_k + hc_k|, \tag{6}$$

erstreckt über alle ganzzahligen $(u_1, \ldots, u_n)$. Wegen $c \leqslant 2^{-n/2}$ ist $1 < 2^{(1-n)/2}c^{-1}$. Für $m_1 = 0$ gilt daher der Satz nach (6) mit $h = 1$. Sei nun $m_1 > 0$. Um den Satz zu beweisen, genügt es zu zeigen, daß für ein h welches (2) erfüllt $m_h < c$ ist. Nach (6) gibt es eine Folge von ganzzahligen n-Tupeln $(u_{1r}, \ldots, u_{nr}) = \mathfrak{u}_r$, so daß gilt:

$$\prod |L_k(\mathfrak{u}_r) + c_k| = \frac{m_1}{1-\varepsilon_r} \quad \text{mit} \quad 0 \leqslant \varepsilon_r < 1,\ \varepsilon_r \to 0 \quad \text{bei} \quad r \to \infty. \tag{7}$$

Nach der Definition (6) von m_h gilt für jedes h und alle ganzzahligen n-Tupel $(u_1, \ldots, u_n) = \mathfrak{u}$ wegen (7)

$$\prod \left|\frac{L_k(\mathfrak{u}) + hc_k}{L_k(\mathfrak{u}_r) + c_k}\right| \geqslant \frac{m_h}{m_1}(1-\varepsilon_r).$$

Da mit $\mathfrak{u}$ auch $\mathfrak{u}+h\mathfrak{u}_r$ alle ganzzahligen n-Tupel durchläuft, folgt

$$\prod \left| \frac{L_k(\mathfrak{u}+h\mathfrak{u}_r)+hc_k}{L_k(\mathfrak{u}_r)+c_k} \right| \geqslant \frac{m_h}{m_1}(1-\varepsilon_r),$$

oder

$$\prod \left| L_k(\mathfrak{u}) \frac{1}{L_k(\mathfrak{u}_r)+c_k} + h \right| \geqslant \frac{m_h}{m_1}(1-\varepsilon_r) \tag{8}$$

für alle ganzzahligen $\mathfrak{u}$ und jedes h. Sei Λ_r das, den Linearformen

$$L_1 \frac{1}{L_1(\mathfrak{u}_r)+c_1}$$
$$\cdots\cdots$$
$$L_n \frac{1}{L_n(\mathfrak{u}_r)+c_n}$$

entsprechende Gitter. Da $L_1, \ldots, L_n$ die Determinante 1 haben, erhält man aus (7) für die Determinante $d(\Lambda_r)$ von Λ_r:

$$d(\Lambda_r) = \prod \left| \frac{1}{L_k(\mathfrak{u}_r)+c_k} \right| = \frac{1-\varepsilon_r}{m_1}. \tag{9}$$

Da Λ_r bezüglich $\mathfrak{o}$ symmetrisch ist, folgt aus (8), daß Λ_r für jeden der Bereiche

$$\prod |x_k+h| < \frac{m_h}{m_1}(1-\varepsilon_r), \quad \prod |x_k-h| < \frac{m_h}{m_1}(1-\varepsilon_r), \quad h = 1, 2, \ldots \tag{10}$$

zulässig ist. Insbesondere ist Λ_r zulässig für

$$\prod |x_k+1| < 1-\varepsilon_r \quad \text{und} \quad \prod |x_k-1| < 1-\varepsilon_r.$$

Da $\varepsilon_r \to 0$ bei $r \to \infty$, enthält Λ_r für alle hinreichend großen r keinen von $\mathfrak{o}$ verschiedenen Punkt im Würfel

$$|x_k| < \left(1+(1-\varepsilon_r)^2\right)^{1/2}, \quad k = 1, \ldots, n$$

(siehe Woods [58], Seite 632) und damit jedenfalls keinen von $\mathfrak{o}$ verschiedenen Punkt im Würfel $|x_k| < 1$, $k = 1, \ldots, n$. Da die Determinanten der Gitter Λ_r nach (9) nach oben beschränkt sind, so gibt es nach dem Auswahlsatz von Mahler eine konvergente Teilfolge der Λ_r, die gegen ein Gitter Λ strebt. Nach (9) gilt

$$d(\Lambda) = \frac{1}{m_1} \tag{11}$$

und man zeigt genauso wie Woods, daß Λ für jeden der Bereiche

$$\prod |x_k+h| < \frac{m_h}{m_1}, \quad \prod |x_k-h| < \frac{m_h}{m_1}, \quad h = 1, 2, \ldots \tag{12}$$

zulässig ist.

Wir führen nun den Beweis indirekt. Sei für alle $h \leqslant 2^{(1-n)/2}c^{-1}$ $m_h \geqslant c$. Dann ist Λ jedenfalls für folgende Bereiche zulässig.

$$\prod |x_k+1| < 1, \quad \prod |x_k-1| < 1, \tag{13a}$$

$$\prod |x_k+h| < \frac{c}{m_1}, \quad \prod |x_k-h| < \frac{c}{m_1}, \quad 2 \leqslant h \leqslant 2^{(1-n)/2}c^{-1}, \tag{13b}$$

denn diese Bereiche sind Teilbereiche der in (12) angegebenen Bereiche. Sei K durch die folgenden Ungleichungen definiert:

$$|x_k| < \frac{c^{1/n}}{m_1^{1/n}\sqrt{2}}, \quad k = 1, \ldots, n, \tag{14a}$$

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k| < \frac{c^{1/n}}{m_1^{1/n}} \cdot \frac{n}{2}. \tag{14b}$$

