From these assumptions it follows that

$$\pi(x, D, l) = \frac{\operatorname{li} x}{\varphi(D)}\left(1+O\left((\log x)^{-M/2}\right)\right)$$

uniformly for $x \geqslant D^{B+\varepsilon}$, $(l, D) = 1$.

Using similar arguments as in the proof of Theorem 2 we obtain

THEOREM 3. *Supposing that the assumptions* (α), (β) *in Lemma* 3 *are satisfied by* $B = 2+\delta$, $\delta < (1+1/c_2)^{1/2}-1$ (see (10)) *for every sufficiently large prime modulus* q, *we find that for every sufficiently large* q *there exists a solution of the equation*

$$p+1 = kq$$

in prime p, *so that all the prime divisors of* k *are smaller than* q. *Hence it follows that* $\{p+1\}$ *is a set of quasi-uniqueness.*

Let $\mathscr{P}^{(3)}$ denote the set of all natural numbers containing at most three prime divisors. A. I. Vinogradov in [4] proved that every sufficiently large even number is a sum of two elements from $\mathscr{P}^{(3)}$. Using his ideas we can prove that the equation

$$aP_3 - bP_3' = 1; \quad P_3, P_3' \in \mathscr{P}^{(3)}$$

is solvable for all pairs a, b of relatively prime natural numbers.

Hence we obtain

THEOREM 4. *If* $f(n)$ *is a totally additive function increasing monotonically on the set* $\{P_3+1\}$, *i.e.*

$$f(P_3+1) \geqslant f(P_3'+1), \quad \text{if} \quad P_3 \geqslant P_3'$$

for every pairs $P_3, P_3' \in \mathscr{P}^{(3)}$, *then* $f(n)$ *is a constant multiplie of* $\log n$. *Further the set* $\{P_3+1\}$ *is a set of uniqueness.*

Acknowledgement. I am indebted to Professor P. Turán for several remarks concerning the paper.

References

[1] P. Erdös, *On the distribution function of additive functions*, Annals of Math. (2) 47 (1946), pp. 1-20, in particular Theorem XI on p. 17.

[2] K. Prachar, *Primzahlverteilung*, Springer Verlag, 1957.

[3] M. B. Barban, Yu. V. Linnik and N. G. Tshudakov, *On prime numbers in an arithmetic progression with a prime-power difference*, Acta Arith. 9 (1964), pp. 375-390, in particular Lemmas 1, 2, 3.

[4] А. И. Виноградов, *Применение $\zeta(s)$ к решету Эратосфена*, Матем. сб. **41** (83) (1957), pp. 49-80.

Reçu par la Rédaction le 14. 2. 1967

ACTA ARITHMETICA
XIII (1968)

Теорема о нулях дзета-функции Дедекинда и расстояние между „соседними" простыми идеалами

А. В. Соколовский (Ташкент)

Классическое доказательство Хохейзеля теоремы о разности между „соседними" простыми числами (см. [6], стр. 321) опирается на знание:

а) отсутствия нулей $\zeta(\sigma+it)$ в области

$$\sigma \geqslant 1-\frac{c}{\ln^a t}; \quad t > t_0; \quad a < 1;$$

б) оценки $N(\sigma, T)$ числа нулей $\varrho = \beta+i\gamma$ функции $\zeta(\sigma+it)$ в области $\beta \leqslant \sigma$; $0 \leqslant \gamma \leqslant T$.

В настоящей работе с помощью метода И. М. Виноградова оценок тригонометрических сумм (см. [2]) мы доказываем теоремы 1 и 2:

ТЕОРЕМА 1. *Дзета-функция Дедекинда* $\zeta_K(\sigma+it)$ *произвольного поля алгебраических чисел* K *степени* n *не имеет нулей в области*

$$\sigma \geqslant 1-\frac{A}{\ln^{2/3} t(\ln\ln t)^{1/3}}; \quad t > t_0,$$

где $A > 0$ *зависит лишь от поля* K.

ТЕОРЕМА 2.

$$\zeta_K(\tfrac{1}{2}+it) \ll |t|^{n/4-c_1/n^2\ln(n+2)}$$

(c_1 — *абсолютная постоянная*).

Из теоремы 1 с помощью несложного обобщения метода Хохейзеля получаем теорему:

ТЕОРЕМА 3. *Пусть* $\pi_1(x)$ — *число простых идеалов первой степени поля* K *с нормой, не превосходящей* x. *Тогда из оценки*

$$N_K(\sigma, T) \ll T^{b(1-\sigma)}\ln^{c_2} T$$

следует, что при $\Theta > 1-1/b$

$$\pi_1(x+x^{\Theta})-\pi_1(x) \sim \frac{x^{\Theta}}{\ln x}.$$

Из теоремы 3 очевидно вытекает

Следствие. *Пусть $\mathscr{P}$ — множество простых идеалов первой степени поля K и $\mathfrak{p} \in \mathscr{P}$. Для любого $\mathfrak{p}' \in \mathscr{P}$ такого, что*

$$0 < N\mathfrak{p}' - N\mathfrak{p} = \min_{\mathfrak{p}'' \in \mathscr{P}} (N\mathfrak{p}'' - N\mathfrak{p})$$

имеет место неравенство

$$N\mathfrak{p}' - N\mathfrak{p} = O\big((N\mathfrak{p})^{\Theta}\big).$$

Так как из оценки

$$\zeta_K(\tfrac{1}{2} + it) \ll |t|^{c_0} \ln^{c_3}|t|$$

вытекает (см. [8])

$$N_K(\sigma, T) \ll T^{(1+2c_0)(1-\sigma)} \ln^{c_4} T,$$

теоремы 2 и 3 дают

$$\Theta > \frac{1+4c_0}{2+4c_0} = 1 - \frac{1}{n+2-4c_1/n^2 \ln(n+2)}.$$

Для доказательства теоремы 3 достаточно, конечно, сведения об отсутствии нулей $\zeta_K(\sigma + it)$ в области $\sigma \geqslant 1 - A/\ln^a t$, $t > t_1$, $a < 1$. В работе [7], например, достигалось $a = \frac{3}{4} + \varepsilon$; в [12] для Z-функций Гекке приводилась более сильная теорема с $a = \frac{5}{7} + \varepsilon$ и равномерно по некоторому параметру M, но доказательство имеет пробелы, и нам неизвестно, как автору удается их восполнить.

