ACTA ARITHMETICA
XIII (1968)

Obere und untere Abschätzungen in algebraischen Zahlkörpern mit Hilfe des linearen Selbergschen Siebes*

by

W. Schaal (Marburg)

Es sei K ein algebraischer Zahlkörper vom Grade n und der Diskriminante d über dem Körper der rationalen Zahlen. Ist ξ eine Zahl aus K, so werden mit $\xi^{(h)}$, $h \doteq 1, \ldots, n$, die n Konjugierten von ξ bezeichnet. Mit $N\xi = \xi^{(1)} \ldots \xi^{(n)}$ werde die Norm von ξ bezeichnet. Die Zahlen r_1, r_2 seien in der üblichen Weise definiert, insbesondere ist also $n = r_1 + 2r_2$.

Untere Abschätzungen mittels der Selbergschen Siebmethode sind bereits im Körper der rationalen Zahlen sehr viel schwieriger zu bekommen als obere (vergl. hierzu A. Selberg, [14], [15]). Insbesondere sind daher auch nur wenige Anwendungen eines „unteren Siebes" in Zahlkörpern bekannt, wohingegen die Methode der oberen Abschätzungen dort mehrfach angewandt wurde. Für untere Abschätzungen sei auf die Arbeiten von Rademacher ([11]), A. I. Vinogradoff ([17], [18]) und Andruhaev ([1]) verwiesen. In all diesen Arbeiten wird das Goldbachproblem in Zahlkörpern behandelt, wobei sich Rademacher nur elementarer Hilfsmittel bedient, während die beiden anderen Autoren die Theorie der Dedekindschen Zetafunktion bzw. der Heckeschen L-Funktionen verwenden. Obere Abschätzungen für eine größere Anzahl von Problemen findet man bei Lenskoi ([10]), Rieger ([12]) und Tatuzawa ([16]).

In den kürzlich erschienenen Arbeiten von Ankeny und Onishi ([2]) und Jurkat und Richert ([7]) wird nun gezeigt, daß man unter gewissen Voraussetzungen untere Abschätzungen bei Siebproblemen durch eine einfache Identität auf obere Abschätzungen zurückführen kann. Dabei beschränken sich Jurkat und Richert auf den sog. „linearen" Fall des Siebes und leiten Resultate über die Verteilung von Fastprimzahlen (Zahlen mit einer beschränkten Anzahl von Primfaktoren) in arithmetischen Progressionen her. Es ist das Ziel dieser Arbeit, die von ihnen

* Diese Arbeit wurde von der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Marburg im Juni 1966 als Habilitationsschrift angenommen.

angegebenen Resultate auf Zahlkörper zu übertragen. Dabei wird nicht genau die Methode aus [7] befolgt, sondern eine Methode verwendet, die von Jurkat und Richert in einer Seminarausarbeitung angegeben wurde. Auf die Weise läßt sich die Beziehung (4.3) aus [7] umgehen. An ihre Stelle tritt der Satz 2.1, der eine Verallgemeinerung eines Ergebnisses obiger Seminarausarbeitung darstellt. Man erhält folgende Sätze:

Satz 1. *Sei K ein algebraischer Zahlkörper vom Grade n. Die positiven Zahlen $y_1, \ldots, y_n$ mit dem Produkt $y := y_1 \ldots y_n$ sollen die folgenden Bedingungen erfüllen:*

$$y_{r_1+\nu} = y_{r_1+r_2+\nu}, \quad \nu = 1, \ldots, r_2; \quad y_\nu \geqslant A y^{1/n}, \quad \nu = 1, \ldots, n; \quad 0 < A \leqslant 1.$$

Sei $\mathfrak{k}$ ein ganzes Ideal aus K, $\beta \in K$ eine ganze Zahl mit $(\beta, \mathfrak{k}) = 1$. Sei $\varepsilon > 0$. Für alle $\mathfrak{k}$ mit $N\mathfrak{k} \geqslant k_0(\varepsilon, A, K)$ gilt dann mit $y = (N\mathfrak{k})^{25/11+\varepsilon}$: Es existiert mindestens eine ganze Zahl $\xi \in K$ mit

$$\xi \equiv \beta \bmod \mathfrak{k};$$
$$0 < \xi^{(\nu)} \leqslant y_\nu, \quad \nu = 1, \ldots, r_1; \quad |\xi^{(\nu)}| \leqslant y_\nu, \quad \nu = r_1+1, \ldots, n;$$
$$\Omega(\xi) \leqslant 2,$$

wobei $\Omega(\xi)$ die Anzahl aller Primidealteiler von ξ ist.

Satz 2. *Sei K ein total reeller algebraischer Zahlkörper vom Grade n Für die y_ν, $\mathfrak{k}$ und β gelte dasselbe wie in Satz 1. Die positiven Zahlen $h_1, \ldots, h_n$ mit dem Produkt $H := h_1 \ldots h_n$ sollen die folgenden Bedingungen erfüllen:*

$$0 < h_\nu N\mathfrak{k}^{1/n} \leqslant y_\nu; \quad h_\nu \geqslant A H^{1/n}, \quad \nu = 1, \ldots, n.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Für $y \geqslant y_0(\varepsilon, A, K)$, $y^{11/25-\varepsilon} \geqslant N\mathfrak{k}$ gilt mit $H = y^{14/25+\varepsilon}$: Es gibt mindestens eine ganze Zahl $\xi \in K$, die den Bedingungen

$$\xi \equiv \beta \bmod \mathfrak{k};$$
$$y_\nu - h_\nu N\mathfrak{k}^{1/n} < \xi^{(\nu)} \leqslant y_\nu, \quad \nu = 1, \ldots, n;$$
$$\Omega(\xi) \leqslant 2$$

genügt.

Man vergleiche zu diesen Sätzen die Arbeiten von Fogels ([4], [5], [6]) und Rieger ([13]), die die Methode von Linnik-Rodosskii auf Zahlkörper übertragen, um ähnliche Probleme über die Verteilung von Primidealen in Idealklassen mod $\mathfrak{k}$ zu lösen.

Die in der Arbeit auftretenden Konstanten $c_0, \ldots, c_{31}$ sind stets positiv und, ebenso wie die auftretenden O-Konstanten, nur vom Körper K und von der Zahl $0 < A \leqslant 1$ aus (1.26) abhängig, falls nichts anderes gesagt ist. Insbesondere sind alle auftretenden Konstanten vom Ideal $\mathfrak{k}$ unabhängig.

§ 1. Zum Beweis der in der Einleitung genannten Resultate benötigt man mehrere Hilfsfunktionen, die im folgenden eingeführt werden sollen. Sei

$$\begin{cases} w(u) := u^{-1} & \text{für} \quad 1 \leqslant u \leqslant 2, \\ (uw(u))' := w(u-1) & \text{für} \quad u \geqslant 2; \end{cases} \tag{1.1}$$

$$\begin{cases} D(u) := u & \text{für} \quad 0 \leqslant u \leqslant 1, \\ (u^{-1}D(u))' := -u^{-2}D(u-1) & \text{für} \quad u \geqslant 1; \end{cases} \tag{1.2}$$

dabei ist an den Endpunkten die rechtsseitige Ableitung gemeint. Die Funktionen $w(u)$, $D(u)$ sollen an den Endpunkten $u = 2$ bzw. $u = 1$ stetig sein. Mit diesen Funktionen definiere man weiter:

$$\left.\begin{aligned} L(u) &:= e^\gamma\big(uw(u)+D'(u-1)\big) \\ l(u) &:= e^\gamma\big(uw(u)-D'(u-1)\big) \end{aligned}\right\} \quad \text{für} \quad u \geqslant 1, \tag{1.3}$$

wo γ die Eulersche Konstante ist.

Ferner

$$\left.\begin{aligned} \Lambda(u) &:= u^{-1}L(u), & F(u) &:= \Lambda(u)-1 \\ \lambda(u) &:= u^{-1}l(u), & f(u) &:= 1-\lambda(u) \end{aligned}\right\} \quad \text{für } u \geqslant 1. \tag{1.4}$$

Schließlich sei noch

$$F_0(u) := e^\gamma \Big/ D\left(\frac{u}{2}\right) - 1 \quad \text{für} \quad u \geqslant 1; \tag{1.5}$$

$$f_\nu(u) := \begin{cases} 1 & \text{für} \quad 1 \leqslant u < 2, \\ u^{-1} \int\limits_{u-1}^{\infty} F_\nu(t)\,dt & \text{für} \quad u \geqslant 2; \end{cases} \tag{1.6}$$

$$F_{\nu+1}(u) := \begin{cases} 2e^\gamma/u - 1 & \text{für} \quad 1 \leqslant u < 2, \\ u^{-1} \int\limits_{u-1}^{\infty} f_\nu(t)\,dt & \text{für} \quad u \geqslant 2, \end{cases} \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots \tag{1.7}$$

Die Funktion $w(u)$ ist stetig für $u \geqslant 1$, und es gilt:

$$w(u) = e^{-\gamma} + O(e^{-u}) \quad \text{für} \quad u \geqslant 1 \tag{1.8}$$

(s. de Bruijn, [3]; die Funktion $w(u)$ ist dort mit $\omega(u)$ bezeichnet). Die Funktion $D(u)$ ist stetig differenzierbar für $u \geqslant 0$, bei $u = 0$ rechtsseitig. Man erkennt unmittelbar, daß $D'(u)$ mit $\tau_1(u)$ bei Ankeny und Onishi ([2]) für $u > 0$ übereinstimmt. Aus den dortigen Untersuchungen der Funktionen $\tau_a(u)$ folgen für $a = 1$ und $D'(0) = 1$ sofort die Ergebnisse:

(1.9) $D'(u) > 0$ für $u \geqslant 0$, also ist $D(u)$ monoton zunehmend;

$$D'(u) = O(e^{-2u}) \quad \text{für} \quad u \geqslant 0; \tag{1.10}$$

$$D(\infty) = e^\gamma, \tag{1.11}$$

und daher wegen (1.9)

(1.12) $$0 \leqslant D(u) \leqslant e^{\gamma} \quad \text{für} \quad u \geqslant 0;$$

(1.13) $$e^{\gamma}-D(u) = O(e^{-2u}) \quad \text{für} \quad u \geqslant 0.$$

Aus (1.2) und (1.11) folgt noch:

(1.14) $$u^{-1}D(u) = \int\limits_{u}^{\infty} t^{-2}D(t-1)\,dt \quad \text{für} \quad u \geqslant 1.$$

Aus den entsprechenden Definitionen erhält man

(1.15) $$\Lambda(u) = \frac{2e^{\gamma}}{u}, \quad \lambda(u) = 0 \quad \text{für} \quad 1 \leqslant u \leqslant 2,$$

und daher

(1.16) $$F(u) = \frac{2e^{\gamma}}{u} - 1, \quad f(u) = 1 \quad \text{für} \quad 1 \leqslant u \leqslant 2.$$

Wegen (1.8) und (1.10) gilt

(1.17) $$F(u) = O(e^{-u}), \quad f(u) = O(e^{-u}) \quad \text{für} \quad u \geqslant 1$$

(natürlich hängen diese 0-Konstanten weder von K noch von A ab).
Aus (1.3) erhält man wegen (1.1), (1.2) leicht

$$L'(u) = \lambda(u-1), \quad l'(u) = \Lambda(u-1) \quad \text{für} \quad u \geqslant 2,$$

und daher:

$$\big(uF(u)\big)' = -f(u-1), \quad \big(uf(u)\big)' = -F(u-1) \quad \text{für} \quad u \geqslant 2.$$

Das ergibt wegen (1.17)

(1.18) $$F(u) = u^{-1}\int\limits_{u-1}^{\infty} f(t)\,dt, \quad f(u) = u^{-1}\int\limits_{u-1}^{\infty} F(t)\,dt \quad \text{für} \quad u \geqslant 2.$$

Wegen (1.12) folgt aus (1.5)

$$F_0(u) \geqslant 0 \quad \text{für} \quad u \geqslant 1,$$

und somit ergibt sich aus (1.6), (1.7) insgesamt:

(1.19) $$F_\nu(u) \geqslant 0, \quad f_\nu(u) \geqslant 0 \quad \text{für} \quad \nu = 0,1,2,\ldots \text{ und } u \geqslant 1.$$

Wegen (1.9) ersieht man daraus auch

(1.20) $F_\nu(u), f_\nu(u)$ sind monoton fallend in $1 \leqslant u < 2$ und auch in $2 \leqslant u$ für $\nu = 0,1,2,\ldots$

Lemma 1.1. *Es gibt eine absolute Konstante $c_0 > 0$ (also unabhängig von K, A) mit:*

(1.21) $$\begin{cases} |F_\nu(u)-F(u)| \leqslant c_0\left(\dfrac{e}{3}\right)^{2\nu} e^{-u} \\ |f_\nu(u)-f(u)| \leqslant c_0\left(\dfrac{e}{3}\right)^{2\nu+1} e^{-u} \end{cases} \quad \textit{für} \quad u \geqslant 1,\ \nu = 0,1,2,\ldots$$

Beweis. Für $F_0(u)$ folgt die Behauptung aus (1.5), (1.13), (1.17) und $D(u/2) \geqslant \frac{1}{2}$ für $u \geqslant 1$. Somit folgt sie auch sofort für $f_0(u)$. Sei $M := \max(2, u-1)$. Dann gilt wegen (1.16), (1.18)

(1.22) $$F_\nu(u)-F(u) = \begin{cases} 0 & \text{für } 1 \leqslant u < 2, \\ u^{-1}\displaystyle\int\limits_{M}^{\infty}[f_{\nu-1}(t)-f(t)]\,dt & \text{für } u \geqslant 2,\ \nu = 1,2,\ldots \end{cases}$$

(1.23) $$f_\nu(u)-f(u) = \begin{cases} 0 & \text{für } 1 \leqslant u < 2, \\ u^{-1}\displaystyle\int\limits_{M}^{\infty}[F_\nu(t)-F(t)]\,dt & \text{für } u \geqslant 2,\ \nu = 1,2,\ldots \end{cases}$$

Die Behauptung ist daher nur noch für $u \geqslant 2$ zu zeigen. Sie gelte für $\nu-1 \geqslant 0$. Dann folgt aus (1.22):

$$|F_\nu(u)-F(u)| \leqslant u^{-1}\int\limits_{M}^{\infty} c_0\left(\frac{e}{3}\right)^{2\nu-1} e^{-t}\,dt = c_0\left(\frac{e}{3}\right)^{2\nu-1}\frac{e^{-M}}{u}.$$

Daraus folgt (1.21) für $F_\nu(u)$ wegen der Erklärung von M. Aus (1.23) folgt nunmehr die Behauptung für $f_\nu(u)$ ebenso. Damit ist (1.21) vollständig gezeigt.