Wegen $m_1 \geqslant c$ ist

$$2\frac{c^{1/n}}{m_1^{1/n}\sqrt{2}} \leqslant \sqrt{2}.$$

$2K$ liegt daher im Würfel $|x_k| < \sqrt{2}$, $k = 1, \ldots, n$. Dieser Würfel und damit $2K$ liegt aber — abgesehen von $\mathfrak{o}$ — in der Vereinigungsmenge der beiden in (13a) angegebenen Bereiche (siehe Woods [58], Seite 633), für die Λ zulässig ist. Daher ist Λ $2K$-zulässig. Nach (14b) liegt $2K$ im Bereich

$$\sum |x_k| < \frac{c^{1/n}}{m_1^{1/n}} n$$

und daher nach der Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel im Bereich

$$\prod |x_k| < \frac{c}{m_1}. \tag{15}$$

Sei $N = [2^{(1-n)/2}c^{-1}]$, dann ist

$$N+1 > 2^{(1-n)/2}c^{-1}. \tag{16}$$

Sei $\mathfrak{e} = (1, \ldots, 1)$ und

$$B = K \cup (K+\mathfrak{e}) \cup \ldots \cup (K+N\mathfrak{e}). \tag{17}$$

Angenommen, es gäbe zwei voneinander verschiedene Punkte $\mathfrak{y}, \mathfrak{z} \in B$ mit $\mathfrak{z}-\mathfrak{y} \in \Lambda$, dann ist $\mathfrak{y} \in K+l\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{z} \in K+m\mathfrak{e}$ für passende l, m mit $0 \leqslant l, m \leqslant N$. Ist $l = m$, dann ist $\mathfrak{z}-\mathfrak{y} \in 2K$, im Widerspruch dazu, daß Λ $2K$-zulässig ist. Ist $l \neq m$, dann gilt $\mathfrak{z}-\mathfrak{y} \in 2K+(m-l)\mathfrak{e}$ mit $|m-l| \leqslant N$, im Widerspruch dazu, daß $2K+(m-l)\mathfrak{e}$ nach den bei (15) gemachten Bemerkungen im Bereich

$$\prod |x_k-(m-l)| < \frac{c}{m_1}$$

liegt und Λ für den Bereich, der mit einem der in (13) angegebenen Bereiche übereinstimmt oder — im Fall $m-l = \pm 1$ — in einem dieser Bereiche enthalten ist, zulässig ist. B enthält daher keine zwei, voneinander verschiedenen Punkte, deren Differenz in Λ liegt. Daraus folgt nach dem Satz von Blichfeldt

$$d(\Lambda) \geqslant V(B). \tag{18}$$

Wegen $m_1 \geqslant c$ gilt nach (14b) $l\mathfrak{e} \notin 2K, l = 1, 2, \ldots$ Da K konvex und symmetrisch ist folgt $(K+l\mathfrak{e}) \cap (K+m\mathfrak{e}) = \emptyset$ für $l \neq m$. Daraus ergibt sich nach (17)

$$V(B) = (N+1)V(K). \tag{19}$$

Der Würfel S:

$$0 \leqslant x_k < \frac{c^{1/n}}{m_1^{1/n}\sqrt{2}}, \quad k = 1, \ldots, n \tag{20}$$

hat die Ebenen

$$E_0\colon \sum x_k = 0, \qquad E_1\colon \sum x_k = \frac{c^{1/n}}{m_1^{1/n}\sqrt{2}}\, n$$

als parallele Stützebenen. Sei S' der Teil des Würfels S der zwischen E_0 und

$$E_{1/\sqrt{2}}\colon \sum x_k = \frac{c^{1/n}}{m_1^{1/n}} \cdot \frac{n}{2}$$

gelegen ist. Aus dem Hilfssatz 1 folgt

$$V(S') \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{c^{1/n}}{m_1^{1/n}\sqrt{2}}\right)^n = \frac{c}{m_1} 2^{-(n+1)/2}.$$

S' ist nach (14b) der im ersten Oktanten gelegene Teil von K. Daher ist

$$V(K) = 2^n V(S') \geqslant 2^{(n-1)/2} \frac{c}{m_1}. \tag{21}$$

Aus (19), (16) und (21) erhält man

$$V(B) > \frac{1}{m_1}.$$

Nach (18) ist dann $d(\Lambda) > 1/m_1$, im Widerspruch zu (11). Es muß also für ein $h \leqslant 2^{(1-n)/2}c^{-1}$ $m_h < c$ sein. Damit ist der erste Teil bewiesen.

Beim Beweis des zweiten Teiles benützen wir den folgenden Satz von Hlawka [50]: Es seien im R^n n linear unabhängige Vektoren $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ und eine positive Zahl V vorgegeben. Dann gibt es stets ein Parallelepiped P mit dem Volumen V, mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung $\mathfrak{o}$, dessen Seitenflächen die Normalenrichtungen $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ haben, so daß die Anzahl der verschiedenen Gitterpunktpaare $\pm\mathfrak{q} \neq \mathfrak{o}$, welche in P liegen höchstens $A_n V$ ist, wo

$$A_n = \frac{1}{n}(n!)^2 2^{(n(n-1))/2}$$

ist. Ein Gitterpunkt ist hier ein Punkt mit ganzzahligen Koordinaten, also ein Punkt des Fundamentalgitters Λ_0.

Sei Λ ein beliebiges Gitter mit $d(\Lambda) = 1$ und seien $E_1, \ldots, E_n$ die n Koordinatenebenen. Es gibt eine Transformation τ mit $\det\tau = 1$, so daß $\Lambda = \tau^{-1}\Lambda_0$ ist. Seien $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ Normalvektoren der Ebenen $\tau E_1, \ldots, \tau E_n$. Sei $V = 2^{2n}c$. Nach der im Satz 1 angegebenen Schranke für c ist

$$V < \frac{n}{(n!)^2} 2^{(-n(n-1))/2}$$

und damit $A_n V < 1$. Es gibt also ein Parallelepiped P vom Volumen V und $\mathfrak{o}$ als Mittelpunkt, dessen Seitenflächen die Normalenrichtungen $\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_n$ haben, also parallel zu $\tau E_1, \ldots, \tau E_n$ sind und in dem Λ_0 nur $\mathfrak{o}$ enthält. Wendet man τ^{-1} an, so ergibt sich: In dem, bezüglich $\mathfrak{o}$ symmetrischen Parallelepiped $\tau^{-1}P$ mit zu $E_1, \ldots, E_n$ parallelen Seitenflächen, ist kein von $\mathfrak{o}$ verschiedener Punkt von Λ enthalten. $\tau^{-1}P$ hat die Form $|x_k| < l_k$, $k = 1, \ldots, n$ für passende Zahlen $l_1, \ldots, l_n$ mit $2^n l_1 \ldots l_n = V = 2^{2n}c$. Durch eine geeignete Transformation σ von Diagonalgestalt mit $\det\sigma = 1$, kann man $\tau^{-1}P$ in den Würfel $|x_k| < 2c^{1/n}$, $k = 1, \ldots, n$ überführen und $\sigma\Lambda$ ist für den Würfel zulässig.