Наша теорема 1 имеет самостоятельный интерес, ибо она делает самый сильный из известных результатов о сдвиге нулей ζ-функции Римана частным случаем общей теоремы.

Прежде чем приступить к доказательству теорем 1 и 2, мы несколько преобразуем $\zeta_K(s)$, а также докажем вспомогательные утверждения.

Как известно (см. [1], стр. 410)

$$\zeta_K(s) = \sum_{C} \Big(\sum_{\mathfrak{a} \in C} (N\mathfrak{a})^{-s} \Big), \tag{1}$$

где $\mathfrak{a}$ пробегает все целые идеалы поля из данного класса C, а внешнее суммирование ведется по всем h классам C. Легко показать (см. [1], стр. 411), что

$$f_C(s) = \sum_{\mathfrak{a} \in C} (N\mathfrak{a})^{-s} = (N\mathfrak{a}')^s \sum_{\substack{a \\ a \equiv 0 (\mathrm{mod}\, \mathfrak{a}')}} |N(a)|^{-s}, \tag{2}$$

где суммирование идет по полному набору попарно неассоциированных, отличных от нуля чисел поля K, принадлежащих идеалу $\mathfrak{a}' \in C^{-1}$.

Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — базис идеала $\mathfrak{a}'$. Когда $a_1, \ldots, a_n$ независимо пробегают все целые рациональные числа, линейная форма $a = a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n$ пробегает все числа идеала $\mathfrak{a}'$.

Мы будем пользоваться геометрическим изображением чисел $a \in K$ точками n-мерного вещественного пространства $\mathfrak{R}^n$

$$x(a) = (x_1, \ldots, x_{r_1}, y_1, \ldots, y_{r_2}, z_1, \ldots, z_{r_2})$$

(см. [1], гл. II, § 3). Через $\mathfrak{M}$ обозначим n-мерную решетку в $\mathfrak{R}^n$, состоящую из образов целых чисел $a \in K$, делящихся на $\mathfrak{a}'$, а через V — фундаментальную область для поля K. Теперь суммирование в (2) сведется к суммированию по тем целым рациональным $a_1, \ldots, a_n$, для которых образы $x(a)$ чисел поля $a = a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n$ в $\mathfrak{R}^n$ принадлежат $\mathfrak{M} \cap V$.

Итак, обозначая $N(a) = N\big(x(a)\big) = f(a_1, \ldots, a_n)$, имеем

$$f_C(s) = N(\mathfrak{a}')^s \sum_{\substack{a_1 \\ x(a) \in \mathfrak{M} \cap V}} \ldots \sum_{a_n} |f(a_1, \ldots, a_n)|^{-s}. \tag{3}$$

Через $a^{(i)} = a_1\alpha_1^{(i)} + \ldots + a_n\alpha_n^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ обозначим числа, сопряженные с a, так что $a^{(i)}$ вещественны, когда $1 \leqslant i \leqslant r_1$ и $a^{(i)}$ с $a^{(i+r_2)}$ комплексно сопряжены, когда $r_1 + 1 \leqslant i \leqslant r_2$, а через $\overline{V}$ — множество таких точек $x = (x_1, \ldots, x_{r_1}, y_1, \ldots, y_{r_2}, z_1, \ldots, z_{r_2})$, которые получаются из точек $u \in V$ умножением на точки, являющиеся образами корней из 1, лежащих в K.

Теперь ряд (3) можно записать в виде

$$f_C(s) = \frac{1}{m} N(\mathfrak{a}')^s \sum_{\substack{a_1 \\ x(a) \in \mathfrak{M} \cap \overline{V}}} \ldots \sum_{a_n} \frac{e^{-it \ln |f(a_1, \ldots, a_n)|}}{|f(a_1, \ldots, a_n)|^{\sigma}}, \tag{4}$$

m — число корней из 1, содержащихся в K.

Для оценки $|\zeta_K(s)|$ мы будем применять метод И. М. Виноградова. Аналогично классическому случаю (см. [2]), возникает необходимость оценки сверху и снизу производных функций $-it \ln |f(u_1, \ldots, u_n)|$. Для получения их используется принцип типа принципа Дирихле (см. [7]). Лучший результат дает здесь неравенство Турана (см. например [11]).

Теорема Турана. *Пусть $n \geqslant 2$, $m > 0$ целые, b_j — произвольные комплексные, z_j — комплексные $1 \leqslant j \leqslant n$. Если*

$$1 = |z_1| \geqslant |z_2| \geqslant \ldots \geqslant |z_n|,$$

то

$$\max_{m+1 \leqslant \nu \leqslant m+n} |b_1 z_1^{\nu} + \ldots + b_n z_n^{\nu}| \geqslant \left(\frac{n}{8e(m+n)} \right)^n \min_{1 \leqslant j \leqslant n} |b_1 + \ldots + b_j|.$$

Обозначим через K^X множество вещественнозначных наборов $(u_1, \ldots, u_n)$ таких, что $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|u_i| \leqslant X$ и точки $u = u_1 x(a_1)+\ldots+u_n x(a_n)$ в $\mathfrak{R}^n$ принадлежат $\overline{V}$.