Wegen (1.21) und (1.17) gilt mit einer absoluten Konstanten:

(1.24) $$F_\nu(u) = O(e^{-u}), \quad f_\nu(u) = O(e^{-u}) \quad \text{für} \quad \nu = 0,1,2,\ldots$$

und $u \geqslant 1$. Wegen (1.19), (1.21) sind $F(u) \geqslant 0$, $f(u) \geqslant 0$ für $u \geqslant 1$; wegen (1.16), (1.17), (1.18) sind daher beide für $u \geqslant 1$ gegen 0 fallend. Wegen (1.15) kann man $F(u)$ durch die Festsetzung

$$F(u) := \frac{2e^{\gamma}}{u} - 1 \quad \text{für} \quad 0 < u \leqslant 1$$

stetig bis 0 fortsetzen. Setzt man $\Lambda(u)$ nach (1.4) ebenfalls bis 0 fort, dann gilt:

Lemma 1.2. *$\Lambda(u)$ ist eine für $u > 0$ stetige, monoton gegen 1 abnehmende Funktion. Insbesondere gilt*

$$\Lambda(u) = \frac{2e^{\gamma}}{u} \quad \textit{für} \quad 0 < u \leqslant 1.$$

$\lambda(u)$ ist eine für $u \geqslant 1$ stetige, monoton zunehmende Funktion mit $0 \leqslant \lambda(u) \leqslant 1$.

Für die folgenden Rechnungen ist es nützlich, eine Anordnung der Primideale $\mathfrak{p}$ von K einzuführen. Zu dem Zweck ordne man die Primideale $\mathfrak{p}$ nach der Größe ihrer Norm an, das heißt, $\mathfrak{p}_\nu$ komme vor $\mathfrak{p}_\mu$, falls $N\mathfrak{p}_\nu < N\mathfrak{p}_\mu$ ist. Haben mehrere Primideale gleiche Norm, dann ordne man diese beliebig, aber fest an. (Da für zwei Primideale $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ mit gleicher Norm gelten muß, daß sie Teiler derselben rationalen Primzahl p sind, und da eine rationale Primzahl in höchstens n verschiedene Primideale zerfällt, gibt es höchstens n verschiedene Primideale mit gleicher Norm.) Man setze noch $\mathfrak{p}_0 := (1)$.

Für ein ganzes Ideal $\mathfrak{a}$ des Körpers K sei $p(\mathfrak{a}) := \max\limits_{\mathfrak{p}_\nu | \mathfrak{a}} \nu$. Bezeichnen $\mu(\mathfrak{a})$ die Möbiussche, $\varphi(\mathfrak{a})$ die Eulersche Funktion für Ideale, und ist $\mathfrak{k}$ ein ganzes Ideal aus K, dann sei für ganzes rationales $\varrho \geqslant 0$:

$$(1.25)\qquad S_{\mathfrak{k}}(x,\varrho) := \sum_{\substack{1 \leqslant N\mathfrak{a} \leqslant x\\ p(\mathfrak{a}) \leqslant \varrho\\ (\mathfrak{a},\mathfrak{k})=1}} \frac{\mu^2(\mathfrak{a})}{\varphi(\mathfrak{a})}; \qquad R_{\mathfrak{k}}(\varrho) := \prod_{\nu=1}^{\varrho}{}' (1 - N\mathfrak{p}_\nu^{-1}),$$

wo der Strich am Produktzeichen besagt: $\mathfrak{p}_\nu \nmid \mathfrak{k}$ (dieselbe Bedeutung soll der Strich auch bei Summen über Primideale haben).

Es soll noch gelten, daß leere Summen $= 0$, leere Produkte $= 1$ sind. Seien $y_1, \ldots, y_n$ positive reelle Zahlen mit dem Produkt $y := y_1 \ldots y_n$ und den Eigenschaften:

$$(1.26)\qquad \begin{cases} y_{r_1+\nu} = y_{r_1+r_2+\nu} \quad \text{für} \quad \nu = 1, \ldots, r_2; \\ \text{es gibt eine Konstante } 0 < A \leqslant 1 \text{ mit } y_h \geqslant A y^{1/n}, \quad h = 1, \ldots, n. \end{cases}$$

Sei $\mathfrak{a}$ ein ganzes Ideal aus K, $\beta \in K$ eine ganze Zahl mit $(\beta, \mathfrak{a}) = 1$; dann sei

$$(1.27)\qquad M := \left\{ \xi;\ \xi \equiv \beta \bmod \mathfrak{a};\ \begin{array}{l} 0 < \xi^{(h)} \leqslant y_h,\ h = 1, \ldots, r_1 \\ |\xi^{(h)}| \leqslant y_h, \quad h = r_1+1, \ldots, n \end{array} \right\},$$

wo ξ ganze Zahlen aus K sind und die y_h (1.26) genügen. Bezeichnet $|M|$ die Anzahl der Elemente von M, so gilt:

$$(1.28)\qquad |M| = B \cdot \frac{y}{N\mathfrak{a}} + O\left\{\left(\frac{y}{N\mathfrak{a}}\right)^{1-1/n} + 1\right\}, \quad \text{mit} \quad B = \frac{(2\pi)^{r_2}}{|\sqrt{d}|}.$$

(Dieses Resultat läßt sich beispielsweise aus [12], III., Hilfssatz 9 herleiten.)

§ 2. Für ein ganzes Ideal $\mathfrak{k}$ aus K bezeichne $\omega(\mathfrak{k})$ die Anzahl der verschiedenen Primidealteiler von $\mathfrak{k}$. Es gilt:

$$(2.1)\qquad \omega(\mathfrak{k}) = O\left(\frac{\log N\mathfrak{k}}{\log\log 3N\mathfrak{k}}\right).$$

Beweis. Sei $\mathfrak{k} \neq (1)$, $\mathfrak{k} = \mathfrak{p}_{\nu_1}^{l_1} \ldots \mathfrak{p}_{\nu_\omega}^{l_\omega}$, $l_i \geqslant 1$ für $i = 1, \ldots, \omega$, wobei die $\mathfrak{p}_{\nu_i}$ paarweise voneinander verschieden sind und $\omega = \omega(\mathfrak{k})$ ist. Dann gilt für $\omega \geqslant \omega_0$:

$$\begin{aligned} N\mathfrak{k} &= (N\mathfrak{p}_{\nu_1})^{l_1} \ldots (N\mathfrak{p}_{\nu_\omega})^{l_\omega} \geqslant N\mathfrak{p}_1 \ldots N\mathfrak{p}_\omega \\ &\geqslant (N\mathfrak{p}_1 \ldots N\mathfrak{p}_n) \cdot (N\mathfrak{p}_{n+1} \ldots N\mathfrak{p}_{2n}) \ldots (\ldots N\mathfrak{p}_{[\omega/n]n}) \\ &\geqslant p_1^n \cdot p_2^n \ldots p_{[\omega/n]}^n \quad (p_i \text{ sei die } i\text{-te rationale Primzahl}) \\ &\geqslant ([\omega/n]!)^n; \end{aligned}$$

daher:

$$\log N\mathfrak{k} \geqslant n \log\left(\left[\frac{\omega}{n}\right]!\right) \geqslant c_1 \left[\frac{\omega}{n}\right] \cdot \log\left[\frac{\omega}{n}\right] \geqslant c_2\, \omega \log \omega,$$

also

$$\omega \leqslant c_3 \frac{\log N\mathfrak{k}}{\log\log 3N\mathfrak{k}} \quad \text{für} \quad \omega \geqslant \omega_0.$$

Daraus folgt (2.1) mit einer geeigneten Konstanten c_4.

Es gilt:

$$(2.2)\qquad c_5 r \log(r+1) \leqslant N\mathfrak{p}_r \leqslant c_6 r \log(r+1) \quad \text{für} \quad r \geqslant 1.$$

Beweis. Es ist

$$r \leqslant \pi(N\mathfrak{p}_r) \leqslant c_7 \frac{N\mathfrak{p}_r}{\log N\mathfrak{p}_r}, \quad \text{insbesondere} \quad r \leqslant c_8 N\mathfrak{p}_r$$

(Landau, [9], S. 111). Also: $\log(r+1) \leqslant c_9 \log N\mathfrak{p}_r$, und somit

$$N\mathfrak{p}_r \geqslant c_7^{-1} r \log N\mathfrak{p}_r \geqslant c_5 r \log(r+1).$$

Entsprechend gilt:

$$r = \pi(N\mathfrak{p}_r) - m,$$

wo m die Anzahl der $\mathfrak{p}_\nu$ mit $N\mathfrak{p}_\nu = N\mathfrak{p}_r$ und $\nu > r$ ist, also $0 \leqslant m \leqslant n-1$; deshalb:

$$r = \frac{N\mathfrak{p}_r}{\log N\mathfrak{p}_r} + O\left(\frac{N\mathfrak{p}_r}{\log^2 N\mathfrak{p}_r}\right),$$

und daher

$$r \geqslant c_{10} \frac{N\mathfrak{p}_r}{\log N\mathfrak{p}_r}.$$

Daraus folgt: $\log(r+1) \geqslant c_{11} \log N\mathfrak{p}_r$, also

$$N\mathfrak{p}_r \leqslant c_{10}^{-1} r \log N\mathfrak{p}_r \leqslant c_{12} r \log(r+1).$$

Daraus ergibt sich (2.2).

Lemma 2.1. *Bezeichnet α_K das Residuum der Dedekindschen Zetafunktion, $\zeta_K(s)$, dann gilt:*

$$R_1(r) = \frac{e^{-\gamma}}{\alpha_K \log N\mathfrak{p}_r} + O\left(\frac{1}{\log^2 N\mathfrak{p}_r}\right), \quad r \geqslant 1; \tag{2.3}$$

$$R_1(r)^{-1} = \alpha_K e^{\gamma} \log N\mathfrak{p}_r + O(1), \quad r \geqslant 1. \tag{2.4}$$

Beweis. Für $x \geqslant 2$ gilt (Landau, [8], S. 152)

$$\sum_{N\mathfrak{p}\leqslant x} \frac{1}{N\mathfrak{p}} = \log\log x + (\log \alpha_K + \gamma - H_K) + O\left(\frac{1}{\log x}\right) \tag{2.5}$$

mit $H_K = \sum_{\mathfrak{p},\nu=2}^{\infty} \frac{1}{\nu N\mathfrak{p}^{\nu}}$. Daraus folgt für $R_1^*(x) := \prod_{N\mathfrak{p}\leqslant x} (1-N\mathfrak{p}^{-1})$:

$$\log R_1^*(x) = \sum_{N\mathfrak{p}\leqslant x} \log(1-N\mathfrak{p}^{-1}) = -\sum_{N\mathfrak{p}\leqslant x} N\mathfrak{p}^{-1} - \sum_{N\mathfrak{p}\leqslant x} \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{1}{\nu N\mathfrak{p}^{\nu}}$$

$$= -\log\log x - \log \alpha_K - \gamma + O\big((\log x)^{-1}\big) + \sum_{N\mathfrak{p}> x} \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{1}{\nu N\mathfrak{p}^{\nu}}$$

$$= -\log(\alpha_K e^{\gamma} \log x) + O\big((\log x)^{-1}\big),$$

da der letzte Term der vorletzten Zeile $= O(x^{-1})$ ist. Also folgt:

$$R_1^*(x) = \frac{e^{-\gamma}}{\alpha_K \log x} + O\big((\log x)^{-2}\big), \quad R_1^*(x)^{-1} = \alpha_K e^{\gamma} \log x + O(1).$$

Wegen

$$R_1(r) = \frac{R_1^*(N\mathfrak{p}_r)}{\prod\limits_{N\mathfrak{p}_\nu = N\mathfrak{p}_r, \nu > r} (1-N\mathfrak{p}_\nu^{-1})} = R_1^*(N\mathfrak{p}_r)(1-N\mathfrak{p}_r^{-1})^{-m}$$

$$= R_1^*(N\mathfrak{p}_r)\{1+O\big((N\mathfrak{p}_r)^{-1}\big)\}$$

folgen daraus (2.3), (2.4).