Nun zum Beweis des zweiten Teils. Sei Λ das, durch die Linearformen $L_1, \ldots, L_n$ erzeugte Gitter. Es ist $d(\Lambda) = 1$. Daher gibt es eine Diagonaltransformation

$$\sigma = \begin{pmatrix} s_1 & & \\ & \ddots & \\ & & s_n \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \det\sigma = s_1 \ldots s_n = 1,$$

so daß $\sigma\Lambda$ für

(22) $$|x_k| < 2c^{1/n}, \quad k = 1, \dots, n$$

zulässig ist. $\sigma\Lambda$ wird durch die Linearformen $s_1 L_1, \dots, s_n L_n$ erzeugt. $2K'$ sei der Bereich

(23a) $$|x_k| < 2c^{1/n}, \quad k = 1, \dots, n,$$

(23b) $$\sum |x_k| < 2c^{1/n}\frac{n}{2} = c^{1/n} n.$$

Eine analoge Volumsbestimmung wie bei K — wir wenden den Hilfssatz mit $a = 1/2$ an — ergibt

(24) $$V(K') \geqslant 2^{n-1} c.$$

Da $\sigma\Lambda$ für den Bereich aus (22) zulässig ist, ist $\sigma\Lambda$ erst recht $2K'$-zulässig. Wir betrachten die Konstanten $c_1, \dots, c_n$. Sei $\mathfrak{c} = (s_1 c_1, \dots, s_n c_n)$. Ist $\mathfrak{c} \in 2K'$, dann gilt nach (23b) $\sum |s_k c_k| < c^{1/n} n$ und daher

$$\prod |c_k| = \prod |s_k c_k| \leqslant \left(\frac{\sum |s_k c_k|}{n}\right)^n < c.$$

Also ist für $\mathfrak{u} = (0, \dots, 0)$

$$\prod |L_k(\mathfrak{u}) + c_k| = \prod |c_k| < c.$$

In diesem Fall gilt also der Satz mit $h = 1$. Sei nun $\mathfrak{c} \notin 2K'$ und sei $N = [2^{1-n} c^{-1}]$. Dann ist

(25) $$N + 1 > 2^{1-n} c^{-1}.$$

Außerdem ist wegen der Konvexität und der Symmetrie von K' da $\mathfrak{c} \notin 2K'$ für ganze Zahlen l, m

(26) $$(K' + l\mathfrak{c}) \cap (K' + m\mathfrak{c}) = \emptyset \quad \text{für} \quad l \neq m.$$

Es sei

$$B' = K' \cup (K' + \mathfrak{c}) \cup \dots \cup (K' + N\mathfrak{c}).$$

Dann ist nach (26) $V(B') = (N+1) V(K')$ und daher wegen (24) und (25) größer als 1. Nach dem Satz von Blichfeldt enthält B' zwei, voneinander verschiedene Punkte $\mathfrak{y}, \mathfrak{z}$, deren Differenz in $\sigma\Lambda$ liegt. Sei $\mathfrak{y} \in K' + l\mathfrak{c}$, $\mathfrak{z} \in K' + m\mathfrak{c}$ und etwa $l \leqslant m$. Der Fall $l = m$ ist ausgeschlossen, da sonst $\mathfrak{z} - \mathfrak{y} \in 2K'$ — im Widerspruch dazu, daß $\sigma\Lambda$ $2K'$-zulässig ist. Sei also $l < m$. Dann ist $\mathfrak{z} - \mathfrak{y} \in 2K' + (m-l)\mathfrak{c}$. Wegen $0 \leqslant l < m$ ist $1 \leqslant m - l \leqslant N$.

Es ist

(27) $$\mathfrak{z} - \mathfrak{y} - (m-l)\mathfrak{c} \in 2K'.$$

Da $\mathfrak{z} - \mathfrak{y} \in \sigma\Lambda$, gibt es ein ganzzahliges n-Tupel $\mathfrak{u}$, so daß $\mathfrak{z} - \mathfrak{y} = \big(-s_1 L_1(\mathfrak{u}), \dots, -s_n L_n(\mathfrak{u})\big)$ ist. Dann ist nach (27), (23b) und der Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel

$$\prod |L_k(\mathfrak{u}) + (m-l) c_k| = \prod |s_k L_k(\mathfrak{u}) + (m-l) s_k c_k|$$
$$\leqslant \left(\frac{\sum |-s_k L_k(\mathfrak{u}) - (m-l) s_k c_k|}{n}\right)^n < c.$$

Die Behauptung gilt also mit $h = m - l$. Damit ist auch der zweite Teil des Satzes bewiesen.

2. Metrische Sätze für $n = 2$ und $n = 5$. Ordnet man die Elemente einer reellen $n \times n$ Matrix $\tau = (t_{ik})$ lexikographisch, dann kann τ als Punkt im R^{n^2} aufgefaßt werden. In der Menge aller reellen $n \times n$ Matrizen führen wir ein Maß durch das Lebesguesche Maß im R^{n^2} und eine Topologie durch die Normdefinition

(1) $$\|\tau\| = \left(\sum t_{ik}^2\right)^{1/2}$$

ein. Die singulären Matrizen, die eine abgeschlossene Nullmenge bilden, sollen im folgenden ausgeschlossen sein. Jedem System von der in Einleitung (1) angegebenen Form werde die Matrix $\tau = (a_{ik})$ zugeordnet. Da diese Zuordnung umkehrbar eindeutig ist, übertragen sich die Begriffe Maß und Topologie auf Linearformen.