Лемма 1. *Для любого набора* $(u_1, \ldots, u_n) \in K^{2X}\setminus K^X$ *справедливы неравенства*:

(5) $$c''X < |u_1 a_1^{(i)}+\ldots+u_n a_n^{(i)}| < c'X \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где c' и c'' не зависят от X.

Доказательство. Оценки сверху очевидны. Далее, легко найти $c > 0$, не зависящее от X, такое, что все решения системы неравенств

$$|x_i| = |u_1 a_1^{(i)}+\ldots+u_n a_n^{(i)}| < cX \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

принадлежат K^X. Действительно, так как u_i — однородные функции от x_k, получаем

$$|u_i| = |c_{1i}x_1+\ldots+c_{ni}x_n| < (|c_{1i}|+\ldots+|c_{ni}|)cX$$

и, следовательно, $c = 1/\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}(|c_{1i}|+\ldots+|c_{ni}|)$.

Таким образом, для каждого набора $(u_1, \ldots, u_n) \in K^{2X}\setminus K^X$ существует (вообще говоря, своё) $1 \leqslant j \leqslant n$ такое, что

$$|u_1 a_1^{(j)}+\ldots+u_n a_n^{(j)}| > cX.$$

Известно, что для любой точки $u \in V$ справедлива система равенств (см. [1], стр. 420)

(6) $$\ln|u_1 a_1^{(i)}+\ldots+u_n a_n^{(i)}|^{e_i} = \frac{e_i}{n}\ln|N(u)|+\sum_{k=1}^{r}\xi_k \ln|\varepsilon_k^{(i)}|^{e_i},$$

где $0 \leqslant \xi_k < 1$; $r = r_1+r_2-1$; $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_r$ — система основных единиц поля K и

$$e_i = \begin{cases} 1, & 1 \leqslant i < r_1, \\ 2, & r_1+1 \leqslant i \leqslant n. \end{cases}$$

Из равенства (6) при $i = j$ следует, что

$$|N(u)| > c_1'|u_1 a_1^{(j)}+\ldots+u_n a_n^{(j)}| > c_1''X^n.$$

Поэтому

$$|x_i| = \frac{|N(u)|}{\prod\limits_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{n}|x_k|} \geqslant c''X,$$

где c'' очевидно не зависит от X.

Лемма 2. *Пусть*

$$F(u_1, \ldots, u_n) = -\frac{t}{2\pi}\ln|N(x(u))|, \quad m \geqslant 1.$$

Тогда, для произвольного набора $(u_1, \ldots, u_n) \in K^{2X}\setminus K^X$ *верно неравенство*

(7) $$\left|\frac{\partial^m F(u_1, \ldots, u_n)}{\partial u_i^m}\right| \leqslant c_5^m (m-1)!|t|X^{-m} \quad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

Лемма 3. *При любых фиксированных* u_j $(j \neq i)$ *с условием* $(u_1, \ldots, u_n) \in K^{2X}\setminus K^X$ *и любом целом* $m_1 \geqslant 1$ *интервал изменения* u_i *можно разбить на* $\leqslant c_6^{m_1}$ *интервалов, для каждого из которых существует* m $(m_1+1 \leqslant m \leqslant m_1+n)$ *такое, что неравенство*

(8) $$\left|\frac{\partial^m F(u_1, \ldots, u_n)}{\partial u_i^m}\right| \geqslant c_7^m (m-1)!|t|X^{-m}$$

справедливо для всех точек этого интервала.

Доказательство. Легко вычисляется

$$\frac{\partial^{m_1} F(u_1, \ldots, u_n)}{\partial u_i^{m_1}} = (-1)^{m_1\pm 1}(m_1-1)!t\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{a_i^{(j)}}{u_1 a_1^{(j)}+\ldots+u_n a_n^{(j)}}\right]^{m_1} =$$

$$= \frac{(-1)^{m_1\pm 1}(m_1-1)!t|a_i^{(d)}|^{m_1}}{|u_1 a_1^{(d)}+\ldots+u_n a_n^{(d)}|^{m_1}}\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{a_i^{(j)}|u_1 a_1^{(d)}+\ldots+u_n a_n^{(d)}|}{|a_i^{(d)}|(u_1 a_1^{(j)}+\ldots+u_n a_n^{(j)})}\right]^{m_1},$$

где

$$\left|\frac{a_i^{(d)}}{u_1 a_1^{(d)}+\ldots+u_n a_n^{(d)}}\right| = \max_{1\leqslant l\leqslant n}\left|\frac{a_i^{(l)}}{u_1 a_1^{(l)}+\ldots+u_n a_n^{(l)}}\right|.$$

В силу леммы 1 неравенство (7) очевидно справедливо при указанных выше условиях. Из леммы 1 и теоремы Турана следует существование целого $m = m(u_1, \ldots, u_n)$ $(m_1+1 \leqslant m \leqslant m_1+n)$ такого, что

$$\left|\frac{\partial^m F(u_1, \ldots, u_n)}{\partial u_i^m}\right| \geqslant \frac{2c_8^m}{m^n}(m-1)!tX^{-m}$$

для любого фиксированного набора $(u_1^0, \ldots, u_n^0) \in K^{2X}\setminus K^X$. Но для всех u_i из интервала

$$|u_i - u_i^0| \leqslant \frac{c_8^m X}{m^{n+1}c_5^{m+1}}$$

в силу неравенства (7) имеем

$$\left|\frac{\partial^m F(u_1^0, \ldots, u_i, \ldots, u_n^0)}{\partial u_i^m}\right| \geqslant$$

$$\geqslant \left|\frac{\partial^m F(u_1^0, \ldots, u_n^0)}{\partial u_i^m}\right| - |u_i - u_i^0| \left|\frac{\partial^{m+1} F\big(u_1^0, \ldots, u_i^0 + \theta(u_i - u_i^0), \ldots, u_n^0\big)}{\partial u_i^{m+1}}\right|$$

$$\geqslant \frac{c_8^m}{m^n}(m-1)!\,tX^{-m}.$$

Лемма 4. *Пусть* $m \geqslant 11$ — *целое*, $a_m = a/q + \theta/q^2$, *где* a *и* q — *целые рациональные*, $(a, q) = 1$; $q > 1$; $|\theta| \leqslant 1$; $f(x) = a_m x^m + \ldots + a_0$; P *и* $Q > 0$ — *целые рациональные*, $P^{\varepsilon_1} \leqslant q \leqslant P^{m-\varepsilon_2}$, *где* ε_1, ε_2 — *абсолютные постоянные* $0 < \varepsilon_i \leqslant 1$. *Тогда*

$$\sum_{l=Q+1}^{Q+P} e^{2\pi i f(l)} \ll e^{c_9 m \ln^2 m} P^{1 - c_{10}/m^2 \ln m}.$$