Wegen (2.5) gilt

$$\sum_{\nu=1}^{r} \frac{1}{N\mathfrak{p}_\nu} = \log\log N\mathfrak{p}_r + (\log \alpha_K + \gamma - H_K) + O\big((\log N\mathfrak{p}_r)^{-1}\big), \quad r \geqslant 1. \tag{2.6}$$

Es gilt:

$$\frac{N\mathfrak{k}}{\varphi(\mathfrak{k})} = O(\log\log 3N\mathfrak{k}), \tag{2.7}$$

denn für $\mathfrak{k} \neq (1)$ ist

$$\frac{N\mathfrak{k}}{\varphi(\mathfrak{k})} = \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{k}} (1-N\mathfrak{p}^{-1})^{-1} \leqslant \prod_{\nu=1}^{\omega(\mathfrak{k})} (1-N\mathfrak{p}_\nu^{-1})^{-1} = R_1(\omega)^{-1}$$

$$= \alpha_K e^{\gamma} \log N\mathfrak{p}_\omega + O(1) = O(\log N\mathfrak{p}_\omega) \quad \text{wegen (2.4)},$$

$$= O\big(\log 3\omega(\mathfrak{k})\big) = O(\log\log 3N\mathfrak{k}) \quad \text{wegen (2.2), (2.1)}.$$

Lemma 2.2.

$$\frac{R_{\mathfrak{k}}(\sigma)}{R_{\mathfrak{k}}(\varrho)} = O\left(\frac{\log N\mathfrak{p}_\varrho}{\log N\mathfrak{p}_\sigma}\right), \quad \varrho \geqslant \sigma \geqslant 1; \tag{2.8}$$

$$\frac{1}{R_{\mathfrak{k}}(\varrho)} = O(\log N\mathfrak{p}_\varrho) + O(1), \quad \varrho \geqslant 0; \tag{2.9}$$

$$R_{\mathfrak{k}}(\varrho) = O\left(\frac{\log\log 3N\mathfrak{k}}{\log N\mathfrak{p}_\varrho}\right), \quad \varrho \geqslant 1; \tag{2.10}$$

$$\frac{R_{\mathfrak{k}}(\sigma)}{R_{\mathfrak{k}}(\varrho)} = \frac{\log N\mathfrak{p}_\varrho}{\log N\mathfrak{p}_\sigma} + O\left(\frac{\log N\mathfrak{p}_\varrho \log\log 3N\mathfrak{k}}{\log^2 N\mathfrak{p}_\sigma}\right), \quad \varrho \geqslant \sigma \geqslant 1; \tag{2.11}$$

$$\frac{R_{\mathfrak{k}}(\varrho)}{R_{\mathfrak{k}}(\sigma)} = \frac{\log N\mathfrak{p}_\sigma}{\log N\mathfrak{p}_\varrho} + O\left(\frac{\log\log 3N\mathfrak{k}}{\log N\mathfrak{p}_\varrho}\right), \quad \varrho \geqslant \sigma \geqslant 1, \ \varrho > \sigma = 0; \tag{2.12}$$

$$\frac{1}{R_{\mathfrak{k}}(\varrho)} = \alpha_K e^{\gamma} \cdot \frac{\varphi(\mathfrak{k})}{N\mathfrak{k}} \log N\mathfrak{p}_\varrho + O(\log\log 3N\mathfrak{k}), \quad \varrho \geqslant 0. \tag{2.13}$$

Beweis. Zu (2.8):

$$\frac{R_{\mathfrak{k}}(\sigma)}{R_{\mathfrak{k}}(\varrho)} = \frac{R_1(\sigma)}{R_1(\varrho)} \prod_{\substack{\nu=\sigma+1 \\ \mathfrak{p}_\nu|\mathfrak{k}}}^{\varrho} (1-N\mathfrak{p}_\nu^{-1}) \leqslant \frac{R_1(\sigma)}{R_1(\varrho)} = O\left(\frac{\log N\mathfrak{p}_\varrho}{\log N\mathfrak{p}_\sigma}\right),$$

wegen (2.3), (2.4).

Zu (2.9): Behauptung folgt aus (2.8) mit $\sigma = 1$, wenn man noch berücksichtigt: $N\mathfrak{p}_0 = 1$, $R_{\mathfrak{k}}(0) = 1$.

Zu (2.10):

$$R_{\mathfrak{k}}(\varrho) = R_1(\varrho) \cdot \prod_{\substack{\nu=1 \\ \mathfrak{p}_\nu|\mathfrak{k}}}^{\varrho} (1-N\mathfrak{p}_\nu^{-1})^{-1} \leqslant \frac{N\mathfrak{k}}{\varphi(\mathfrak{k})} \cdot R_1(\varrho) = O\big(\log\log 3N\mathfrak{k} (\log N\mathfrak{p}_\varrho)^{-1}\big)$$

wegen (2.7), (2.3).

Zu (2.11): Wegen (2.8) kann man voraussetzen

$$2\log\log 3N\mathfrak{k} \leqslant \log N\mathfrak{p}_\sigma.$$

Dann gilt:

$$\frac{R_{\mathfrak{k}}(\sigma)}{R_{\mathfrak{k}}(\varrho)} = \frac{R_1(\sigma)}{R_1(\varrho)} \prod_{\substack{\nu=\sigma+1 \\ \mathfrak{p}_\nu | \mathfrak{k}}}^{\varrho} (1-N\mathfrak{p}_\nu^{-1})$$

$$= \frac{\log N\mathfrak{p}_\varrho}{\log N\mathfrak{p}_\sigma} \{1+O\big((\log N\mathfrak{p}_\sigma)^{-1}\big)\} \prod_{\substack{\nu=\sigma+1 \\ \mathfrak{p}_\nu | \mathfrak{k}}}^{\varrho} (1-N\mathfrak{p}_\nu^{-1}).$$

Es ist

$$1 \geqslant \prod_{\substack{\nu=\sigma+1 \\ \mathfrak{p}_\nu | \mathfrak{k}}}^{\varrho} (1-N\mathfrak{p}_\nu^{-1}) \geqslant (1-N\mathfrak{p}_\sigma^{-1})^{\omega(\mathfrak{k})} \geqslant 1-\frac{\omega(\mathfrak{k})}{N\mathfrak{p}_\sigma}$$

$$\geqslant 1-O\left(\frac{\log N\mathfrak{k}}{N\mathfrak{p}_\sigma}\right) \geqslant 1-O\big((\log N\mathfrak{p}_\sigma)^{-1}\big).$$

Also gilt mit obiger Voraussetzung über $N\mathfrak{p}_\sigma$:

$$\prod_{\substack{\nu=\sigma+1 \\ \mathfrak{p}_\nu | \mathfrak{k}}}^{\varrho} (1-N\mathfrak{p}_\nu^{-1}) = 1+O\big((\log N\mathfrak{p}_\sigma)^{-1}\big).$$

Zu (2.12): Vorbetrachtung: Sei $z \geqslant 1$ gegeben; dann kann man stets ein $r_0 \geqslant 0$ finden mit

$$N\mathfrak{p}_{r_0} \leqslant z < N\mathfrak{p}_{r_0+1}. \tag{2.14}$$

Nach (2.2) gilt für $r_0 \geqslant 1$:

$$\frac{z}{N\mathfrak{p}_{r_0}} < \frac{N\mathfrak{p}_{r_0+1}}{N\mathfrak{p}_{r_0}} \leqslant c_{13}. \tag{2.15}$$

(2.15) gilt natürlich auch für $r_0 = 0$.

Zunächst kann man wegen (2.9), (2.10) annehmen: $N\mathfrak{p}_\sigma \geqslant c_{14} \geqslant 2$. Ferner kann man annehmen:

$$2\log\log 3N\mathfrak{k} \leqslant \log N\mathfrak{p}_\sigma.$$

(Der Fall $2\log\log 3N\mathfrak{k} > \log N\mathfrak{p}_\sigma$ läßt sich folgendermaßen auf diesen zurückführen: Man wähle obiges $z = \log^2 3N\mathfrak{k}$; dann gilt wegen $N\mathfrak{p}_\sigma < z$: $r_0+1 > \sigma$; und daher

$$\frac{R_{\mathfrak{k}}(\varrho)}{R_{\mathfrak{k}}(\sigma)} \leqslant \frac{R_{\mathfrak{k}}(\varrho)}{R_{\mathfrak{k}}(r_0+1)} = O\left(\frac{\log\log 3N\mathfrak{k}}{\log N\mathfrak{p}_\sigma}\right);$$

dies folgt für $\varrho \geqslant r_0+1$ nach (2.12), (2.15); für $\varrho < r_0+1$ folgt es wegen (2.8), (2.15). Daher

$$\frac{R_{\mathfrak{k}}(\varrho)}{R_{\mathfrak{k}}(\sigma)} = \frac{\log N\mathfrak{p}_\sigma}{\log N\mathfrak{p}_\varrho} + O\left(\frac{\log\log 3N\mathfrak{k}}{\log N\mathfrak{p}_\varrho}\right),$$

wegen

$$\frac{\log N\mathfrak{p}_\sigma}{\log N\mathfrak{p}_\varrho} \leqslant O\left(\frac{\log\log 3N\mathfrak{k}}{\log N\mathfrak{p}_\varrho}\right).)$$

$$\frac{R_{\mathfrak{k}}(\varrho)}{R_{\mathfrak{k}}(\sigma)} = \frac{R_1(\varrho)}{R_1(\sigma)} \prod_{\substack{\nu=\sigma+1 \\ \mathfrak{p}_\nu | \mathfrak{k}}}^{\varrho} (1-N\mathfrak{p}_\nu^{-1})^{-1} = \frac{R_1(\varrho)}{R_1(\sigma)\{1+O\big((\log \mathfrak{p}N_\varrho)^{-1}\big)\}}$$

wegen der Überlegung bei (2.11),

$$= \frac{\log N\mathfrak{p}_\sigma}{\log N\mathfrak{p}_\varrho} \left\{1+O\big((\log N\mathfrak{p}_\sigma)^{-1}\big)\right\},$$

wegen (2.3), (2.4), $N\mathfrak{p}_\sigma \geqslant c_{14}$, womit (2.12) bewiesen ist.

Zu (2.13): Wie bei (2.12) kann man annehmen: $\log N\mathfrak{p}_\varrho \geqslant c_{15}$, $\log N\mathfrak{p}_\varrho \geqslant 2\log\log 3N\mathfrak{k}$. Dann folgt:

$$\frac{1}{R_{\mathfrak{k}}(\varrho)} = \frac{1}{R_1(\varrho)} \cdot \frac{\prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{k}} (1-N\mathfrak{p}^{-1})}{\prod_{\substack{\mathfrak{p}_\nu | \mathfrak{k} \\ \nu > \varrho}} (1-N\mathfrak{p}_\nu^{-1})}$$

$$= \frac{\varphi(\mathfrak{k})}{N_{\mathfrak{k}} R_1(\varrho)} \{1+O\big((\log N\mathfrak{p}_\varrho)^{-1}\big)\}^{-1},$$

woraus (2.13) für $\varrho \geqslant 1$ wegen (2.4) folgt. Wegen $R_{\mathfrak{k}}(0) = 1$, $N\mathfrak{p}_0 = 1$ folgt daher (2.13) auch für $\varrho = 0$.

Es gilt:

$$1 \leqslant S_{\mathfrak{k}}(x,\varrho) \leqslant R_{\mathfrak{k}}(\varrho)^{-1} \quad \text{für} \quad x \geqslant 1,\ \varrho \geqslant 0, \tag{2.16}$$

denn:

$$S_{\mathfrak{k}}(x,\varrho) \leqslant \prod_{\nu=1}^{\varrho}{}' \big(1+\varphi(\mathfrak{p}_\nu)^{-1}\big) = R_{\mathfrak{k}}(\varrho)^{-1}.$$

Lemma 2.3. *Für $x \geqslant 1$ und alle ganzen Ideale $\mathfrak{k}$ aus K gilt:*

$$\sum_{\substack{1 \leqslant N\mathfrak{a} \leqslant x \\ (\mathfrak{a},\mathfrak{k})=1}} \frac{\mu^2(\mathfrak{a})}{\varphi(\mathfrak{a})} = \alpha_K \frac{\varphi(\mathfrak{k})}{N\mathfrak{k}} \log x + O\big((\log\log 3N\mathfrak{k})^2\big). \tag{2.17}$$

Beweis. 1) Für $x \geqslant 1$ und alle ganzen $\mathfrak{f}$ gilt:

$$\sum_{\substack{1 \leqslant N\mathfrak{a} \leqslant x \\ (\mathfrak{a},\mathfrak{f})=1}} N\mathfrak{a}^{-1} = \alpha_K \frac{\varphi(\mathfrak{f})}{N\mathfrak{f}} \log x + O\big((\log\log 3N\mathfrak{f})^2\big). \tag{2.18}$$

Es ist:

$$\sum_{\substack{1 \leqslant N\mathfrak{a} \leqslant x \\ (\mathfrak{a},\mathfrak{f})=1}} N\mathfrak{a}^{-1} = \sum_{1 \leqslant N\mathfrak{a} \leqslant x} N\mathfrak{a}^{-1} \sum_{\substack{\mathfrak{t}|\mathfrak{a} \\ \mathfrak{t}|\mathfrak{f}}} \mu(\mathfrak{t}) = \sum_{\mathfrak{t}|\mathfrak{f}} \frac{\mu(\mathfrak{t})}{N\mathfrak{t}} \sum_{1 \leqslant N\mathfrak{c} \leqslant x/N\mathfrak{t}} N\mathfrak{c}^{-1}$$

$$= \sum_{\mathfrak{t}|\mathfrak{f}} \frac{\mu(\mathfrak{t})}{N\mathfrak{t}} \left\{\alpha_K \log\frac{x}{N\mathfrak{t}} + R(x,\mathfrak{t})\right\}$$

$$\text{mit}\quad R(x,\mathfrak{t}) = \begin{cases} O(1) & \text{für } \dfrac{x}{N\mathfrak{t}} \geqslant 1, \\ \alpha_K \log\dfrac{N\mathfrak{t}}{x} & \text{für } \dfrac{x}{N\mathfrak{t}} < 1, \end{cases}$$

$$= \alpha_K \log x \sum_{\mathfrak{t}|\mathfrak{f}} \frac{\mu(\mathfrak{t})}{N\mathfrak{t}} - \alpha_K \sum_{\mathfrak{t}|\mathfrak{f}} \frac{\mu(\mathfrak{t})}{N\mathfrak{t}} \log N\mathfrak{t} + O\Bigg(\sum_{\substack{\mathfrak{t}|\mathfrak{f} \\ N\mathfrak{t} \leqslant x}} \frac{\mu^2(\mathfrak{t})}{N\mathfrak{t}}\Bigg) +$$

$$+ O\Bigg(\sum_{\substack{\mathfrak{t}|\mathfrak{f} \\ N\mathfrak{t} > x}} \frac{\mu^2(\mathfrak{t})}{N\mathfrak{t}} \log\frac{N\mathfrak{t}}{x}\Bigg)$$

$$= \alpha_K \log x \frac{\varphi(\mathfrak{f})}{N\mathfrak{f}} + O\Big(\prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{f}} (1+N\mathfrak{p}^{-1})\Big) + O\Bigg(\sum_{\mathfrak{t}|\mathfrak{f}} \frac{\mu^2(\mathfrak{t})}{N\mathfrak{t}} \log N\mathfrak{t}\Bigg). \tag{2.19}$$

Nunmehr gilt:

(a) $$\prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{f}} (1+N\mathfrak{p}^{-1}) \leqslant \prod_{\nu=1}^{\omega(\mathfrak{f})} (1+N\mathfrak{p}_\nu^{-1}) < R_1\big(\omega(\mathfrak{f})\big)^{-1} = O(\log\log 3N\mathfrak{f})$$

wegen (2.4), (2.2), (2.1).