Satz 2. *Sind $m \geqslant 1$ und $\varepsilon > 0$ gewählt, dann haben für fast jedes Paar L_1, L_2 von Linearformen die Ungleichungen*

(2) $$-\frac{d}{8m} < (L_1 + c_1)(L_2 + c_2) < \frac{m}{8}(d + \varepsilon)$$

für alle reellen c_1, c_2 unendlich viele ganzzahlige Lösungen. d ist dabei der Absolutbetrag der Determinante von L_1, L_2. Die Paare von Linearformen, für welche die Ungleichungen (2) nicht für alle c_1, c_2 ganzzahlige Lösungen haben, bilden eine abgeschlossene, nirgends dichte Menge.

Die Aussage über die Dichte in diesem Satz stammt von W. Schmidt.

Satz 3. *Alle Aussagen von Satz 3 bleiben richtig, wenn man anstelle von (2) die Ungleichungen*

(3) $$0 < (L_1 + c_1)(L_2 + c_2) < \frac{d}{2} + \varepsilon; \quad 0 < L_1 + c_1, \; 0 < L_2 + c_2$$

nimmt.

Dieser Satz steht in einem ähnlichen Verhältnis zu einem Satz von Davenport und Heilbronn [47], wie der vorhergehende zum Satz von Minkowski.

Satz 4. *Gilt die Vermutung für die Dimensionen $2, \ldots, n-1$, dann gilt sie in der n-ten Dimension jedenfalls für fast alle Systeme von Linearformen.*

Da die Vermutung bisher für die Dimensionen $2, 3$ und 4 bewiesen wurde, stellt dieser Satz eine Aussage für $n = 5$ dar. Das folgende Ergebnis stammt von W. Schmidt [60] (Cor. S. 517). Da die Abbildung $\tau \to \tau^{-1}$ Nullmengen in Nullmengen überführt, kann man es in folgender Weise aussprechen.

Hilfssatz 2. *Sei $n > 1$ und S eine Borelmenge des R^n mit unendlichem Volumen. Dann enthält für fast jedes τ das Gitter $\tau\Lambda_0$ unendlich viele primitive Punkte in S.*

Ein Gitter Λ überdeckt den R^n durch einen Bereich T (unendlichfach) wenn das System

$$T+\Lambda = \{T+\mathfrak{a},\ \mathfrak{a}\in\Lambda\}$$

den R^n (unendlichfach) überdeckt. Die Aussagen: es gibt unendlich viele (bzw. keine) Lösungen von (2) oder (3) für jedes Paar c_1, c_2 (bzw. für mindestens ein Paar c_1, c_2) und $\tau\Lambda_0$ überdeckt den R^n unendlichfach (bzw. nicht) durch die Bereiche

$$T':\ -\frac{d}{8m} < x_1x_2 < \frac{m}{8}(d+\varepsilon) \tag{4}$$

oder

$$T'':\ 0 < x_1x_2 < \frac{d}{2}+\varepsilon;\qquad 0 < x_1,\ 0 < x_2 \tag{5}$$

sind äquivalent.

Hilfssatz 3. *Die Menge der Matrizen τ, für welche das Gitter $\tau\Lambda_0$ den R^n durch einen offenen Bereich T überdeckt, ist offen.*

Fragen, die mit diesem Hilfssatz zusammenhängen sollen in einer späteren Arbeit behandelt werden.

Beweis des Hilfssatzes 3. Sei τ eine Matrix, so daß $\tau\Lambda_0$ den R^n durch T überdeckt. Die Vektoren

$$\mathfrak{b}_k = (t_{1k}, \ldots, t_{nk}),\qquad k = 1, \ldots, n$$

bilden eine Basis von $\tau\Lambda_0$. Das kompakte Parallelepiped

$$P:\ t_1\mathfrak{b}_1+\ldots+t_n\mathfrak{b}_n\quad \text{mit}\quad 0\leqslant t_k\leqslant 1,\quad k = 1, \ldots, n$$

wird durch das System der offenen Mengen $T+\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}\in\tau\Lambda_0$ überdeckt. Es gibt daher schon eine endliche Teilüberdeckung

$$T+\mathfrak{a}_l,\qquad l = 1, \ldots, N,\ N > 1. \tag{6}$$

Sei

$$\mathfrak{a}_l = u_{1l}\mathfrak{b}_1+\ldots+u_{nl}\mathfrak{b}_n,\qquad l = 1, \ldots, N \tag{7}$$

und

$$u = \max|u_{il}|. \tag{8}$$

Es ist

$$u\geqslant 1.$$

Man wählt nun $\varepsilon > 0$ so, daß jeder Punkt von P eine ε-Umgebung besitzt, welche ganz in einer der in (6) angegebenen Mengen liegt. Wir zeigen, daß für jede Matrix τ' mit

$$\|\tau-\tau'\| < \frac{\varepsilon}{2un} \tag{9}$$

$\tau'\Lambda_0$ den R^n durch T überdeckt. Sei τ' eine solche Matrix. Für

$$\mathfrak{b}'_k = (t'_{1k}, \ldots, t'_{nk}),\qquad k = 1, \ldots, n$$

gilt

$$|\mathfrak{b}_k-\mathfrak{b}'_k| < \frac{\varepsilon}{2un},\qquad k = 1, \ldots, n \tag{10}$$

nach (1) und (9). Daher ist für

$$\mathfrak{a}'_l = u_{1l}\mathfrak{b}'_1+\ldots+u_{nl}\mathfrak{b}'_n\in\tau'\Lambda_0,\qquad l = 1, \ldots, N$$

nach (7) und (8)

$$|\mathfrak{a}_l-\mathfrak{a}'_l| < \varepsilon/2,\qquad l = 1, \ldots, N. \tag{11}$$