Это утверждение является частным случаем теоремы И. М. Виноградова (см. [3]).

Лемма 5. *Пусть* $m_1 = \left[11\dfrac{n+1}{n} \cdot \dfrac{\ln t}{\ln x}\right]$ *и* $X_0 < X < Bt^{(n+1)/n}$; *тогда, если* $F(a_1, \ldots, a_n)$ *знакопостоянна,*

$$|S| = \Bigg|\sum_{\substack{a < a_i \leqslant a' \\ (a_1, \ldots, a_n) \in K^{2X} \setminus K^X}} e^{2\pi i F(a_1, \ldots, a_n)}\Bigg| \ll e^{c_9 (m_1+n) \ln^2 (m_1+n)} X^{1 - c_{11}/(m_1+n)^2 \ln (m_1+n)}. \tag{9}$$

Доказательство (ср. [12], [4]). Разобьем S согласно лемме 3 на $\ll c_6^{m_1}$ сумм вида

$$S' = \sum_{A < a_i \leqslant A'} e^{2\pi i F(a_1, \ldots, a_n)}$$

так, что для каждого интервала $[A, A']$ существует m $(m_1 + 1 \leqslant m \leqslant m_1 + n)$ такое, что в любой точке $[A, A']$ верны неравенства (7) и (8).

Положим

$$\varrho = \frac{c_{12}}{m^2 \ln m}, \quad c_{13} = 11\frac{n+1}{n}, \quad P = [c_5^{-1} t^{-1/(m+1)} X^{1 - \varrho/(m+1)}].$$

Заметим, что $m \geqslant m_1 > 11$ и

$$t^{c_{13}/(m+1)} \leqslant t^{c_{13}/(m_1+1)} \leqslant X \leqslant t^{c_{13}/m_1} \leqslant t^{c_{13}/\max(1, m-n)}.$$

При достаточно большом X_0

$$P \geqslant c_5^{-1} X^{1 - 1/c_{13} - \varrho/(m+1)} > X_0^{9/11} > 1.$$

Положим $b = \left[\dfrac{A' - A}{P}\right]$, тогда

$$S' = \sum_{r=0}^{b-1} S_r + O(P),$$

где

$$S_r = \sum_{A + rP \leqslant a_i \leqslant A + (r+1)P} e^{2\pi i F(a_1, \ldots, a_n)} = \sum_{0 \leqslant a_i < P} \exp\Big\{2\pi i \sum_{k=0}^{m} a_{kr} a_i^k + R_{mr}(a_i)\Big\},$$

$$a_{kr} = \frac{1}{k!} \cdot \frac{\partial^k F(a_1, \ldots, A + rP, \ldots, a_n)}{\partial u_i^k},$$

$$R_{mr}(a_i) = \frac{a_i^{m+1}}{2\pi i (m+1)!} \cdot \frac{\partial^{m+1} F(a_1, \ldots, A + (r+\theta)P, \ldots, a_n)}{\partial u_i^{m+1}} \quad (0 \leqslant \theta < 1).$$

В силу неравенства (7)

$$|R_{mr}(a_i)| \leqslant c_5^{m+1} P^{m+1} t X^{-m-1} \ll X^{-\varrho}.$$

Следовательно,

$$S_r = \sum_{0 \leqslant a_i < P} e^{2\pi i (a_{mr} a_i^m + \ldots + a_{0r})} + O(P^{1-\varrho}).$$

Очевидно, при $X > X_0$

$$|a_{mr}| \leqslant \frac{c_5^m}{2\pi m} t X^{-m} \leqslant \frac{c_5^m}{2\pi m} X_0^{-m + (m+1)/c_{13}} < 1$$

и значит

$$q = [|a_{mr}|^{-1}] > 1, \quad \text{а} \quad \left|a_{mr} - \frac{\operatorname{sgn} a_{mr}}{q}\right| < \frac{1}{q^2}.$$

В силу леммы 3 неравенства

$$qP^{-\varepsilon_1} > \frac{2\pi m c_5^{\varepsilon_1}}{c_5^m} t^{-1} X^m t^{\varepsilon_1/(m+1)} X^{-\varepsilon_1 + \varrho\varepsilon_1/(m+1)} \geqslant X_0^{m - \varepsilon_1 - (m+1-\varepsilon_1)/c_{13}} > 1,$$

$$q^{-1} P^{m-\varepsilon_2} > \frac{c_6^m}{2\pi m^{n+1} c_5^{m-\varepsilon_2}} t X^{-m} t^{-(m-\varepsilon_2)/(m+1)} X^{m - \varepsilon_2 - \varrho(m-\varepsilon_2)/(m+1)} \geqslant$$

$$\geqslant X^{-\varepsilon_2 - \frac{\varrho(m-\varepsilon_2)}{m+1} + \frac{(1+\varepsilon_2)\cdot\max(1, m-n)}{c_{13}(m+1)}} > 1$$

справедливы, лишь только $\varepsilon_1 < 1$ и $\varepsilon_2 < 1/2c_{13}(n+1)$.