(b) $$\sum_{\mathfrak{t}|\mathfrak{f}} \frac{\mu^2(\mathfrak{t})}{N\mathfrak{t}} \log N\mathfrak{t} = \sum_{\mathfrak{t}|\mathfrak{f}} \frac{\mu^2(\mathfrak{t})}{N\mathfrak{t}} \sum_{\mathfrak{p}|\mathfrak{t}} \log N\mathfrak{p}$$

$$= \sum_{\mathfrak{p}|\mathfrak{f}} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}} \sum_{\mathfrak{c}|\frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{p}}} \frac{\mu^2(\mathfrak{c})}{N\mathfrak{c}} \leqslant \Bigg(\sum_{\mathfrak{p}|\mathfrak{f}} \frac{\log N\mathfrak{p}}{N\mathfrak{p}}\Bigg)\Bigg(\sum_{\mathfrak{c}|\mathfrak{f}} \frac{\mu^2(\mathfrak{c})}{N\mathfrak{c}}\Bigg)$$

$$= O\Bigg(\log\log 3N\mathfrak{f} \cdot \sum_{\nu=1}^{\omega(\mathfrak{f})} \frac{\log N\mathfrak{p}_\nu}{N\mathfrak{p}_\nu}\Bigg) = O\big((\log\log 3N\mathfrak{f})^2\big).$$

Die letztere Ungleichung erhält man wegen

$$\sum_{N\mathfrak{p} \leqslant x} (\log N\mathfrak{p})/N\mathfrak{p} = \log x + O(1) \qquad \text{(Landau, [8], S. 117)}$$

und der üblichen Überlegungen, wenn man über $\mathfrak{p}_\nu$ summiert. Setzt man die Resultate von (a), (b) in (2.19) ein, so erhält man (2.18).

2) Für $x \geqslant 1$ und alle ganzen $\mathfrak{f}$ gilt:

$$\sum_{\substack{1 \leqslant N\mathfrak{a} \leqslant x \\ (\mathfrak{a},\mathfrak{f})=1}} \frac{\mu^2(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}} = \alpha_K \zeta_K^{-1}(2) \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{f}} (1+N\mathfrak{p}^{-1})^{-1} \log x + O\big((\log\log 3N\mathfrak{f})^2\big). \tag{2.20}$$

Es ist:

$$\sum_{\substack{1 \leqslant N\mathfrak{a} \leqslant x \\ (\mathfrak{a},\mathfrak{f})=1}} \frac{\mu^2(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}} = \sum_{\substack{1 \leqslant N\mathfrak{a} \leqslant x \\ (\mathfrak{a},\mathfrak{f})=1}} N\mathfrak{a}^{-1} \sum_{\mathfrak{t}^2|\mathfrak{a}} \mu(\mathfrak{t}) = \sum_{\substack{1 \leqslant N\mathfrak{t} \leqslant \sqrt{x} \\ (\mathfrak{t},\mathfrak{f})=1}} \frac{\mu(\mathfrak{t})}{N\mathfrak{t}^2} \sum_{\substack{1 \leqslant N\mathfrak{c} \leqslant x/N\mathfrak{t}^2 \\ (\mathfrak{c},\mathfrak{f})=1}} N\mathfrak{c}^{-1}$$

$$= \sum_{\substack{1 \leqslant N\mathfrak{t} \leqslant \sqrt{x} \\ (\mathfrak{t},\mathfrak{f})=1}} \frac{\mu(\mathfrak{t})}{N\mathfrak{t}^2} \left\{\alpha_K \frac{\varphi(\mathfrak{f})}{N\mathfrak{f}} \cdot \log\frac{x}{N\mathfrak{t}^2} + O\big((\log\log 3N\mathfrak{f})^2\big)\right\}$$

wegen (2.18)

$$= \alpha_K \frac{\varphi(\mathfrak{f})}{N\mathfrak{f}} \log x \sum_{\mathfrak{t},(\mathfrak{t},\mathfrak{f})=1} \frac{\mu(\mathfrak{t})}{N\mathfrak{t}^2} + O\Bigg\{\log x \sum_{N\mathfrak{t} > \sqrt{x}} N\mathfrak{t}^{-2}\Bigg\} +$$

$$+ O\big((\log\log 3N\mathfrak{f})^2\big)$$

$$= \alpha_K \zeta_K^{-1}(2) \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{f}} (1+N\mathfrak{p}^{-1})^{-1} \log x + O(x^{-1/2}\log x) +$$

$$+ O\big((\log\log 3N\mathfrak{f})^2\big),$$

woraus (2.20) folgt.

3) $$\sum_{\substack{1 \leqslant N\mathfrak{a} \leqslant x \\ (\mathfrak{a},\mathfrak{f})=1}} \frac{\mu^2(\mathfrak{a})}{\varphi(\mathfrak{a})} = \sum_{\substack{1 \leqslant N\mathfrak{a} \leqslant x \\ (\mathfrak{a},\mathfrak{f})=1}} \frac{\mu^2(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}} \cdot \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{a}} (1-N\mathfrak{p}^{-1})^{-1}$$

$$= \sum_{\substack{1 \leqslant N\mathfrak{a} \leqslant x \\ (\mathfrak{a},\mathfrak{f})=1}} \frac{\mu^2(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}} \cdot \sum_{q(\mathfrak{c})|\mathfrak{a}} N\mathfrak{c}^{-1} \quad\text{mit}\quad q(\mathfrak{c}) := \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{c}} \mathfrak{p}$$

$$= \sum_{\substack{1 \leqslant N(q(\mathfrak{c})) \leqslant x \\ (\mathfrak{c},\mathfrak{f})=1}} N\mathfrak{c}^{-1} \cdot \sum_{\substack{1 \leqslant N\mathfrak{a} \leqslant x \\ q(\mathfrak{c})|\mathfrak{a} \\ (\mathfrak{a},\mathfrak{f})=1}} \frac{\mu^2(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}} = \sum_{\substack{1 \leqslant N(q(\mathfrak{c})) \leqslant x \\ (\mathfrak{c},\mathfrak{f})=1}} \big(N\mathfrak{c} \cdot N(q(\mathfrak{c}))\big)^{-1} \cdot \sum_{\substack{1 \leqslant N\mathfrak{t} \leqslant x/N(q(\mathfrak{c})) \\ (\mathfrak{t},\mathfrak{f}\mathfrak{c})=1}} \frac{\mu^2(\mathfrak{t})}{N\mathfrak{t}}$$

$$= \sum_{\substack{1 \leqslant N(q(\mathfrak{c})) \leqslant x \\ (\mathfrak{c},\mathfrak{f})=1}} \big(N\mathfrak{c} \cdot N(q(\mathfrak{c}))\big)^{-1} \Bigg\{\alpha_K \zeta_K^{-1}(2) \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{f}\mathfrak{c}} (1+N\mathfrak{p}^{-1})^{-1} \log\frac{x}{N(q(\mathfrak{c}))} +$$

$$+ O\Big(\big(\log\log 3N\mathfrak{f}N(q(\mathfrak{c}))\big)^2\Big)\Bigg\}$$

wegen (2.20)

$$= a_K \zeta_K^{-1}(2) \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{k}} (1+N\mathfrak{p}^{-1})^{-1} \log x \sum_{\substack{1 \leqslant N(q(\mathfrak{c})) \leqslant x \\ (\mathfrak{c},\mathfrak{k})=1}} N\mathfrak{c}^{-1} \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{c}} (N\mathfrak{p}+1)^{-1} -$$

$$- a_K \zeta_K^{-1}(2) \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{k}} (1+N\mathfrak{p}^{-1})^{-1} \sum_{\substack{1 \leqslant N(q(\mathfrak{c})) \leqslant x \\ (\mathfrak{c},\mathfrak{k})=1}} \frac{\log N(q(\mathfrak{c}))}{N\mathfrak{c} \prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{c}} (N\mathfrak{p}+1)} +$$

$$+ O\Big\{ \sum_{\substack{1 \leqslant N(q(\mathfrak{c})) \leqslant x \\ (\mathfrak{c},\mathfrak{k})=1}} \frac{(\log\log 3N\mathfrak{k} \cdot N(q(\mathfrak{c})))^2}{N\mathfrak{c} \cdot N(q(\mathfrak{c}))} \Big\}.$$

Hieraus folgt nach einigen einfachen Abschätzungen (2.17).

LEMMA 2.4. *Sei* $\varrho \geqslant 0$, $x > 1$ *und* $N\mathfrak{p}_{\varrho+1} \geqslant x$. *Dann gilt:*

$$S_{\mathfrak{k}}(x, \varrho) = e^{-\gamma} R_{\mathfrak{k}}(\varrho)^{-1} D\left(\frac{\log x}{\log N\mathfrak{p}_\varrho}\right) + O\big((\log\log 3N\mathfrak{k})^2\big). \tag{2.21}$$

Beweis. 1) $\varrho = 0$: $S_{\mathfrak{k}}(x, 0) = 1$, $D(\infty) = e^\gamma$ wegen (1.11), $R_{\mathfrak{k}}(0) = 1$.

2) Sei $N\mathfrak{p}_\varrho \geqslant x$, insbesondere also $\varrho \geqslant 1$; dann gilt:

$$S_{\mathfrak{k}}(x, \varrho) = \sum_{\substack{1 \leqslant N\mathfrak{a} \leqslant x \\ (\mathfrak{a},\mathfrak{k})=1}} \frac{\mu^2(\mathfrak{a})}{\varphi(\mathfrak{a})} - \sum_{\substack{N\mathfrak{a}=x, (\mathfrak{a},\mathfrak{k})=1 \\ \mathfrak{p}|\mathfrak{a} \text{ mit } \nu > \varrho}} \frac{\mu^2(\mathfrak{a})}{\varphi(\mathfrak{a})}.$$

Die letzte Summe ist höchstens dann nicht leer, wenn $N\mathfrak{p}_\varrho = x$ ist. Dann müssen die auftretenden $\mathfrak{a}$ aber Primideale $\mathfrak{p}_\nu$ mit $N\mathfrak{p}_\nu = N\mathfrak{p}_\varrho = x$, $\nu > \varrho$ und $\mathfrak{p}_\nu \nmid \mathfrak{k}$ sein. Also erhält man mit einem geeigneten m, $0 \leqslant m \leqslant n-1$,

$$S_{\mathfrak{k}}(x, \varrho) = \sum_{\substack{1 \leqslant N\mathfrak{a} \leqslant x \\ (\mathfrak{a},\mathfrak{k})=1}} \frac{\mu^2(\mathfrak{a})}{\varphi(\mathfrak{a})} - \frac{m}{x-1}$$

$$= a_K \frac{\varphi(\mathfrak{k})}{N\mathfrak{k}} \log x + O\big((\log\log 3N\mathfrak{k})^2\big) + O(x^{-1})$$

wegen (2.17) und $x = N\mathfrak{p}_\varrho \geqslant 2$

$$= a_K \frac{\varphi(\mathfrak{k})}{N\mathfrak{k}} \log x + O\big((\log\log 3N\mathfrak{k})^2\big).$$

Andererseits gilt wegen $\frac{\log x}{\log N\mathfrak{p}_\varrho} \leqslant 1$ nach (1.2) und wegen (2.13):

$$e^{-\gamma} R_{\mathfrak{k}}(\varrho)^{-1} D\left(\frac{\log x}{\log N\mathfrak{p}_\varrho}\right) = a_K \frac{\varphi(\mathfrak{k})}{N\mathfrak{k}} \log x + O(\log\log 3N\mathfrak{k}).$$

Damit folgt (2.21) für $N\mathfrak{p}_\varrho \geqslant x$.

3) Sei $N\mathfrak{p}_\varrho < x \leqslant N\mathfrak{p}_{\varrho+1}$ und $\varrho \geqslant 1$. Dann gilt:

$$S_{\mathfrak{k}}(x, \varrho) = \sum_{\substack{1 \leqslant N\mathfrak{a} \leqslant x \\ (\mathfrak{a},\mathfrak{k})=1}} \frac{\mu^2(\mathfrak{a})}{\varphi(\mathfrak{a})} - \sum_{\substack{N\mathfrak{p}_\nu = x \\ \mathfrak{p}_\nu \nmid \mathfrak{k}}} \varphi(\mathfrak{p}_\nu)^{-1},$$

denn falls $N\mathfrak{a} < x$ ist, folgt für alle $\mathfrak{p} | \mathfrak{a}$ auch $N\mathfrak{p} < x$ und daher $N\mathfrak{p} \leqslant N\mathfrak{p}_\varrho$; also weiter

$$= a_K \frac{\varphi(\mathfrak{k})}{N(\mathfrak{k})} \log x + O\big((\log\log 3N\mathfrak{k})^2\big)$$

wegen (2.17). Andererseits:

$$e^{-\gamma} R_{\mathfrak{k}}(\varrho+1)^{-1} D\left(\frac{\log x}{\log N\mathfrak{p}_{\varrho+1}}\right) = a_K \frac{\varphi(\mathfrak{k})}{N\mathfrak{k}} \log x + O(\log\log 3N\mathfrak{k}).$$

Somit folgt:

$$S_{\mathfrak{k}}(x, \varrho) = e^{-\gamma} R_{\mathfrak{k}}(\varrho+1)^{-1} D\left(\frac{\log x}{\log N\mathfrak{p}_{\varrho+1}}\right) + O\big((\log\log 3N\mathfrak{k})^2\big).$$

Es bleibt zu zeigen: Für $\varrho \geqslant 1$, $N\mathfrak{p}_\varrho < x \leqslant N\mathfrak{p}_{\varrho+1}$ gilt:

$$\frac{e^{-\gamma}}{R_{\mathfrak{k}}(\varrho+1)} D\left(\frac{\log x}{\log N\mathfrak{p}_{\varrho+1}}\right) - \frac{e^{-\gamma}}{R_{\mathfrak{k}}(\varrho)} D\left(\frac{\log x}{\log N\mathfrak{p}_\varrho}\right) = O\big((\log\log 3N\mathfrak{k})^2\big). \tag{2.22}$$

Nun gilt wegen (2.13) und der Beschränktheit von $D(u)$:

$$\left| \frac{e^{-\gamma}}{R_{\mathfrak{k}}(\varrho)} D\left(\frac{\log x}{\log N\mathfrak{p}_\varrho}\right) - \frac{e^{-\gamma}}{R_{\mathfrak{k}}(\varrho+1)} D\left(\frac{\log x}{\log N\mathfrak{p}_{\varrho+1}}\right) \right|$$

$$\leqslant a_K \left| \log N\mathfrak{p}_\varrho \cdot D\left(\frac{\log x}{\log N\mathfrak{p}_\varrho}\right) - \log N\mathfrak{p}_{\varrho+1} \cdot D\left(\frac{\log x}{\log N\mathfrak{p}_{\varrho+1}}\right) \right| + O(\log\log 3N\mathfrak{k})$$

$$\leqslant a_K \log N\mathfrak{p}_\varrho \left| \left(\frac{\log x}{\log N\mathfrak{p}_\varrho} - \frac{\log x}{\log N\mathfrak{p}_{\varrho+1}}\right) D'(\eta) \right| + O(\log\log 3N\mathfrak{k})$$

wegen (2.15) mit $\frac{\log x}{\log N\mathfrak{p}_{\varrho+1}} < \eta < \frac{\log x}{\log N\mathfrak{p}_\varrho}$

$$= O\left\{ \frac{\log x}{\log N\mathfrak{p}_{\varrho+1}} \log\left(\frac{N\mathfrak{p}_{\varrho+1}}{N\mathfrak{p}_\varrho}\right) \right\} + O(\log\log 3N\mathfrak{k}) = O(\log\log 3N\mathfrak{k})$$

wegen $x \leqslant N\mathfrak{p}_{\varrho+1}$ und (1.10).