Sei P' das Parallelepiped

$$t_1\mathfrak{b}'_1+\ldots+t_n\mathfrak{b}'_n\quad \text{mit}\quad 0\leqslant t_k\leqslant 1,\quad k = 1, \ldots, n.$$

Ist $\mathfrak{x}' = t_1\mathfrak{b}'_1+\ldots+t_n\mathfrak{b}'_n\in P'$ beliebig, dann ist $\mathfrak{x} = t_1\mathfrak{b}_1+\ldots+t_n\mathfrak{b}_n\in P$ und es gilt nach (10)

$$|\mathfrak{x}-\mathfrak{x}'| < \varepsilon/2u\leqslant\varepsilon/2, \tag{12}$$

$\mathfrak{x}$ liegt samt seiner ε-Umgebung in einer der Mengen aus (6), etwa $T+\mathfrak{a}_i$. Aus (11) und (12) folgt $\mathfrak{x}'\in T+\mathfrak{a}'_i$. Es überdeckt also das System

$$T+\mathfrak{a}'_l,\qquad l = 1, \ldots, N$$

P'. Damit überdeckt $T+\tau'\Lambda_0$ erst recht P' und daher den R^n.

Beweis des Satzes 2. Auf jeden der folgenden Bereiche:

$$S'\colon\ 0 < x_1x_2 < \frac{\varepsilon}{16},\ x_1 > 1,$$

(13) $$S''\colon\ 0 < x_1x_2 < \frac{\varepsilon}{16},\ x_2 > 1,$$

$$S_k\colon\ k\frac{\varepsilon}{8} < x_1x_2 < (k+1)\frac{\varepsilon}{8},\ x_1 > 1,\ k = 1, 2, \ldots$$

wendet man den Hilfssatz 2 an. Da die Vereinigung abzählbar vieler Nullmengen wieder eine Nullmenge ist, so ergibt sich, daß für fast alle τ $\tau\Lambda_0$ unendlich viele primitive Punkte in jedem der Bereiche aus (13) enthält. Sei τ eine solche Matrix. Wir zeigen, daß $\tau\Lambda_0$ den R^2 unendlichfach durch T' (siehe (4)) überdeckt. Sei k' so gewählt, daß

(14) $$\frac{m}{2}d < k'\frac{\varepsilon}{8} < (k'+1)\frac{\varepsilon}{8} < \frac{m}{2}(d+\varepsilon)$$

ist. Seien

$$\mathfrak{p}_i = (p_{1i}, p_{2i}) \in \tau\Lambda_0 \cap S_{k'}, \quad i = 1, 2, \ldots$$

primitiv. Gibt es für unendlich viele p_{1i} eine obere Schranke, dann liegen in einem beschränkten Teilbereich von $S_{k'}$ unendlich viele Gitterpunkte. Das ist unmöglich; daher ist

(15) $$\lim_{i\to\infty} p_{1i} = +\infty, \quad \lim_{i\to\infty} p_{2i} = 0.$$

Sei

$$\sigma_i = \begin{pmatrix} s_i & 0 \\ 0 & s_i^{-1}\end{pmatrix}, \quad s_i > 0, \quad \det\sigma_i = 1$$

so gewählt, daß für ein passendes $\mathfrak{q}_i = (q_i, q_i)$ gilt

(16) $$\sigma_i\mathfrak{p} = (s_ip_{1i}, s_i^{-1}p_{2i}) = (q_i, q_i).$$

Wegen $\mathfrak{p}_i \in S_{k'}$, der Definition von $S_{k'}$ in (13) und (14) ist

(17) $$\frac{m}{2}d < p_{1i}p_{2i} = q_i^2 < \frac{m}{2}(d+\varepsilon).$$

Da $\mathfrak{q}_i$ ein primitiver Punkt von $\sigma_i\tau\Lambda_0$ ist, überdeckt $\sigma_i\tau\Lambda_0$ den R^2 durch das Rechteck

$$R_i\colon\ |x_1+x_2| \leqslant q_i,\ |x_1-x_2| \leqslant \frac{d}{2q_i}.$$

Daher überdeckt $\tau\Lambda_0$ den R^2 durch

$$P_i = \sigma_i^{-1}R_i\colon\ |s_ix_1 + s_i^{-1}x_2| \leqslant q_i,\ |s_ix_1 - s_i^{-1}x_2| \leqslant \frac{d}{2q_i}.$$

Wegen (16) und (17) liegt P_i im Bereich

(18) $$|x_1| \leqslant p_{1i}, \quad |x_2| \leqslant p_{2i}.$$

Nach der Ungleichung vom arithmetischen und geometrischen Mittel liegt P_i im Bereich

$$-\frac{d^2}{16q_i^2} < x_1x_2 < \frac{q_i^2}{4}$$

und daher nach (17) in T'. Man erhält also eine Folge von Bereichen

$$P_1, P_2, \ldots \subset T',$$

von denen jeder den R^2 durch $\tau\Lambda_0$ überdeckt.

Die beiden folgenden Aussagen sind äquivalent: Λ überdeckt den R^n durch einen Bereich T (unendlichfach) und: zu jedem $\mathfrak{c} \in R^n$ gibt es ein $\mathfrak{c}_0 \in T$ (unendlich viele $\mathfrak{c}_i \in T$), so daß $\mathfrak{c} \equiv \mathfrak{c}_0(\Lambda)$ ($\mathfrak{c} \equiv \mathfrak{c}_i(\Lambda)$) gilt. Dabei bedeutet $\mathfrak{c} \equiv \mathfrak{d}(\Lambda)$, $\mathfrak{c} - \mathfrak{d} \in \Lambda$.