Применяя к сумме S_r лемму 4, получаем

$$S_r \ll e^{c_{14} m \ln^2 m} P^{1-\varrho}$$

$$S \ll X e^{c_{14} m \ln^2 m} P^{-\varrho} \ll e^{c_{14} m \ln^2 m} X^{1 - \frac{11}{9}\varrho}.$$

Лемма 6 (см. [2]). *Пусть*

$$D_l = (\mu m)^{\frac{m(m+1)}{2}l}; \qquad b_l = ml + \left[\frac{m(m+1)}{4}+1\right]; \qquad \nu = \frac{1}{m};$$

$m \geqslant 4; \quad f(x) = \alpha'_m x^m + \ldots + \alpha'_1 x; \quad l$ — *целое положительное.*

Тогда

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 \Big|\sum_{0<x\leqslant P} e^{2\pi i f(x)}\Big|^{2b_l} d\alpha'_m \ldots d\alpha'_1 < D_l P^{2b_l - \frac{m(m+1)}{2} + \frac{m(m+1)}{2}(1-\nu)^l}.$$

Лемма 7 (см. [2]). *Пусть* $m \geqslant 8$; $z \geqslant 10$ — *целое*; $\varkappa = 1/z$; $P > (25m)^m$, *причем* m-*мерный куб* $0 < \alpha'_m \leqslant 1, \ldots, 0 < \alpha'_1 \leqslant 1$ *разбит на малые* m-*мерные области — параллелепипеды с длинами сторон, соответственно равными* $d_m, \ldots, d_1$, *где*

$$d_r = \frac{1}{cmP^{r+\varkappa}}.$$

Тогда число таких малых областей, содержащих каждая по меньшей мере одну точку с условием

$$\Big|\sum_{0<x\leqslant P} e^{2\pi i f(x)}\Big| > P^{1-\varkappa}$$

не превосходит

$$(25m)^{\frac{m(m+1)}{2} m \ln z} P^{\frac{m(m+1)}{2}\cdot\frac{4\ln z}{z}}.$$

Лемма 8. *Пусть* $m = \left[\dfrac{\ln t}{\ln X}\right]+1$ и $X_0 < X < Bt^{1/(n+3)}$ *тогда, если* $F(a_1, \ldots, a_n)$ *знакопостоянна,*

$$|S| = \Big|\sum_{\substack{a<a_i\leqslant a' \\ (a_1,\ldots,a_n)\in K^{2X}\setminus K^X}} e^{2\pi i F(a_1,\ldots,a_n)}\Big| < CX^{1-\gamma/m^2},$$

где C *и* γ *зависят лишь от поля* K.

Доказательство (ср. [2]). Положим $Y = [X^{1/3}]$; $m_0 = 3m$;

$$b = lm_0 + \left[\frac{m_0(m_0+1)}{4}+1\right]; \qquad r = 2b;$$

x и y пробегают значения $1, 2, \ldots, Y$.

Заменяя в S a_i на $a_i + xy$, получаем, в силу неравенства (7),

$$|S| \leqslant \frac{1}{Y^2} \sum_{\substack{a<a_i\leqslant a' \\ (a_1,\ldots,a_n)\in K^{2X}\setminus K^X}} |S_{a_i}| + c_1 X^{2/3},$$

где

$$S_{a_i} = \sum_x \sum_y e^{2\pi i (A_1 xy + \ldots + A_{m_0} x^{m_0} y^{m_0})},$$

$$A_k = \frac{1}{2\pi k!} \cdot \frac{\partial^k F(a_1, \ldots, a_n)}{\partial u_i^k}.$$

Вводя обозначение $V_k = y_1^k + \ldots + y_b^k - y_{b+1}^k - \ldots - y_r^k$, получим

$$|S_{a_i}|^r \leqslant Y^{r-1} \sum_{y_1,\ldots,y_r} \Big|\sum_x e^{2\pi i (A_1 V_1 x + \ldots + A_{m_0} V_{m_0} x^{m_0})}\Big|, \tag{10}$$

где значениями V_k могут быть лишь целые числа η_k из интервала $-bY^k < \eta_k < bY^k$.

Разобьем в соответствии с условиями леммы 3 внутреннюю сумму в (10) на $\leqslant c_6^{m_0(m_0+1)/2}$ сумм. Для каждой из них оценим число N точек $(\{A_1\eta_1\}, \ldots, \{A_{m_0}\eta_{m_0}\})$, попадающих в заданную малую область леммы 7.

Если через k_s обозначить те значения k (при данном интервале суммирования), для которых верны неравенства (7) и (8), то имеем для $[3m/2] \leqslant k_s \leqslant 3m-3$ оценку числа значений $\{A_{k_s}\eta_{k_s}\}$, попадающих в интервал длиною d_{k_s} (т. к. $|A_{k_s}\eta_{k_s}| < 1$)

$$\leqslant \frac{d_{k_s}}{A_{k_s}} + 1 < 2bY^{k_s} Y^{2k_s - 3m+3}.$$

При k_s в интервале $m \leqslant k_s \leqslant [3m/2]-2$ имеем: $|A_{k_s}| > d_{k_s}$ и число значений $\{A_{k_s}\eta_{k_s}\}$, попадающих в интервал длиною d_{k_s}, не превосходит

$$\leqslant 2bY^{k_s} A_{k_s} + 1 < 2bY^{k_s} Y^{3m-2-3k_s}.$$

При всех остальных k число значений $\{A_k\eta_k\}$, попадающих в интервал длиною d_k, не превосходит $2bY^k$. Обозначая $G = \big(m_0(m_0+1)\big)/2$, имеем

$$N < (2b)^{m_0} Y^G \prod_{\left[\frac{3m}{2}\right]\leqslant k_s\leqslant 3m-3} Y^{k_s-3m+3} \prod_{m\leqslant k_s\leqslant\left[\frac{3m}{2}\right]-2} Y^{3m-2-3k_s} < (2b)^{m_0} Y^{G(1-\delta)},$$

где δ зависит только от степени поля K.