Damit ist (2.22) bewiesen; insgesamt also auch (2.21).

LEMMA 2.5.

$$\sum_{\nu=1}^{\varrho}{}' \big(\varphi(\mathfrak{p}_\nu) R_{\mathfrak{k}}(\nu-1)\big)^{-1} = R_{\mathfrak{k}}(\varrho)^{-1}-1, \qquad \varrho \geqslant 0; \tag{2.23}$$

$$\sum_{\nu=1}^{\varrho}{}' N\mathfrak{p}_\nu^{-1} R_{\mathfrak{k}}(\nu-1) = 1-R_{\mathfrak{k}}(\varrho), \qquad \varrho \geqslant 0; \tag{2.24}$$

$$\sum_{\nu=1}^{\varrho}{}' \varphi(\mathfrak{p}_\nu)^{-1} S_{\mathfrak{k}}\left(\frac{x}{N\mathfrak{p}_\nu}, \nu-1\right) = S_{\mathfrak{k}}(x, \varrho)-1, \qquad x \geqslant N\mathfrak{p}_\varrho,\ \varrho \geqslant 0. \tag{2.25}$$

Beweis. Für $\varrho = 0$ sind alle drei Behauptungen richtig. Die Beweise werden durch vollständige Induktion nach ϱ geführt.

Zu (2.23): Die Behauptung gelte für $\varrho \geqslant 0$. Man kann annehmen, daß $\mathfrak{p}_{\varrho+1} \nmid \mathfrak{k}$, denn sonst tritt das Glied mit $\mathfrak{p}_{\varrho+1}$ in der linken Summe nicht auf, und rechts ist $R_{\mathfrak{k}}(\varrho+1) = R_{\mathfrak{k}}(\varrho)$. Also folgt:

$$\sum_{\nu=1}^{\varrho+1}{}' \big(\varphi(\mathfrak{p}_\nu) R_{\mathfrak{k}}(\nu-1)\big)^{-1} = \big(R_{\mathfrak{k}}(\varrho)^{-1}-1\big)+\big(\varphi(\mathfrak{p}_{\varrho+1}) R_{\mathfrak{k}}(\varrho)\big)^{-1} = R_{\mathfrak{k}}(\varrho+1)^{-1}-1.$$

Zu (2.24): Folgt ebenso wie (2.23).

Zu (2.25): Sei $\mathfrak{p}_{\varrho+1} | \mathfrak{k}$; wegen $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}) = 1$ für die in den Summen auftretenden $\mathfrak{a}$ ist dann

$$S_{\mathfrak{k}}(x, \varrho+1) = S_{\mathfrak{k}}(x, \varrho).$$

Also gelte wieder: $\mathfrak{p}_{\varrho+1} \nmid \mathfrak{k}$, ferner $x \geqslant N\mathfrak{p}_{\varrho+1}$.

$$\sum_{\nu=1}^{\varrho+1}{}' \varphi(\mathfrak{p}_\nu)^{-1} \cdot S_{\mathfrak{k}}\left(\frac{x}{N\mathfrak{p}_\nu}, \nu-1\right) = S_{\mathfrak{k}}(x, \varrho)-1+S_{\mathfrak{k}}\left(\frac{x}{N\mathfrak{p}_{\varrho+1}}, \varrho\right) \cdot \varphi(\mathfrak{p}_{\varrho+1})^{-1}.$$

Wegen

$$S_{\mathfrak{k}}(x, \varrho+1) = S_{\mathfrak{k}}(x, \varrho)+\varphi(\mathfrak{p}_{\varrho+1})^{-1} \cdot S_{\mathfrak{k}}\left(\frac{x}{N\mathfrak{p}_{\varrho+1}}, \varrho\right)$$

folgt damit (2.25).

DEFINITION. Die $y_1, \ldots, y_n$ mögen (1.26) genügen. Dann sei für $\beta \in K$ mit $(\beta, \mathfrak{k}) = 1$

$$\left\{\begin{aligned} &M: = \left\{\xi;\ \xi \equiv \beta \bmod \mathfrak{k};\ \begin{matrix} 0 < \xi^{(h)} \leqslant y_h \cdot N\mathfrak{k}^{1/n} & \text{für } h = 1, \ldots, r_1, \\ |\xi^{(h)}| \leqslant y_h \cdot N\mathfrak{k}^{1/n} & \text{für } h = r_1+1, \ldots, n, \end{matrix}\right\} \\ &M_{\mathfrak{a}}: = \{\xi;\ \xi \in M \text{ und } \mathfrak{a} | \xi\}. \end{aligned}\right. \tag{2.26}$$

$$\left\{\begin{aligned} &A_{\mathfrak{k}}(M_{\mathfrak{a}}, \varrho): = |\xi;\ \xi \in M_{\mathfrak{a}} \text{ und } \mathfrak{p}_\nu \nmid \xi \text{ für } \nu = 1, \ldots, \varrho|, \qquad \varrho \geqslant 1; \\ &A_{\mathfrak{k}}(M_{\mathfrak{a}}, 0): = |M_{\mathfrak{a}}|. \end{aligned}\right. \tag{2.27}$$

(Wegen $(\beta, \mathfrak{k}) = 1$ kann man sich in (2.27) natürlich auf diejenigen $\mathfrak{p}_\nu$, $\nu = 1, \ldots, \varrho$, beschränken, für welche gilt: $\mathfrak{p}_\nu \nmid \mathfrak{k}$.)

LEMMA 2.6. *Für* $\varrho \geqslant 0$ *und ganzes* $\mathfrak{a}$ *mit* $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_\varrho) = 1$ *gilt:*

$$A_{\mathfrak{k}}(M_{\mathfrak{a}}, \varrho) = |M_{\mathfrak{a}}|-\sum_{\nu=1}^{\varrho}{}' A_{\mathfrak{k}}(M_{\mathfrak{a}\mathfrak{p}_\nu}, \nu-1). \tag{2.28}$$

Beweis. (2.28) gilt für $\varrho = 0$ wegen (2.27). (2.28) gelte für $\varrho \geqslant 0$. Es gilt:

$$\begin{aligned} &A_{\mathfrak{k}}(M_{\mathfrak{a}}, \varrho)-A_{\mathfrak{k}}(M_{\mathfrak{a}}, \varrho+1) \\ &\quad = \left|\xi;\ \begin{matrix} \xi \equiv \beta \bmod \mathfrak{k}, & 0 < \xi^{(h)} \leqslant y_h N\mathfrak{k}^{1/n}, & h = 1, \ldots, r_1 \\ \xi \equiv 0 \bmod \mathfrak{a}, & |\xi^{(h)}| \leqslant y_h N\mathfrak{k}^{1/n}, & h = r_1+1, \ldots, n \end{matrix};\ \mathfrak{p}_\nu \nmid \xi \text{ für } \nu = 1, \ldots, \varrho,\ \mathfrak{p}_{\varrho+1} | \xi\right| \\ &\quad = A_{\mathfrak{k}}(M_{\mathfrak{a}\mathfrak{p}_{\varrho+1}}, \varrho). \end{aligned}$$

Also folgt:

$$A_{\mathfrak{k}}(M_{\mathfrak{a}}, \varrho+1) = A_{\mathfrak{k}}(M_{\mathfrak{a}}, \varrho)-A_{\mathfrak{k}}(M_{\mathfrak{a}\mathfrak{p}_{\varrho+1}}, \varrho).$$

Da $|M_{\mathfrak{a}\mathfrak{p}_{\varrho+1}}| = 0$, falls $\mathfrak{p}_{\varrho+1} | \mathfrak{k}$, ist in dem Fall auch $A_{\mathfrak{k}}(M_{\mathfrak{a}\mathfrak{p}_{\varrho+1}}, \varrho) = 0$. Somit folgt (2.28) aus der Induktionsvoraussetzung.

LEMMA 2.7. *Für* $x > 1$, $\varrho \geqslant 0$, $x \geqslant N\mathfrak{p}_\varrho$ *gilt:*

$$\begin{aligned} &\sum_{\nu=1}^{\varrho}{}' \frac{e^{-\gamma}}{\varphi(\mathfrak{p}_\nu) R_{\mathfrak{k}}(\nu-1)} D\left(\frac{\log(x/N\mathfrak{p}_\nu)}{\log N\mathfrak{p}_\nu}\right) \\ &\quad = \frac{e^{-\gamma}}{R_{\mathfrak{k}}(\varrho)} D\left(\frac{\log x}{\log N\mathfrak{p}_\varrho}\right)-1+O\left((\log\log 3N\mathfrak{k}) \cdot \exp\left(-\frac{\log x}{\log N\mathfrak{p}_\varrho}\right)\right). \end{aligned} \tag{2.29}$$

Beweis. Klar für $\varrho = 0$. Sei nun $\varrho \geqslant 1$. Der Beweis folgt durch partielle Summation. Man setze noch:

$$s_{\mathfrak{k}}(\nu): = \sum_{j=1}^{\nu}{}' \big(\varphi(\mathfrak{p}_j) R_{\mathfrak{k}}(j-1)\big)^{-1}.$$

$$\begin{aligned} &\sum_{\nu=1}^{\varrho}{}' \big(\varphi(\mathfrak{p}_\nu) R_{\mathfrak{k}}(\nu-1)\big)^{-1} D\left(\frac{\log(x/N\mathfrak{p}_\nu)}{\log N\mathfrak{p}_\nu}\right) \\ &= s_{\mathfrak{k}}(\varrho) D\left(\frac{\log(x/N\mathfrak{p}_\varrho)}{\log N\mathfrak{p}_\varrho}\right)-\sum_{\nu=1}^{\varrho-1} s_{\mathfrak{k}}(\nu) \cdot \int_{N\mathfrak{p}_\nu}^{N\mathfrak{p}_{\nu+1}} d\left\{D\left(\frac{\log(x/w)}{\log w}\right)\right\} \\ &= \big(R_{\mathfrak{k}}(\varrho)^{-1}-1\big) D\left(\frac{\log(x/N\mathfrak{p}_\varrho)}{\log N\mathfrak{p}_\varrho}\right)-\sum_{\nu=1}^{\varrho-1} \big(R_{\mathfrak{k}}(\nu)^{-1}-1\big) \int_{N\mathfrak{p}_\nu}^{N\mathfrak{p}_{\nu+1}} d\left\{D\left(\frac{\log(x/w)}{\log w}\right)\right\} \\ &\hspace{30em} \text{wegen (2.23)} \\ &= \big(R_{\mathfrak{k}}(\varrho)^{-1}-1\big) D\left(\frac{\log(x/N\mathfrak{p}_\varrho)}{\log N\mathfrak{p}_\varrho}\right)-\sum_{\nu=1}^{\varrho-1} \int_{N\mathfrak{p}_\nu}^{N\mathfrak{p}_{\nu+1}} \big(R_{\mathfrak{k}}(\pi(w))^{-1}-1\big) d\left\{D\left(\frac{\log(x/w)}{\log w}\right)\right\}, \end{aligned}$$

da die Integrale mit $N\mathfrak{p}_\nu = N\mathfrak{p}_{\nu+1}$ verschwinden und $R_{\mathfrak{k}}(\pi(w))$ stückweise konstant ist,

$$= \left(R_{\mathfrak{k}}(\varrho)^{-1}-1\right) D\left(\frac{\log(x/N\mathfrak{p}_\varrho)}{\log N\mathfrak{p}_\varrho}\right) - \int_1^{N\mathfrak{p}_\varrho} \left(R_{\mathfrak{k}}(\pi(w))^{-1}-1\right) d\left\{D\left(\frac{\log(x/w)}{\log w}\right)\right\}$$

$$= -e^\gamma + R_{\mathfrak{k}}(\varrho)^{-1}\left\{D\left(\frac{\log(x/N\mathfrak{p}_\varrho)}{\log N\mathfrak{p}_\varrho}\right) - \right.$$

$$\left. - \int_1^{N\mathfrak{p}_\varrho}\left[\frac{\log N\mathfrak{p}_{\pi(w)}}{\log N\mathfrak{p}_\varrho} + O\left(\frac{\log\log 3N\mathfrak{f}}{\log N\mathfrak{p}_\varrho}\right)\right] d\left\{D\left(\frac{\log(x/w)}{\log w}\right)\right\}\right\}$$

wegen (2.12) und $\varrho \geqslant 1$;

wegen $\log N\mathfrak{p}_{\pi(w)} = \log w + O(1)$ folgt weiter:

$$= -e^\gamma + R_{\mathfrak{k}}(\varrho)^{-1}\left\{D\left(\frac{\log(x/N\mathfrak{p}_\varrho)}{\log N\mathfrak{p}_\varrho}\right) - \right.$$

$$\left. - \int_1^{N\mathfrak{p}_\varrho}\left[\frac{\log w}{\log N\mathfrak{p}_\varrho} + O\left(\frac{\log\log 3N\mathfrak{f}}{\log N\mathfrak{p}_\varrho}\right)\right] d\left\{D\left(\frac{\log(x/w)}{\log w}\right)\right\}\right\}$$

$$= -e^\gamma + O\left(\log\log 3N\mathfrak{f}\cdot\exp\left(-\frac{\log x}{\log N\mathfrak{p}_\varrho}\right)\right) + \frac{\log x}{R_{\mathfrak{k}}(\varrho)\log N\mathfrak{p}_\varrho}\int_{\frac{\log x}{\log N\mathfrak{p}_\varrho}}^{\infty}\frac{D(t-1)}{t^2}\,dt$$

wegen (1.13), und daraus folgt wegen (1.14) die Behauptung.