Sei nun $\mathfrak{c} \in R^2$ und sei erstens $\mathfrak{c}$ zu keinem Punkt einer Koordinatenachse modulo $\tau\Lambda_0$ kongruent. Da $\tau\Lambda_0$ den R^2 durch P_1 überdeckt, gilt

$$\mathfrak{c} \equiv \mathfrak{c}_1(\tau\Lambda_0) \quad \text{für ein } \mathfrak{c}_1 \in P_1 \subset T'.$$

Da $\mathfrak{c}_1 = (c_{11}, c_{21})$ auf keiner Koordinatenachse liegt, ist $|c_{21}| > 0$ und daher nach (15) $p_{2i} < |c_{21}|$ für $i \geqslant i_2$. Da P_i in dem in (18) angegebenen Bereich liegt, ist

(19) $$\mathfrak{c}_1 \notin P_i \quad \text{für} \quad i \geqslant i_2.$$

Da $\tau\Lambda_0$ den R^2 durch P_{i_2} überdeckt, ist

$$\mathfrak{c} \equiv \mathfrak{c}_2(\tau\Lambda_0) \quad \text{für ein } \mathfrak{c}_2 \in P_{i_2} \subset T'.$$

Nach (19) ist

$$\mathfrak{c}_1 \neq \mathfrak{c}_2.$$

Man erhält auf diese Weise eine Folge von Punkten

$$\mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2, \ldots \in T' \quad \text{mit} \quad \mathfrak{c}_i \equiv \mathfrak{c}(\tau\Lambda_0), \quad \mathfrak{c}_i \neq \mathfrak{c}_j \quad \text{für} \quad i \neq j.$$

Sei zweitens $\mathfrak{c}$ kongruent zu einem Punkt auf einer Koordinatenachse, etwa

$$\mathfrak{c} \equiv \mathfrak{c}_0(\tau\Lambda_0), \quad \mathfrak{c}_0 = (c_{10}, 0).$$

Seien

$$\mathfrak{r}_i = (r_{1i}, r_{2i}) \in \tau\Lambda_0 \frown S', \qquad i = 1, 2, \ldots$$

primitiv. Dann gilt wie oben für die $\mathfrak{p}_i$

$$\lim_{i\to\infty} r_{1i} = +\infty.$$

Daher ist $r_{1i} > c_{10}$ für $i \geqslant i_0$. Sei $i \geqslant i_0$. Dann ist nach (13)

$$0 < (c_{10}+r_{1i})(0+r_{2i}) < 2r_{1i}r_{2i} < \varepsilon/8$$

wegen $\mathfrak{r}_i \in S'$. Also ist

$$\mathfrak{c}_i = \mathfrak{c}_0 + \mathfrak{r}_i \in 2S' \subset T' \quad \text{mit} \quad \mathfrak{c}_i \equiv \mathfrak{c}(\tau\Lambda_0), \qquad \mathfrak{c}_i \neq \mathfrak{c}_j \quad \text{für} \quad i \neq j.$$

Die beiden Fälle zusammen ergeben, daß $\tau\Lambda_0$ den R^2 unendlichfach durch T' überdeckt. Damit ist der erste Teil gezeigt.

Die Menge der Matrizen τ, für welche $\tau\Lambda_0$ die Ebene durch die offene Menge T' überdeckt ist nach Hilfssatz 3 offen. Das Komplement dieser Menge ist abgeschlossen und hat nach dem Beweis des ersten Teiles des Satzes jedenfalls das Maß 0 und ist daher nirgends dicht.

Beweis des Satzes 3. Die Beweise der Sätze 2 und 3 sind recht ähnlich. Wir unterdrücken daher hier die Details. Im Bereich

$$S\colon\ 0 < x_1x_2 < \varepsilon, \ x_1 > 1$$

enthält nach Hilfssatz 2 für fast alle τ $\tau\Lambda_0$ unendlich viele primitive Punkte. Sei τ eine solche Matrix und

$$\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots \in \tau\Lambda_0 \frown S$$

primitiv. Dann ist

$$\lim_{i\to\infty} p_{1i} = +\infty, \qquad \lim_{i\to\infty} p_{2i} = 0. \tag{20}$$

Sei P_i das Polygon samt seinem Inneren, dessen Eckpunkte die folgenden Punkte (in dieser Reihenfolge) sind:

$$(0,0), \quad \left(\frac{d}{2p_{2i}}, 0\right), \quad \left(\frac{d}{2p_{2i}} + p_{1i}, p_{2i}\right), \quad (p_{1i}, p_{2i}),$$
$$\left(p_{1i}, \frac{d}{2p_{1i}} + p_{2i}\right), \quad \left(0, \frac{d}{2p_{1i}}\right), \quad (0,0).$$

Die Strecken von $\left(\frac{d}{2p_{2i}}, 0\right)$ nach $(0,0)$ und von $(0,0)$ nach $\left(0, \frac{d}{2p_{1i}}\right)$ werden nicht zu P_i gerechnet. $\tau\Lambda_0$ überdeckt den R^2 durch P_i und es ist $P_i \subset T''$. P_i liegt im Bereich

$$0 < x_1 \leqslant \frac{d}{2p_{2i}} + p_{1i}, \qquad 0 < x_2 \leqslant \frac{d}{2p_{1i}} + p_{2i}. \tag{21}$$

Zu einem $\mathfrak{c} \in R^2$ gibt es ein $\mathfrak{c}_1 \in P_1$ mit $\mathfrak{c} \equiv \mathfrak{c}_1(\tau\Lambda_0)$. Für alle $i \geqslant i_2$ ist wegen (20), da P_i in dem in (21) angegebenen Bereich liegt $\mathfrak{c}_i \notin P_i$. Es gibt dann ein $\mathfrak{c}_2 \in P_{i_2}$ mit $\mathfrak{c} \equiv \mathfrak{c}_2(\tau\Lambda_0)$ und $\mathfrak{c}_2 \neq \mathfrak{c}_1$ usw. Man konstruiert wieder eine Folge von Punkten und erhält schließlich, daß $\tau\Lambda_0$ die Ebene durch T'' unendlichfach überdeckt. Den zweiten Teil des Beweises überträgt man wortwörtlich, wobei anstelle von $T'T''$ zu nehmen ist.