Из лемм 6 и 7 следует, что число слагаемых внутренней суммы, стоящей в правой части неравенства (10), превосходящих $Y^{1-\varkappa}$ будет

$$< (\mu m_0)^{Gm_0 \ln z} Y^{G\ln z/z} (\mu m_0)^{Gl} Y^{r-G+Ge^{-l/m_0}} (2b)^{m_0} Y^{G(1-\delta)} < CY^{r-\varkappa}$$

(при соответствующем выборе z и l). Сумма оставшихся слагаемых $\leqslant Y^{r+1-\varkappa}$.

Поэтому

$$|S_{a_i}|^r < CY^{2r-\varkappa}; \qquad |S_{a_i}| < CY^{2-\varkappa/r}$$

и

$$|S| < CX^{1-\gamma/m^2},$$

где C и γ зависят лишь от степени n поля K.

Лемма 9. *В области* $\sigma \geqslant 1-1/(n+1)$; $t>1$ *имеет место соотношение*

$$f_C(s) = \sum_{\substack{\mathfrak{a}\in C\\ 0<N(\mathfrak{a})<t^{n+1}}} N(\mathfrak{a})^{-s} + O(1).$$

Доказательство. Как известно (см. [5], § 26)

$$\psi(u, C) = \sum_{\substack{\mathfrak{a}\in C\\ 0<N\mathfrak{a}\leqslant u}} 1 = \mu u + O(u^{1-2/(n+1)}),$$

где μ зависит только от поля K.

Суммированием по частям получаем (в силу принципа аналитического продолжения — при $\sigma \geqslant 1-2/(n+1)$)

$$f_C(s) - \sum_{\substack{\mathfrak{a}\in C\\ 0<N\mathfrak{a}\leqslant z}} N(\mathfrak{a})^{-s} = -\mu\frac{z^{1-s}}{1-s} - \frac{\psi(z, C)-\mu z}{z^s} + s\int_z^\infty \frac{\psi(u, C)-\mu u}{u^{1+s}}\,du.$$

Отсюда вытекает утверждение леммы.

Лемма 10. *В области*

$$\sigma \geqslant \sigma_0 = 1-\frac{\gamma}{n}\left(\frac{\ln\ln t}{\ln t}\right)^{2/3}; \quad t>t_1$$

справедлива оценка

$$|\zeta_K(s)| \leqslant e^{c_{15}\ln\ln t}.$$

Доказательство. В силу равенств (1) и (4), а также леммы 9 имеем при $\sigma \geqslant 1-1/(n+1)$ и $t>1$

$$(11)\qquad |\zeta_K(s)| \leqslant \Bigg|\sum_{a_1}\cdots\sum_{\substack{a_n\\ x(a)\in\mathfrak{M}\cap\overline{V}\\ N(x(a))\leqslant t^{n+1}}} N\big(x(a)\big)^{-s}\Bigg| \leqslant$$

$$\leqslant \Bigg|\sum_{(a_1,\dots,a_n)\in K_0} N\big(x(a)\big)^{-s}\Bigg| + \sum_{i\geqslant 1}\Bigg|\sum_{\substack{(a_1,\dots,a_n)\in K_i\setminus K_{i-1}\\ N(x(a))<t^{n+1}}} N\big(x(a)\big)^{-s}\Bigg|,$$

где

$$K_i = K^{2^i t_0}; \quad t_0 = e^{c_{16}\ln^{2/3}t(\ln\ln t)^{1/3}}; \quad t>t_1.$$

Первую сумму оценим тривиально

$$\Bigg|\sum_{(a_1,\dots,a_n)\in K_0} N\big(x(a)\big)^{-s}\Bigg| \leqslant \sum_{k\leqslant Bt_0^n}\frac{\tau_n(k)}{k^{\sigma_0}} \leqslant \frac{t_0^{n(1-\sigma_0)}(\ln t_0)^{(n^2-1)/2}}{1-\sigma_0} \leqslant e^{c_{15}\ln\ln t}.$$

Каждую из оставшихся сумм разобьем на $2n$ слагаемых

$$\sum_{\substack{(a_1,\dots,a_n)\in K_i\setminus K_{i-1}\\ N(x(a))\leqslant t^{n+1}}} N\big(x(a)\big)^{-s} = \sum_{k=1}^{2n}\sum_{\substack{(a_1,\dots,a_n)\in B_{ki}\\ N(x(a))\leqslant t^{n+1}}} N\big(x(a)\big)^{-s} = \sum_{k=1}^{2n} S_{ki},$$

где B_{ki} — такой набор $(a_1,\dots,a_n)\in K_i\setminus K_{i-1}$, что

$$\left.\begin{matrix} 2^{i-1}t_0 < a_k \leqslant 2^i t_0\\ |a_1| \leqslant a_k\\ \dots\dots\dots\\ |a_n| \leqslant a_k\end{matrix}\right\}_{(k=1,2,\dots,n)} \quad\text{и}\quad \left.\begin{matrix} -2^i t_0 \leqslant a_{k-n} < -2^{i-1}t_0\\ |a_1| \leqslant -a_{k-n}\\ \dots\dots\dots\\ |a_n| \leqslant -a_{k-n}\end{matrix}\right\}_{(k=n+1,\dots,2n)}$$

Оценим S_{1i} (остальные суммы оцениваются аналогично) с помощью лемм 5 и 8.

Чтобы иметь возможность применять эти леммы, нужно только показать, что при фиксированных $a_1,\dots,a_{n-1}$ сумма S_{1i} распадается на конечное число (не зависящее от t) сумм вида (9). Для этого достаточно показать, что любая прямая $a\in\mathfrak{R}^n$ разбивается областью $\overline{V}$ на конечное число интервалов.