LEMMA 2.8. *Für $\sigma > \varrho \geqslant 1$ gilt:*

$$\sum_{\varrho<\nu\leqslant\sigma}\varphi(\mathfrak{p}_\nu)^{-1} = \log\left(\frac{\log N\mathfrak{p}_\sigma}{\log N\mathfrak{p}_{\varrho+1}}\right) + O\left((\log N\mathfrak{p}_\varrho)^{-1}\right). \tag{2.30}$$

Beweis. Wegen (2.5) folgt mit $D_K := \log a_K + \gamma - H_K$ unmittelbar

$$\sum_{\nu=1}^{\varrho} N\mathfrak{p}_\nu^{-1} = \log\log N\mathfrak{p}_\varrho + D_K + O\left((\log N\mathfrak{p}_\varrho)^{-1}\right).$$

Daher:

$$\sum_{\nu=1}^{\varrho}\varphi(\mathfrak{p}_\nu)^{-1} = \sum_{\nu=1}^{\varrho} N\mathfrak{p}_\nu^{-1} + \sum_{\nu=1}^{\varrho}\left(N\mathfrak{p}_\nu\cdot(N\mathfrak{p}_\nu-1)\right)^{-1}$$

$$= \log\log N\mathfrak{p}_\varrho + D_K' + O\left((\log N\mathfrak{p}_\varrho)^{-1}\right),$$

$$D_K' := D_K + \sum_{\mathfrak{p}}\left(N\mathfrak{p}\cdot(N\mathfrak{p}-1)\right)^{-1}.$$

Somit:

$$\sum_{\varrho<\nu\leqslant\sigma}\varphi(\mathfrak{p}_\nu)^{-1} = \log\log N\mathfrak{p}_\sigma - \log\log N\mathfrak{p}_\varrho + O\left((\log N\mathfrak{p}_\varrho)^{-1}\right)$$

$$= \log\left(\frac{\log N\mathfrak{p}_\sigma}{\log N\mathfrak{p}_{\varrho+1}}\right) + \log\left(\frac{\log N\mathfrak{p}_{\varrho+1}}{\log N\mathfrak{p}_\varrho}\right) + O\left((\log N\mathfrak{p}_\varrho)^{-1}\right).$$

Daraus folgt (2.30) wegen (2.15).

SATZ 2.1. *Für $x > 1$, $\varrho \geqslant 0$ gilt*

$$S_{\mathfrak{k}}(x,\varrho) - e^{-\gamma}R_{\mathfrak{k}}(\varrho)^{-1}D\left(\frac{\log x}{\log N\mathfrak{p}_\varrho}\right) = O\left\{\left(\frac{\log x}{\log N\mathfrak{p}_\varrho}+1\right)(\log\log 3N\mathfrak{f})^2\right\}. \tag{2.31}$$

Beweis. Klar für $\varrho = 0$. Im folgenden kann man also annehmen:

$$x > 1, \quad \varrho \geqslant 1, \quad \text{also} \quad N\mathfrak{p}_\varrho \geqslant 2. \tag{2.32}$$

Sei

$$\delta_{\mathfrak{k}}(x,\varrho) := S_{\mathfrak{k}}(x,\varrho) - e^{-\gamma}R_{\mathfrak{k}}(\varrho)^{-1}D\left(\frac{\log x}{\log N\mathfrak{p}_\varrho}\right). \tag{2.33}$$

Sei nun $\sigma \geqslant \varrho \geqslant 1$, $x \geqslant N\mathfrak{p}_\sigma$, dann folgt nach (2.33), (2.25), (2.29):

$$\delta_{\mathfrak{k}}(x,\sigma) - \delta_{\mathfrak{k}}(x,\varrho) = \sum_{\varrho<\nu\leqslant\sigma}{}'\varphi(\mathfrak{p}_\nu)^{-1}\left\{S_{\mathfrak{k}}\left(\frac{x}{N\mathfrak{p}_\nu},\nu-1\right) - \frac{e^{-\gamma}}{R_{\mathfrak{k}}(\nu-1)}D\left(\frac{\log(x/N\mathfrak{p}_\nu)}{\log N\mathfrak{p}_{\nu-1}}\right)\right\} +$$

$$+ \sum_{\varrho<\nu\leqslant\sigma}{}'\frac{e^{-\gamma}}{\varphi(\mathfrak{p}_\nu)}\left\{D\left(\frac{\log(x/N\mathfrak{p}_\nu)}{\log N\mathfrak{p}_{\nu-1}}\right) - D\left(\frac{\log(x/N\mathfrak{p}_\nu)}{\log N\mathfrak{p}_\nu}\right)\right\}\cdot R_{\mathfrak{k}}(\nu-1)^{-1} +$$

$$+ O\left((\log\log 3N\mathfrak{f})\cdot\exp\left(-\frac{\log x}{\log N\mathfrak{p}_\sigma}\right)\right)$$

$$= \sum_{\varrho<\nu\leqslant\sigma}{}'\varphi(\mathfrak{p}_\nu)^{-1}\cdot\delta_{\mathfrak{k}}\left(\frac{x}{N\mathfrak{p}_\nu},\nu-1\right) + O\left\{(\log\log 3N\mathfrak{f})\exp\left(-\frac{\log x}{\log N\mathfrak{p}_\sigma}\right)\right\} + R \tag{2.34}$$

mit

$$R := \sum_{\varrho<\nu\leqslant\sigma}{}'\frac{e^{-\gamma}}{\varphi(\mathfrak{p}_\nu)R_{\mathfrak{k}}(\nu-1)}\left\{D\left(\frac{\log(x/N\mathfrak{p}_\nu)}{\log N\mathfrak{p}_{\nu-1}}\right) - D\left(\frac{\log(x/N\mathfrak{p}_\nu)}{\log N\mathfrak{p}_\nu}\right)\right\}.$$

Es ist:

$$R = \sum_{\varrho<\nu\leqslant\sigma}{}'\frac{e^{-\gamma}}{\varphi(\mathfrak{p}_\nu)R_{\mathfrak{k}}(\nu-1)}\left\{\left(\frac{\log(x/N\mathfrak{p}_\nu)}{\log N\mathfrak{p}_{\nu-1}} - \frac{\log(x/N\mathfrak{p}_\nu)}{\log N\mathfrak{p}_\nu}\right)\cdot D'\left(\frac{\log(x/N\mathfrak{p}_\nu)}{\log N\mathfrak{p}_\nu}+\Theta\right)\right\}$$

$$\text{mit } 0 \leqslant \Theta \leqslant \log\frac{x}{N\mathfrak{p}_\nu}\left(\frac{1}{\log N\mathfrak{p}_{\nu-1}} - \frac{1}{\log N\mathfrak{p}_\nu}\right)$$

$$= O\left\{\sum_{\varrho<\nu\leqslant\sigma}{}'\frac{\log x}{\log N\mathfrak{p}_\nu}\cdot\exp\left(-\frac{\log x}{\log N\mathfrak{p}_\nu}\right)\varphi(\mathfrak{p}_\nu)^{-1}\right\} \qquad \text{wegen (1.10), (2.9)}$$

$$= O\left\{\frac{\log x}{\log N\mathfrak{p}_\sigma}\cdot\exp\left(-\frac{\log x}{\log N\mathfrak{p}_\sigma}\right)\cdot\sum_{\varrho<\nu\leqslant\sigma}\varphi(\mathfrak{p}_\nu)^{-1}\right\}$$

$$= O\left\{\frac{\log x}{\log N\mathfrak{p}_\sigma}\cdot\exp\left(-\frac{\log x}{\log N\mathfrak{p}_\sigma}\right)\left(\log\left(\frac{\log N\mathfrak{p}_\sigma}{\log N\mathfrak{p}_{\varrho+1}}\right) + \frac{O(1)}{\log N\mathfrak{p}_\varrho}\right)\right\} \tag{2.35}$$

wegen (2.30).

Also folgt aus (2.34):

$$(2.36)\quad \begin{cases} \delta_{\mathfrak{k}}(x,\varrho)=\delta_{\mathfrak{k}}(x,\sigma)-\sum\limits_{\varrho<\nu\leqslant\sigma}{}' \varphi(\mathfrak{p}_\nu)^{-1}\cdot\delta_{\mathfrak{k}}\left(\dfrac{x}{N\mathfrak{p}_\nu},\nu-1\right)+ \\ \quad +O\left\{\exp\left(-\dfrac{\log x}{\log N\mathfrak{p}_\sigma}\right)\left(\log\log 3N\mathfrak{k}+\right.\right. \\ \qquad\left.\left.+\dfrac{\log x}{\log N\mathfrak{p}_\sigma}\left(\log\left(\dfrac{\log N\mathfrak{p}_\sigma}{\log N\mathfrak{p}_{\varrho+1}}\right)+\dfrac{O(1)}{\log N\mathfrak{p}_\varrho}\right)\right)\right\} \\ \qquad\qquad \text{für } x\geqslant N\mathfrak{p}_\sigma \text{ und } \sigma\geqslant\varrho\geqslant 1. \end{cases}$$

DEFINITION. Für $w>1$ und $h=0,1,2,\ldots$ sei

$$(2.37)\qquad m_{\mathfrak{k}}(w,h):=\sup_{\substack{N\mathfrak{p}_\lambda\geqslant w\\ N\mathfrak{p}_\lambda^h\leqslant x\leqslant N\mathfrak{p}_{\lambda+1}^{h+1}}}|\delta_{\mathfrak{k}}(x,\lambda)|.$$

Seien nun $w\geqslant 2$ und $h\geqslant 1$ fest vorgegeben. Es gelte:

$$(2.38)\qquad N\mathfrak{p}_\varrho^h\leqslant x\leqslant N\mathfrak{p}_{\varrho+1}^{h+1}\quad\text{mit}\quad N\mathfrak{p}_\varrho\geqslant w.$$

Zu ϱ wähle man ein $\sigma\geqslant\varrho$ mit $N\mathfrak{p}_\sigma\leqslant x^{1/h}\leqslant N\mathfrak{p}_{\sigma+1}$ (insbesondere folgt: $x\geqslant N\mathfrak{p}_\sigma$ wegen $h\geqslant 1$). Das ist möglich wegen

$$N\mathfrak{p}_\varrho\leqslant x^{1/h}\leqslant N\mathfrak{p}_{\varrho+1}^{1+1/h}\quad\text{nach (2.38)}.$$

Also gilt:

$$(2.39)\quad N\mathfrak{p}_\sigma^h\leqslant x\leqslant N\mathfrak{p}_{\sigma+1}^h\quad\text{und daher auch}\quad N\mathfrak{p}_\sigma^{h-1}\leqslant x\leqslant N\mathfrak{p}_{\sigma+1}^h.$$

Daraus ergibt sich:

$$(2.40)\qquad N\mathfrak{p}_{\nu-1}^{h-1}\leqslant\frac{x}{N\mathfrak{p}_\nu}\leqslant N\mathfrak{p}_\nu^h\quad\text{für}\quad\varrho<\nu\leqslant\sigma,$$

denn (2.40) ist gleichbedeutend mit: $N\mathfrak{p}_{\nu-1}^{h-1}\cdot N\mathfrak{p}_\nu\leqslant x\leqslant N\mathfrak{p}_\nu^{h+1}$; jedoch $N\mathfrak{p}_{\nu-1}^{h-1}\cdot N\mathfrak{p}_\nu\leqslant N\mathfrak{p}_\nu^h\leqslant N\mathfrak{p}_\sigma^h\leqslant x$ wegen (2.39); und $N\mathfrak{p}_\nu^{h+1}\geqslant N\mathfrak{p}_{\sigma+1}^{h+1}\geqslant x$ wegen (2.38). Wegen (2.36), (2.39), (2.40) folgt mit dem zu ϱ und h gewählten σ:

$$|\delta_{\mathfrak{k}}(x,\varrho)|\leqslant|\delta_{\mathfrak{k}}(x,\sigma)|+\sum_{\varrho<\nu\leqslant\sigma}{}'\varphi(\mathfrak{p}_\nu)^{-1}\cdot\left|\delta_{\mathfrak{k}}\left(\frac{x}{N\mathfrak{p}_\nu},\nu-1\right)\right|+$$

$$+O\left\{\exp\left(-\frac{\log x}{\log N\mathfrak{p}_\sigma}\right)\left(\log\log 3N\mathfrak{k}+\frac{\log x}{\log N\mathfrak{p}_\sigma}\left(\log\left(\frac{\log N\mathfrak{p}_\sigma}{\log N\mathfrak{p}_{\varrho+1}}\right)+\frac{O(1)}{\log N\mathfrak{p}_\varrho}\right)\right)\right\}$$

$$\leqslant m_{\mathfrak{k}}(w,h-1)+\sum_{\varrho<\nu\leqslant\sigma}{}'\varphi(\mathfrak{p}_\nu)^{-1}\cdot m_{\mathfrak{k}}(w,h-1)+$$

$$+O\left\{e^{-h}\cdot\log\log 3N\mathfrak{k}+he^{-h}\left(\log\frac{h+1}{h}+\frac{1}{\log w}\right)\right\},$$

denn wegen (2.39) gilt: $h\leqslant\dfrac{\log x}{\log N\mathfrak{p}_\sigma}$; wegen (2.38) hat man

$$\log N\mathfrak{p}_{\varrho+1}\geqslant\frac{1}{h+1}\cdot\log x.$$

Somit ergibt sich:

$$|\delta_{\mathfrak{k}}(x,\varrho)|\leqslant m_{\mathfrak{k}}(w,h-1)\Big(1+\sum_{\varrho<\nu\leqslant\sigma}\varphi(\mathfrak{p}_\nu)^{-1}\Big)+$$

$$+O\left\{e^{-h}\log\log 3N\mathfrak{k}+he^{-h}\left(\log\frac{h+1}{h}+\frac{1}{\log w}\right)\right\}$$

$$\leqslant m_{\mathfrak{k}}(w,h-1)\left\{1+\log\frac{h+1}{h}+\frac{c_{16}}{\log w}\right\}+c_{16}he^{-h}\log\log 3N\mathfrak{k}$$

wegen (2.30).