Beweis des Satzes 4. Wendet man den Hilfssatz 2 auf die Bereiche

$$S_k\colon\ |x_1 \ldots x_n| \leqslant \frac{1}{k}, \ k = 1, 2, \ldots$$

an und verwendet, daß die Vereinigung abzählbar vieler Nullmengen wieder eine Nullmenge ist, dann ergibt sich, daß für fast alle τ $\tau\Lambda_0$ unendlich viele primitive Punkte in jedem S_k enthält. M.a.W. für fast jedes System von Linearformen hat die Ungleichung

$$|L_1 \ldots L_n| \leqslant \frac{1}{k}$$

für jedes k unendlich viele nicht triviale ganzzahlige Lösungen. D.h. für fast jedes System von Linearformen ist

$$\inf |L_1 \ldots L_n| = 0, \tag{22}$$

wobei das Infimum über alle ganzzahligen Werte $(u_1, \ldots, u_n) \neq (0, \ldots, 0)$ zu erstrecken ist.

Nach Birch und Swinnerton-Dyer [56] (Lemma 7, S. 32) gilt folgendes: Ist die Vermutung von Minkowski bis zur $(n-1)$-ten Dimension richtig, dann gilt sie in der n-ten für alle Systeme $L_1, \ldots, L_n$ von Linearformen für welche (22) gilt.

Zusammen mit dem obigen Resultat ergibt dieser Satz die Richtigkeit unserer Behauptung.

Bemerkung 1. Ist f eine Distanzfunktion, so daß der Bereich $f < 1$ unendliches Volumen hat, dann zeigt man ganz analog, daß für fast alle τ das homogene Minimum von f bezüglich $\tau\Lambda_0$ gleich 0 ist.

Bemerkung 2. Es ist zu vermuten, daß man nach Ausschluß einer Nullmenge die Konstante 2^{-n} in der Vermutung durch wesentlich kleinere Konstante ersetzen kann — wahrscheinlich durch Konstante $\leqslant 2^{-3n/2}$.

3. Ein Satz für großes n. Wir betrachten nun nur Gitter und Matrizen mit der Determinante 1. Ist Λ so ein Gitter, dann versteht man unter der r-Umgebung von Λ die Menge aller Gitter

$$\tau\Lambda \quad \text{mit} \quad \|\tau - \iota\| < r.$$

Dabei ist ι die Einheitsmatrix. Damit wird die Menge der Gitter des R^n zu einem topologischen Raum. Auf diesem Raum kann man nach Siegel ein Maß μ einführen, so daß der Gesamtraum das Maß 1 hat.

Äquivalent zu der in der Einleitung angegebenen Formulierung der Minkowskischen Vermutung ist die folgende: Jedes Gitter Λ überdeckt den R^n durch den Bereich

$$|x_1 \dots x_n| \leqslant 2^{-n} \tag{1}$$

und das Gleichheitszeichen ist nur in einem bestimmten Fall erforderlich.

Satz 5. *Ist $n > N$, dann gibt es eine meßbare Menge G von Gittern mit*

$$\mu(G) > 1 - e^{-0,279n},$$

so daß jedes $\Lambda \epsilon G$ den R^n durch den Bereich

$$|x_1 \dots x_n| \leqslant \frac{n \cdot n!}{n^n}$$

überdeckt. Weiters gibt es zu jedem $\Lambda \epsilon G$ eine r-Umgebung mit

$$r = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{e}{2} - 1\right) c_n, \qquad c_n \to 1 \text{ bei } n \to \infty,$$

so daß jedes Gitter aus einer solchen Umgebung die Vermutung erfüllt.

Ist Λ ein Gitter mit der Determinante 1 und T ein meßbarer Bereich, dann versteht man unter der Dichte $\delta(T, \Lambda)$ das Volumen des von $T + \Lambda$ überdeckten Teils eines Grundparallelepipeds von Λ. Aus dem Satz 10* von W. Schmidt [59] (S. 212) ergibt sich unmittelbar der

Hilfssatz 4. *Ist T ein beschränkter Bereich vom Volumen $V \leqslant n-1$, dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$, so daß für alle $n > N(\varepsilon)$ gilt*

$$\int \delta(T, \Lambda)\, d\mu = 1 - e^{-V}(1 - R^*)$$

mit

$$|R^*| < V^{n-1} n^{-n+1} e^{V+n}(1+\varepsilon) + \varepsilon.$$

Hilfssatz 5. *Überdeckt Λ den R^n durch einen Bereich $2K \subset S$, liegt $2K$ in $|\mathfrak{x}| < m$ und ist d der gewöhnliche Abstand von $2K$ vom Rand von S, dann überdeckt $\tau\Lambda$ den R^n durch S für alle τ mit*

$$\|\tau - \iota\| < \frac{d}{m}.$$

Beweis. Aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt für jedes $\mathfrak{x} \epsilon R^n$

$$|\tau\mathfrak{x}| = \Big(\sum_i \Big(\sum_k t_{ik} x_k\Big)^2\Big)^{1/2} \leqslant \Big(\sum_k x_k^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_{i,k} t_{ik}^2\Big)^{1/2} = |\mathfrak{x}|\|\tau\|.$$

Sei τ eine Matrix mit $\|\tau - \iota\| < d/m$, dann ist für $\mathfrak{x} \epsilon 2K$

$$|\tau\mathfrak{x} - \mathfrak{x}| = |(\tau - \iota)\mathfrak{x}| \leqslant |\mathfrak{x}|\|\tau - \iota\| < m\frac{d}{m} = d,$$

d.h. aus $\mathfrak{x} \epsilon 2K$ folgt $\tau\mathfrak{x} \epsilon S$ und damit $\tau 2K \subset S$.

Überdeckt Λ den R^n durch $2K$, dann überdeckt $\tau\Lambda$ den R^n durch $\tau 2K$ und daher durch S, soferne $\|\tau - \iota\| < d/m$ ist.