Пусть точки x' и x'', лежащие на прямой a, принадлежат $\overline{V}$ и $x = \gamma x' + (1-\gamma)x''$ $(0\leqslant\gamma\leqslant 1)$.

Из системы равенств (6) легко находятся $\xi_k(x)$ (для точек x' и x'' соответствующие $\xi_k\in[0,1)$)

$$\xi_k = c_{1k}\ln|x_1|^{e_1} + \dots + c_{rk}\ln|x_r|^{e_r}.$$

Следовательно, $\partial\xi_k/\partial\gamma = f_k(\gamma)/Nx$, где f_k — полином степени $\leqslant n-1$. Так как $\partial\xi_k/\partial\gamma$ может менять знак не более чем $(n-1)^2$ раз, отрезок прямой a между точками x' и x'' можно разбить не более, чем на rn^2 отрезков так, что на некоторых из них все $\xi_i\in[0,1)$, а на остальных хотя бы одно $\xi_i\notin[0,1)$. Это и есть искомое разбиение.

Кроме того, прямая a пересекает поверхность $f(u_1,\dots,u_n) = t^{n+1}$ в конечном числе точек.

При фиксированных $a_1,\dots,a_{n-1}$ $f(a_1,\dots,a_n)$ — полином степени n от a_n с вещественными коэффициентами, поэтому интервал изменения a_n можно разбить не более, чем на $2n$ интервалов, в каждом из которых $N\big(x(a)\big)$ монотонна и знакопостоянна.

Разбивая по этому принципу сумму S_{1i} на конечное число слагаемых вида (9) и суммируя по Абелю, получаем

$$|S_{1i}| = \Big|\sum_{2^{i-1}t_0\leqslant a_1<2^it_0}\ \sum_{|a_2|\leqslant a_1}\cdots\sum_{|a_n|\leqslant a_1} N\big(x(a)\big)^{-s}\Big| \leqslant$$

$$\leqslant X^{-n\sigma}\sum_{2^{i-1}t_0\leqslant a_1<2^it_0}\ \sum_{|a_2|\leqslant a_1}\cdots\sum_{|a_{n-1}|\leqslant a_1}\Big(\max_{a_n'\leqslant a_n''\leqslant a_n'''}\Big|\sum_{a_n'\leqslant a_n\leqslant a_n''} e^{2\pi i F(a_1,\ldots,a_n)}\Big| +$$

$$+\ldots+\max_{a_n'''\leqslant a_n^{\mathrm{IV}}\leqslant a_n^{\mathrm{V}}}\Big|\sum_{a_n'''\leqslant a_n\leqslant a_n^{\mathrm{IV}}} e^{2\pi i F(a_1,\ldots,a_n)}\Big|\Big),$$

где $-a_1\leqslant a_n'(a_1,\ldots,a_{n-1})\leqslant\ldots\leqslant a_n^{\mathrm{V}}(a_1,\ldots,a_{n-1})\leqslant a_1,\ X=2^it_0$.

По леммам 5 и 8 в области

$$\sigma\geqslant 1-\frac{\gamma}{n}\left(\frac{\ln\ln t}{\ln t}\right)^{2/3};\qquad t>t_1$$

верны оценки

$$|S_{1i}|\ll X^{n(1-\sigma)-\gamma\frac{\ln^2 x}{\ln^2 t}}\ll 1\qquad\text{при}\qquad X_0<X<B_1t^{\frac{1}{n+3}},$$

и

$$|S_{1i}|\ll X^{n(1-\sigma)-c_{11}\frac{\ln^2 X}{\ln^2 t\ln\ln t}}\ll 1\qquad\text{при}\qquad B_1t^{\frac{1}{n+3}}<X<Bt^{\frac{n+1}{n}}.$$

В силу симметрии так же оцениваются и S_{ki} при $k\geqslant 2$. Применяя полученные оценки к правой части неравенства (11) и учитывая, что число слагаемых при суммировании по i в (11) есть $\ll\ln t$, получаем утверждение леммы.

Лемма 11. *Пусть при $t\to\infty$ $|\zeta_K(s)|\ll e^{\varphi(t)}$ в области $1-\Theta(t)\leqslant\sigma\leqslant 2$, где $[\Theta(t)]^{-1}$ и $\varphi(t)$ — положительные неубывающие функции, такие, что $\Theta(t)\leqslant 1$, $\varphi(t)\to\infty$ и $\varphi(t)/\Theta(t)=o(e^{\varphi(t)})$.*

Тогда существует такое число $A>0$, зависящее только от поля, что $\zeta_K(s)$ не имеет нулей в области

$$\sigma\geqslant 1-\frac{A\Theta(2t+1)}{\varphi(2t+1)}.$$

Доказательство проводится так же, как в случае ζ-функции Римана ([10], стр. 62). Все необходимые для доказательства свойства $\zeta_K(s)$ описаны в монографии [5] (§§ 18-19).

Из лемм 10 и 11 очевидно следует теорема 1.

Как обычно, доказываются теперь теоремы:

Теорема 4.

$$\zeta_K(1+it)\ll\ln^{2/3}(|t|+3).$$

Теорема 5. *Пусть $\pi(x)$ — число простых идеалов поля K с нормой, не превосходящей x. Тогда*

$$\pi(x)=\mathrm{li}\,x+O(x\exp\{-\delta\ln^{3/5}x(\ln\ln x)^{-1/5}\}),$$

где δ зависит лишь от поля K.