Letztere Abschätzung gilt für

$$N\mathfrak{p}_\varrho^h\leqslant x\leqslant N\mathfrak{p}_{\varrho+1}^{h+1},\quad N\mathfrak{p}_\varrho\geqslant w,\quad h\geqslant 1,\quad w\geqslant 2.$$

Die rechte Seite hängt aber nur von h,w ab. Folglich gilt diese Abschätzung auch für $m_{\mathfrak{k}}(w,h)$:

$$(2.41)\quad m_{\mathfrak{k}}(w,h)$$
$$\leqslant m_{\mathfrak{k}}(w,h-1)\left(\frac{h+1}{h}+\frac{c_{16}}{\log w}\right)+c_{16}he^{-h}\cdot\log\log 3N\mathfrak{k},\quad w\geqslant 2,\ h\geqslant 1.$$

Für $w>1$ hat man:

$$m_{\mathfrak{k}}(w,0)=\sup_{\substack{N\mathfrak{p}_\lambda\geqslant w\\ 1\leqslant x\leqslant N\mathfrak{p}_{\lambda+1}}}\left|S_{\mathfrak{k}}(x,\lambda)-e^{-\gamma}R_{\mathfrak{k}}(\lambda)^{-1}D\left(\frac{\log x}{\log N\mathfrak{p}_\lambda}\right)\right|.$$

Da (2.21) auch für $x=1$, $\varrho\geqslant 1$ gilt, folgt aus (2.21):

$$(2.42)\qquad m_{\mathfrak{k}}(w,0)=O\big((\log\log 3N\mathfrak{k})^2\big).$$

Ferner ist durch (2.21) die Behauptung (2.31) für $N\mathfrak{p}_\varrho\geqslant x$ bewiesen. Weiterhin kann man daher $N\mathfrak{p}_\varrho<x$ voraussetzen. Sei also $\varrho\geqslant 1$, $w=N\mathfrak{p}_\varrho$ (insbesondere also $w\geqslant 2$); $H<\dfrac{\log x}{\log w}\leqslant H+1$. Für H,ϱ ergibt sich: $N\mathfrak{p}_\varrho^H<x$; $N\mathfrak{p}_{\varrho+1}^{H+1}\geqslant x$. Folglich:

$$|\delta_{\mathfrak{k}}(x,\varrho)|\leqslant\sup_{\substack{N\mathfrak{p}_\lambda\geqslant N\mathfrak{p}_\varrho\\ N\mathfrak{p}_\lambda^H\leqslant z\leqslant N\mathfrak{p}_{\lambda+1}^{H+1}}}|\delta_{\mathfrak{k}}(z,\lambda)|=m_{\mathfrak{k}}(w,H).$$

(2.41) ergibt durch Iteration:

$$m_{\mathfrak{f}}(w,H) \leqslant m_{\mathfrak{f}}(w,H-1)\left(\frac{H+1}{H}+\frac{c_{16}}{\log w}\right)+c_{16}He^{-H}\log\log 3N\mathfrak{f}$$

$$\leqslant m_{\mathfrak{f}}(w,0)(H+1)\left(1+\frac{c_{16}}{\log w}\right)^{H}+$$

$$+c_{16}\log\log 3N\mathfrak{f}\Big\{He^{-H}+(H-1)e^{-(H-1)}\frac{H+1}{H}\left(1+\frac{c_{16}}{\log w}\right)+$$

$$+\ldots+e^{-1}\cdot\frac{H+1}{2}\left(1+\frac{c_{16}}{\log w}\right)^{H-1}\Big\}$$

$$\leqslant c_{17}(H+1)\left(1+\frac{c_{16}}{\log w}\right)^{H}\big(\log\log 3N\mathfrak{f}+m_{\mathfrak{f}}(w,0)\big)$$

(2.43) $$\leqslant c_{18}\left(\frac{\log x}{\log w}+1\right)\left(1+\frac{c_{16}}{\log w}\right)^{\frac{\log x}{\log w}}(\log\log 3N\mathfrak{f})^{2}$$

wegen (2.42).

a) Sei $\log w \geqslant (\log x)^{1/2}$, $\frac{\log x}{\log w} \leqslant (\log x)^{1/2}$. Dann gilt:

$$\left(1+\frac{c_{16}}{\log w}\right)^{\frac{\log x}{\log w}} = O(1).$$

In dem Fall folgt der Satz aus (2.43).
b) Für $\log w \leqslant (\log x)^{1/2}$ erhält man:

$$\left|S_{\mathfrak{f}}(x,\varrho)-e^{-\gamma}R_{\mathfrak{f}}(\varrho)^{-1}D\left(\frac{\log x}{\log N\mathfrak{p}_{\varrho}}\right)\right|$$

$$\leqslant S_{\mathfrak{f}}(x,\varrho)+e^{-\gamma}R_{\mathfrak{f}}(\varrho)^{-1}D\left(\frac{\log x}{\log N\mathfrak{p}_{\varrho}}\right)\leqslant 2R_{\mathfrak{f}}(\varrho)^{-1}$$

wegen (2.16), (2.12)

$$=O(\log N\mathfrak{p}_{\varrho})=O\left\{\left(\frac{\log x}{\log N\mathfrak{p}_{\varrho}}+1\right)(\log\log 3N\mathfrak{f})^{2}\right\}.$$

Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

LEMMA 2.9. *Für $x \geqslant 1$, $0 \leqslant \varrho \leqslant \sigma$ gilt:*

(2.44) $$R_{\mathfrak{f}}(\sigma)S_{\mathfrak{f}}(x,\sigma) \leqslant R_{\mathfrak{f}}(\varrho)S_{\mathfrak{f}}(x,\varrho).$$

Beweis. a) Für $\mathfrak{p}_{\sigma}|\mathfrak{f}$ gilt:

$$R_{\mathfrak{f}}(\sigma)S_{\mathfrak{f}}(x,\sigma)=R_{\mathfrak{f}}(\sigma-1)S_{\mathfrak{f}}(x,\sigma-1).$$

b) Für $\mathfrak{p}_{\sigma}\nmid\mathfrak{f}$ gilt:

$$R_{\mathfrak{f}}(\sigma)S_{\mathfrak{f}}(x,\sigma)\leqslant R_{\mathfrak{f}}(\sigma)\left\{S_{\mathfrak{f}}(x,\sigma-1)+\frac{S_{\mathfrak{f}}(x,\sigma-1)}{\varphi(\mathfrak{p}_{\sigma})}\right\}=R_{\mathfrak{f}}(\sigma-1)S_{\mathfrak{f}}(x,\sigma-1).$$

Aus a), b) folgt (2.44).

LEMMA 2.10. *Für $x>1$, $\varrho \geqslant 1$ gilt:*

(2.45) $$R_{\mathfrak{f}}(\varrho)S_{\mathfrak{f}}(x,\varrho)\geqslant 1-\big(1-R_{\mathfrak{f}}(\varrho)\big)^{\frac{\log x}{\log N\mathfrak{p}_{\varrho}}}\geqslant 1-\exp\left(-R_{1}(\varrho)\frac{\log x}{\log N\mathfrak{p}_{\varrho}}\right).$$

Beweis. Man betrachte die Intervalle

$$k-1<\frac{\log x}{\log N\mathfrak{p}_{\varrho}}\leqslant k,\qquad k=1,2,\ldots$$

Sei $k=1$: Dann hat man $0<\frac{\log x}{\log N\mathfrak{p}_{\varrho}}\leqslant 1$, also

$$1-\big(1-R_{\mathfrak{f}}(\varrho)\big)^{\frac{\log x}{\log N\mathfrak{p}_{\varrho}}}\leqslant 1-\big(1-R_{\mathfrak{f}}(\varrho)\big)=R_{\mathfrak{f}}(\varrho)\leqslant R_{\mathfrak{f}}(\varrho)S_{\mathfrak{f}}(x,\varrho),$$

da $S_{\mathfrak{f}}(x,\varrho)\geqslant 1$.

Sei $k\geqslant 1$ und $k<\frac{\log x}{\log N\mathfrak{p}_{\varrho}}\leqslant k+1$. Dann folgt:

$$k-1<\frac{\log(x/N\mathfrak{p}_{\varrho})}{\log N\mathfrak{p}_{\varrho}}\leqslant k.$$

Falls die erste Ungleichung in (2.45) für das letztere Intervall schon gilt, folgt:

(2.46) $$R_{\mathfrak{f}}(\varrho)S_{\mathfrak{f}}\left(\frac{x}{N\mathfrak{p}_{\varrho}},\varrho\right)\geqslant 1-\big(1-R_{\mathfrak{f}}(\varrho)\big)^{\frac{\log(x/N\mathfrak{p}_{\varrho})}{\log N\mathfrak{p}_{\varrho}}}.$$

Wegen (2.25) gilt:

$$R_{\mathfrak{f}}(\varrho)S_{\mathfrak{f}}(x,\varrho)=R_{\mathfrak{f}}(\varrho)\left\{1+\sum_{\nu=1}^{\varrho}{}'\varphi(\mathfrak{p}_{\nu})^{-1}S_{\mathfrak{f}}\left(\frac{x}{N\mathfrak{p}_{\nu}},\nu-1\right)\right\}$$

$$=R_{\mathfrak{f}}(\varrho)+R_{\mathfrak{f}}(\varrho)\sum_{\nu=1}^{\varrho}{}'\frac{R_{\mathfrak{f}}(\nu-1)S_{\mathfrak{f}}(x/N\mathfrak{p}_{\nu},\nu-1)}{\varphi(\mathfrak{p}_{\nu})R_{\mathfrak{f}}(\nu-1)}$$

$$\geqslant R_{\mathfrak{f}}(\varrho)+R_{\mathfrak{f}}(\varrho)\sum_{\nu=1}^{\varrho}{}'\frac{R_{\mathfrak{f}}(\varrho)S_{\mathfrak{f}}(x/N\mathfrak{p}_{\nu},\varrho)}{\varphi(\mathfrak{p}_{\nu})R_{\mathfrak{f}}(\nu-1)}\qquad\text{wegen (2.44)}$$

$$\geqslant R_{\mathfrak{f}}(\varrho)+R_{\mathfrak{f}}(\varrho)^{2}S_{\mathfrak{f}}\left(\frac{x}{N\mathfrak{p}_{\varrho}},\varrho\right)\left(\frac{1}{R_{\mathfrak{f}}(\varrho)}-1\right)\qquad\text{wegen (2.23)}$$

$$\geqslant 1-\big(1-R_{\mathfrak{f}}(\varrho)\big)^{\frac{\log x}{\log N\mathfrak{p}_{\varrho}}}\qquad\text{wegen (2.46),}$$

womit die erste Ungleichung von (2.45) bewiesen ist.

Wegen $\log(1-b) < -b$ für $0 < b \leqslant 1$ gilt:

$$\exp\left(\log\left(1-R_{\mathfrak{k}}(\varrho)\right)\frac{\log x}{\log N\mathfrak{p}_\varrho}\right) < \exp\left(-R_{\mathfrak{k}}(\varrho)\frac{\log x}{\log N\mathfrak{p}_\varrho}\right) \leqslant \exp\left(-R_1(\varrho)\frac{\log x}{\log N\mathfrak{p}_\varrho}\right).$$

Lemma 2.11. *Für* $x \geqslant 1$, $\varrho \geqslant 0$, $P_{\mathfrak{k}}(\varrho) := \prod_{\nu=1}^{\varrho}{}' \mathfrak{p}_\nu$, *gilt:*

$$S_{\mathfrak{k}}(x, \varrho) \geqslant \frac{N\mathfrak{d}}{\varphi(\mathfrak{d})} S_{\mathfrak{k}\mathfrak{d}}\left(\frac{x}{N\mathfrak{d}}, \varrho\right), \quad \textit{falls} \quad \mathfrak{d} \mid P_{\mathfrak{k}}(\varrho); \tag{2.47}$$

$$R_{\mathfrak{k}}(\varrho) S_{\mathfrak{k}}(x, \varrho) \geqslant R_1(\varrho) S_1(x, \varrho); \tag{2.48}$$

$$S_1(x, \varrho) \geqslant H(x, \varrho) \quad \textit{mit} \quad H(x, \varrho) := \sum_{\substack{1 \leqslant N\mathfrak{a} \leqslant x \\ p(\mathfrak{a}) \leqslant \varrho}} N\mathfrak{a}^{-1}. \tag{2.49}$$

Beweis. Zunächst sei $\mathfrak{d}$ ein beliebiges ganzes Ideal aus K:

$$S_{\mathfrak{k}}(x, \varrho) = \sum_{\substack{1 \leqslant N\mathfrak{a} \leqslant x \\ \mathfrak{a} \mid P_{\mathfrak{k}}(\varrho)}} \varphi(\mathfrak{a})^{-1} = \sum_{\mathfrak{t} \mid \mathfrak{d}} \sum_{\substack{1 \leqslant N\mathfrak{a} \leqslant x \\ \mathfrak{a} \mid P_{\mathfrak{k}}(\varrho) \\ (\mathfrak{a}, \mathfrak{d}) = \mathfrak{t}}} \varphi(\mathfrak{a})^{-1} = \sum_{\substack{\mathfrak{t} \mid \mathfrak{d} \\ \mathfrak{t} \mid P_{\mathfrak{k}}(\varrho)}} \varphi(\mathfrak{t})^{-1} \sum_{\substack{1 \leqslant N\mathfrak{b} \leqslant x/N\mathfrak{t} \\ \mathfrak{b} \mid P_{\mathfrak{k}}(\varrho) \\ (\mathfrak{b}, \mathfrak{d}) = 1}} \varphi(\mathfrak{b})^{-1}$$

$$= \sum_{\substack{\mathfrak{t} \mid \mathfrak{d} \\ \mathfrak{t} \mid P_{\mathfrak{k}}(\varrho)}} \varphi(\mathfrak{t})^{-1} S_{\mathfrak{k}\mathfrak{d}}\left(\frac{x}{N\mathfrak{t}}, \varrho\right). \tag{2.50}$$

Für $\mathfrak{d} \mid P_{\mathfrak{k}}(\varrho)$ ergibt sich aus (2.50):

$$S_{\mathfrak{k}}(x, \varrho) \geqslant S_{\mathfrak{k}\mathfrak{d}}\left(\frac{x}{N\mathfrak{d}}, \varrho\right) \cdot \sum_{\mathfrak{t} \mid \mathfrak{d}} \varphi(\mathfrak{t})^{-1} = S_{\mathfrak{k}\mathfrak{d}}\left(\frac{x}{N\mathfrak{d}}, \varrho\right) \frac{N\mathfrak{d}}{\varphi(\mathfrak{d})}.$$

Das ist (2.47).