Beweis des Satzes 5. Ist x Lösung der Gleichung $xe^{x+1} = 1$, dann ist $x > 0,279$. Daher ist für $n > N_1$

$$20\, e^{-xn} < e^{-0,279n}. \tag{2}$$

Wir wenden nun der Hilfssatz 4 mit $\varepsilon = 1$ an. Sei $T = K$ ein konvexer symmetrischer Bereich vom Volumen $V \geqslant xn$. Sei $K' = (xn/V)^{1/n} K$. K' ist ein in K enthaltener, konvexer, symmetrischer Bereich vom Volumen $V' = xn$. Sei $n > N = \max\big(N_1, N(1)\big)$, dann ist

$$\int \delta(K, \Lambda)\, d\mu \geqslant \int \delta(K', \Lambda)\, d\mu = 1 - e^{-xn}(1 - R^*)$$

mit

$$|R^*| < (xn)^{n-1} n^{-n+1} e^{xn+n}(1+1) + 1 = x^{-1}(xe^{x+1})^n 2 + 1 < 9.$$

Also ist

$$1 - e^{-xn}(1 - R^*) > 1 - 10e^{-xn} > 1 - \tfrac{1}{2} e^{-0,279n}$$

nach (2). Daher ist

$$\int \delta(K, \Lambda)\, d\mu > 1 - \tfrac{1}{2} e^{-0,279n}.$$

Da $\delta(K, \Lambda)$ integrierbar ist, ist die Menge G der Gitter Λ mit $\delta(K, \Lambda) > \frac{1}{2}$ meßbar. Es ist $0 \leqslant \delta(K, \Lambda) \leqslant 1$. Daraus folgt

$$1 \cdot \mu(G) + \tfrac{1}{2}\mu(\text{Kompl. } G) \geqslant \int \delta(K, \Lambda)\, d\mu > 1 - \tfrac{1}{2} e^{-0,279n}.$$

Da der Gesamtraum das Maß 1 hat, ist

$$\mu(G) + \tfrac{1}{2}\big(1 - \mu(G)\big) > 1 - \tfrac{1}{2} e^{-0,279n},$$

oder

$$\mu(G) > 1 - e^{-0,279n}. \tag{3}$$

Ist $\Lambda \epsilon G$, dann folgt aus der Konvexität von K und aus $\delta(K, \Lambda) > \frac{1}{2}$, daß Λ den R^n durch $2K$ überdeckt (siehe z. B. Rogers [58], S. 211 unten). Sei speziell K der Bereich

$$\sum |x_k| \leqslant \tfrac{1}{2} \sqrt[n]{n \cdot n!}$$

mit $V = n$. Dann gilt für G die Ungleichung (3). $2K$ liegt in

$$|x_1 \ldots x_n| \leqslant \frac{n \cdot n!}{n^n}.$$

Daher überdeckt jedes $\Lambda \epsilon G$ den R^n durch diesen Bereich. Auf unseren speziell gewählten Bereich $2K$ wendet man den Hilfssatz 5 an. S sei der in (1) definierte Bereich. Es ist

$$d = \sqrt{n\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt[n]{n \cdot n!}}{n}\right)^2} = \sqrt{n}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt[n]{n \cdot n!}}{n}\right), \qquad m = \sqrt[n]{n \cdot n!}.$$

Damit ist nach der Stirlingschen Formel

$$\frac{d}{m} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt[n]{n \cdot n!}} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{e}{2} - 1\right) c_n, \qquad c_n \to 1 \text{ bei } n \to \infty.$$

Ist $\Lambda \epsilon G$, dann überdeckt $\tau\Lambda$ den R^n durch S für alle τ mit

$$\|\tau - \iota\| < \frac{d}{m} = r = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{e}{2} - 1\right) c_n, \qquad c_n \to 1 \text{ bei } n \to \infty,$$

erfüllt also die Vermutung von Minkowski.

Für die ausführliche und genaue Korrektur danke ich dem Referenten recht herzlich.

Literaturverzeichnis

Birch, B. J. und H. P. F. Swinnerton-Dyer

[56] *On the inhomogeneous minimum of the product of n linear forms*, Mathematika 3 (1956), S. 25-39.

Bombieri, E.

[62] *Un principio generale della Geometria dei Numeri e sue applicazioni ai problemi non omogenei*, Rend. Acc. Naz. Lincei, (8), 33 (1962), S. 45-48.

[63] *Alcune osservazioni sul prodotto di n forme lineari reali non omogenee*, Ann. Mat. pura appl., (4), 61 (1963), S. 279-286.

Cassels, J. W. S.

[59] *An Introduction to the Geometry of Numbers*, Grundl. Math. Wiss., 99, Berlin 1959.

Davenport, H. und H. Heilbronn

[47] *Asymmetric inequalities for non-homogeneous linear forms*, J. Lond. Math. Soc. 22 (1947), S.53-61.

Hadwiger, H.

[57] *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*, Grundl. Math. Wiss., 93, Berlin 1957.

Hlawka, E.

[50] *Über Gitterpunkte in Parallelepipeden*, J. reine angew. Math. 187 (1950), S. 246-252.

Rogers, C. A

[58] *Lattice covering of space with convex bodies*, J. Lond. Math. Soc. 33 (1958), S. 208-212.

Schmidt, W. M.

[59] *Maßtheorie in der Geometrie der Zahlen*, Acta Math. 102 (1959), S. 159-224.

[60] *A metrical theorem in geometry of numbers*, Amer. Math. Soc. Trans. (3), 95 (1960), S. 516-529.

Tschebotareff, N.

[34] *Beweis des Minkowskischen Satzes über lineare inhomogene Formen* (Russ.), Učen. Zapiski Kazansk. Gos. Univ. 94 (1934), S. 3-16.

Woods, C. A.

[58] *On a theorem of Tschebotarev*, Duke Math. J. 25 (1958), S. 631-638.

Reçu par la Rédaction le 1. 8. 1966