Для доказательства теоремы 2 воспользуемся приближенным функциональным уравнением для $\zeta_K(s)$ (см. [14]):

$$\zeta_K(s)=\sum_{N\mathfrak{a}\leqslant x}(N\mathfrak{a})^{-s}+B^{2s-1}\frac{\Delta(1-s)}{\Delta(s)}\sum_{N\mathfrak{a}\leqslant y}(N\mathfrak{a})^{s-1}+O(x^{1-\sigma-1/n}\ln x),$$

где $xy=c|t|^n$; $c_1<x/y<c_2$; $B=2^{r_2}\pi^{n/2}|d|^{-1/2}$ (d — дискриминант поля K), $\Delta(s)=\Gamma^{r_1}(s/2)\Gamma^{r_2}(s)$. Из него очевидно следует, что

$$|\zeta_K(\tfrac{1}{2}+it)|\ll\Big|\sum_{N\mathfrak{a}\leqslant c'|t|^{n/2}}(N\mathfrak{a})^{-1/2\pm it}\Big|+|t|^{n/4-1/2}\ln|t|.$$

Так же, как при доказательстве леммы 10, вопрос сводится к оценке сумм, аналогичных S_{ki}, например,

$$S_{1i}'=\sum_{2^{i-1}t_0\leqslant a_1<2^it_0}\ \sum_{|a_2|\leqslant a_1}\cdots\sum_{|a_n|\leqslant a_1}N\big(x(a)\big)^{-1/2\pm it},$$

где $t_0=c''t^{1/3}$, а $2^it_0<c''t^{1/2}$. Применяя лемму 5 (где, очевидно, $2c_{13}\leqslant m_1\leqslant 3c_{13}$), получаем утверждение теоремы 2.

Доказательство теоремы 3 — это дословное повторение классических рассуждений (см. [6], [13]). Свойства функции

$$\psi_K(x)=\sum_{N(\mathfrak{p})^m\leqslant x}\ln N\mathfrak{p},$$

аналогичные свойствам

$$\psi(x)=\sum_{p^m\leqslant x}\ln p,$$

необходимые в ходе доказательства, содержатся фактически в теоремах 196 и 197 монографии [5].

Хотя в отдельных случаях (например, чисто вещественного поля) для оценки $\zeta_K(1/2+it)$ применимы методы Г. Вейля или Ван дер Корпута (что дает в теоремах 2 и 3 соответственно $n/4-1/12$ и $\Theta>(3n+2)/(3n+5)$) не видно, как можно использовать эти методы в случае произвольного поля.

Заметим, что методы настоящей статьи позволяют доказать аналог теоремы 1 для Z функций Гекке с характерами величины (A будет однако зависеть не только от поля, но и от характера величины).

Цитированная литература

[1] З. И. Боревич и И. Р. Шафаревич, *Теория чисел*, Москва 1964.

[2] И. М. Виноградов, *К вопросу об оценке тригонометрических сумм*, Известия АН СССР, 29, № 3 (1965), стр. 493-504.

[3] — *Избранные труды*, Москва 1952, стр. 379-384.

[4] И. П. Кубилюс, Матемaтический сборник 31, № 3 (1952).

[5] E. Landau, *Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale*, New York, 1949.

[6] K. Prachar, *Primzahlverteilung*, Springer Verlag, 1959.

[7] А. В. Соколовский, *О нулях дзета-функции Дедекинда*, Известия АН УзССР 1 (1966), стр. 40-50.

[8] — *Плотностные теоремы для класса дзета-функций*, Известия АН УзССР 3 (1966), стр. 33-40.

[9] — *Расстояние между „соседними" простыми идеалами*, Доклады АН СССР 172(6)(1967).

[10] Е. Титчмарш, *Теория дзета-функции Римана*, Москва 1953.

[11] P. Turán, Acta Mathematica Acad. Scient. Hung. 11 (3-4), 1960.

[12] И. Ю. Урбялис, *Распределение простых алгебраических чисел*, Литовский математический сборник 5, № 3 (1965), стр. 504-516.

[13] Хуа Ло-Ген, *Метод тригонометрических сумм и его применения в теории чисел*, Москва 1964.

[14] K. Chandrasekharan and R. Narasihman, Mathematische Annalen, Band 152.

ТАШКЕНТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. В. И. ЛЕНИНА

Reçu par la Rédaction le 14. 2. 1967

ACTA ARITHMETICA
XIII (1968)

A covering class of residues with odd moduli

by

JAMES H. JORDAN (Pullman, Washington)

1. Introduction. In 1952 P. Erdös [2] introduced the following concept:

DEFINITION. A finite set of ordered pairs of integers $\{(a_i, m_i)\}$ with all m_i distinct and larger than 1 is called a *covering* class of residues if each integer, n, satisfies at least one of the congruential equation $n \equiv a_i \pmod{m_i}$.

The problems posed by Erdös are:

QUESTION 1. *Does there exist a covering class of residues with all $m_i > n$ for each positive integer n?*

and,

QUESTION 2. *Does there exist a covering class of residues with all m_i odd?*

Erdös [3] offered a reward of \$ 50 for a proof of the answer to question 1 and a \$ 25 reward for the proof of a negative answer to question 2. J. Selfridge [5] offered a \$ 250 reward for a positive answer to question 2 and the example.

Erdös exhibited [1] a covering class of residues with all $m_i > 2$. J. D. Swift [1] and the author [4] exhibited covering classes of residues with all $m_i > 3$. J. Selfridge [5] announced that he has a covering class of residues with all $m_i > 7$.

Recently the author [4] generalized these concepts with the following:

DEFINITION. A finite set of ordered pairs of Gaussian Integers $\{(a_j, \gamma_j)\}$ with all $|\gamma_j| > 1$ and $\gamma_k \neq \gamma_j \varepsilon$, $k \neq j$, where $\varepsilon = \pm 1$ or $\pm i$, is called a *covering class of residues in G* if every Gaussian Integer β satisfies at least one of the congruential equations

$$\beta \equiv a_j \pmod{\gamma_j}.$$

The analogous problems were posed