Weiter folgt aus (2.50):

$$S_{\mathfrak{k}}(x, \varrho) \leqslant S_{\mathfrak{k}\mathfrak{d}}(x, \varrho) \cdot \sum_{\substack{\mathfrak{t} \mid \mathfrak{d} \\ \mathfrak{t} \mid P_{\mathfrak{k}}(\varrho)}} \varphi(\mathfrak{t})^{-1};$$

für $\mathfrak{k} = (1)$ folgt:

$$S_1(x, \varrho) \leqslant S_{\mathfrak{d}}(x, \varrho) \prod_{\substack{\nu=1 \\ \mathfrak{p}_\nu \mid \mathfrak{d}}}^{\varrho} \left(1 + \varphi(\mathfrak{p}_\nu)^{-1}\right) = S_{\mathfrak{d}}(x, \varrho) \frac{R_{\mathfrak{d}}(\varrho)}{R_1(\varrho)}.$$

Das ist (2.48).

Zu (2.49):

$$S_1(x, \varrho) = \sum_{\substack{1 \leqslant N\mathfrak{a} \leqslant x \\ p(\mathfrak{a}) \leqslant \varrho}} \frac{\mu^2(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}} \prod_{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{a}} (1 - N\mathfrak{p}^{-1})^{-1}$$

$$= \sum_{\substack{1 \leqslant N\mathfrak{a} \leqslant x \\ p(\mathfrak{a}) \leqslant \varrho}} \frac{\mu^2(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}} \sum_{q(\mathfrak{c}) \mid \mathfrak{a}} N\mathfrak{c}^{-1} \quad \text{mit} \quad q(\mathfrak{c}) := \prod_{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{c}} \mathfrak{p}$$

$$= \sum_{\substack{1 \leqslant N(q(\mathfrak{b})) \leqslant x \\ p(\mathfrak{b}) \leqslant \varrho}} N\mathfrak{b}^{-1} \cdot \sum_{\substack{\mathfrak{a} \mid \mathfrak{b} \\ q\left(\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{a}}\right) \mid \mathfrak{a},\ N\mathfrak{a} \leqslant x}} \mu^2(\mathfrak{a})$$

$$= \sum_{\substack{1 \leqslant N(q(\mathfrak{b})) \leqslant x \\ p(\mathfrak{b}) \leqslant \varrho}} \frac{\mu^2\left(q(\mathfrak{b})\right)}{N\mathfrak{b}} \geqslant H(x, \varrho),$$

womit auch (2.49) gezeigt ist.

§ 3. Definition. Für $t > 1$, $\varrho \geqslant 0$ sei

$$\lambda_{\mathfrak{d}} := \frac{\mu(\mathfrak{d}) \cdot N\mathfrak{d}}{\varphi(\mathfrak{d})} \cdot \frac{S_{\mathfrak{k}\mathfrak{d}}(t/N\mathfrak{d}, \varrho)}{S_{\mathfrak{k}}(t, \varrho)}. \tag{3.1}$$

Man erkennt unmittelbar:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ |\lambda_{\mathfrak{d}}| \leqslant \mu(\mathfrak{d})^2 \quad \text{nach (2.47), falls} \quad \mathfrak{d} \mid P_{\mathfrak{k}}(\varrho). \end{cases} \tag{3.2}$$

Ferner gilt:

$$\sum_{\substack{\mathfrak{d} \mid P_{\mathfrak{k}}(\varrho) \\ \mathfrak{t} \mid \mathfrak{d}}} \frac{\lambda_{\mathfrak{d}}}{N\mathfrak{d}} = \frac{\mu(\mathfrak{t})}{\varphi(\mathfrak{t}) \cdot S_{\mathfrak{k}}(t, \varrho)} \quad \text{für} \quad \varrho \geqslant 0,\ 1 \leqslant N\mathfrak{t} \leqslant t, \tag{3.3}$$

denn:

$$\sum_{\substack{\mathfrak{d} \mid P_{\mathfrak{k}}(\varrho) \\ \mathfrak{t} \mid \mathfrak{d}}} \frac{\lambda_{\mathfrak{d}}}{N\mathfrak{d}} = S_{\mathfrak{k}}(t, \varrho)^{-1} \sum_{\substack{\mathfrak{d} \mid P_{\mathfrak{k}}(\varrho) \\ \mathfrak{t} \mid \mathfrak{d}}} \frac{\mu(\mathfrak{d})}{\varphi(\mathfrak{d})} \cdot \sum_{\substack{1 \leqslant N\mathfrak{a} \leqslant t/N\mathfrak{d} \\ p(\mathfrak{a}) \leqslant \varrho \\ (\mathfrak{a}, \mathfrak{k}\mathfrak{d}) = 1}} \frac{\mu^2(\mathfrak{a})}{\varphi(\mathfrak{a})}$$

$$= \frac{\mu(\mathfrak{t})}{\varphi(\mathfrak{t}) \cdot S_{\mathfrak{k}}(t, \varrho)} \sum_{\mathfrak{c} \mid P_{\mathfrak{k}\mathfrak{t}}(\varrho)} \frac{\mu(\mathfrak{c})}{\varphi(\mathfrak{c})} \cdot \sum_{\substack{1 \leqslant N\mathfrak{a} \leqslant t/N\mathfrak{t} \cdot N\mathfrak{c} \\ p(\mathfrak{a}) \leqslant \varrho, (\mathfrak{a}, \mathfrak{k}\mathfrak{t}\mathfrak{c}) = 1}} \frac{\mu^2(\mathfrak{a})}{\varphi(\mathfrak{a})}$$

$$= \frac{\mu(\mathfrak{t})}{\varphi(\mathfrak{t}) \cdot S_{\mathfrak{k}}(t, \varrho)} \cdot \sum_{\substack{1 \leqslant N\mathfrak{b} \leqslant t/N\mathfrak{t} \\ \mathfrak{b} \mid P_{\mathfrak{k}\mathfrak{t}}(\varrho)}} \frac{\mu(\mathfrak{b})}{\varphi(\mathfrak{b})} \cdot \sum_{\mathfrak{a} \mid \mathfrak{b}} \mu(\mathfrak{a}) = \frac{\mu(\mathfrak{t})}{\varphi(\mathfrak{t}) S_{\mathfrak{k}}(t, \varrho)}$$

wegen $t \geqslant N\mathfrak{t}$.

Sei

$$\mathfrak{d}_i = \mathfrak{p}_{\nu_1}^{r_{i1}} \ldots \mathfrak{p}_{\nu_l}^{r_{il}}, \quad r_{ij} \geqslant 0 \quad \text{für} \quad i = 1, 2;\ j = 1, \ldots, l;$$

dann sei

$$[\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2] := \prod_{j=1}^{l} \mathfrak{p}_{\nu_j}^{\max(r_{1j}, r_{2j})}$$

Es gilt:

$$\sum_{\substack{1 \leqslant N\mathfrak{d}_i \leqslant t \\ \mathfrak{d}_i / P_\mathfrak{k}(\varrho) \\ i=1,2}} N[\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2]^{-1} = O\{[\min(\log t, \log N\mathfrak{p}_\varrho) + 1]^3\}, \qquad \varrho \geqslant 0; \tag{3.4}$$

denn wegen $[\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2](\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2) = \mathfrak{d}_1 \cdot \mathfrak{d}_2$ folgt:

$$\sum_{\substack{1 \leqslant N\mathfrak{d}_i \leqslant t \\ \mathfrak{d}_i | P_\mathfrak{k}(\varrho)}} N[\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2]^{-1} = \sum_{\substack{1 \leqslant N\mathfrak{d}_i \leqslant t \\ \mathfrak{d}_i | P_\mathfrak{k}(\varrho)}} \frac{N(\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2)}{N\mathfrak{d}_1 \cdot N\mathfrak{d}_2} = \sum_{\substack{1 \leqslant N\mathfrak{d}_i \leqslant t \\ \mathfrak{d}_i | P_\mathfrak{k}(\varrho)}} (N\mathfrak{d}_1 \cdot N\mathfrak{d}_2)^{-1} \cdot \sum_{\mathfrak{a} | (\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2)} \varphi(\mathfrak{a})$$

$$= \sum_{\substack{1 \leqslant N\mathfrak{a} \leqslant t \\ \mathfrak{a} | P_\mathfrak{k}(\varrho)}} \frac{\varphi(\mathfrak{a})}{N\mathfrak{a}^2} \Big\{ \sum_{\substack{1 \leqslant N\mathfrak{c} \leqslant t/N\mathfrak{a} \\ \mathfrak{c} | P_{\mathfrak{k}\mathfrak{a}}(\varrho)}} N\mathfrak{c}^{-1} \Big\}^2 \tag{3.5}$$

$$= O\Big\{ \sum_{1 \leqslant N\mathfrak{a} \leqslant t} N\mathfrak{a}^{-1} \cdot \Big(\log \frac{t}{N\mathfrak{a}} + 1 \Big)^2 \Big\} = O\{(\log t + 1)^3\}.$$

Andererseits gilt aber auch für $\varrho \geqslant 1$:

$$\sum_{\substack{1 \leqslant N\mathfrak{c} \leqslant \tau \\ \mathfrak{c} | P_\mathfrak{b}(\varrho)}} N\mathfrak{c}^{-1} = \prod_{\substack{\nu=1 \\ \mathfrak{p}_\nu \nmid \mathfrak{b}}}^{\varrho} (1 + N\mathfrak{p}_\nu^{-1}) \leqslant R_\mathfrak{b}(\varrho)^{-1} = O(\log N\mathfrak{p}_\varrho).$$

Zweimalige Anwendung dieser Abschätzung ergibt mit (3.5):

$$\sum_{\substack{1 \leqslant N\mathfrak{d}_i \leqslant t \\ \mathfrak{d}_i | P_\mathfrak{k}(\varrho) \\ i=1,2}} N[\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2]^{-1} = O\{(\log N\mathfrak{p}_\varrho)^3\}.$$

Somit folgt (3.4), wenn man noch $\varrho = 0$ berücksichtigt.

SATZ 3.1. *Sei $\varrho \geqslant 0$ eine ganze rationale Zahl; sei $\mathfrak{a}$ ein ganzes Ideal aus K mit $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_\varrho) = 1$; $M_\mathfrak{a}$ sei die in (2.26) definierte Menge, $A_\mathfrak{k}(M_\mathfrak{a}, \varrho)$ die in (2.27) definierte Anzahl, B die in (1.28) angegebene Konstante. Dann gilt für $t > 1$, $y > 0$:*

$$A_\mathfrak{k}(M_\mathfrak{a}, \varrho) \leqslant B \frac{y/N\mathfrak{a}}{S_\mathfrak{k}(t, \varrho)} + O\Big\{ \Big(\frac{y}{N\mathfrak{a}} \Big)^{(n-1)/n} \cdot t^{2/n} [\min(\log t, \log N\mathfrak{p}_\varrho) + 1]^{3(n-1)/n} \Big\} + O(t^2). \tag{3.6}$$

Beweis. Im folgenden sei stets $y^* := y/N\mathfrak{a}$.

$$A_\mathfrak{k}(M_\mathfrak{a}, \varrho) \leqslant \sum_{\xi \in M_\mathfrak{a}} \Big\{ \sum_{\substack{\mathfrak{d} | \xi \\ \mathfrak{d} | P_\mathfrak{k}(\varrho)}} \lambda_\mathfrak{d} \Big\}^2 \qquad \text{wegen} \quad \lambda_1 = 1$$

$$= \sum_{\substack{\mathfrak{d}_i | P_\mathfrak{k}(\varrho) \\ i=1,2}} \lambda_{\mathfrak{d}_1} \cdot \lambda_{\mathfrak{d}_2} |M_{\mathfrak{a}[\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2]}|. \tag{3.7}$$

Für $\xi \in M_{\mathfrak{a}[\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2]}$ gilt:

$$\xi \equiv \beta \bmod \mathfrak{k}, \ (\beta, \mathfrak{k}) = 1, \quad 0 < \xi^{(h)} \leqslant y_h N\mathfrak{k}^{1/n}, \ h = 1, \ldots, r_1,$$

$$\xi \equiv 0 \bmod (\mathfrak{a}[\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2]), \qquad |\xi^{(h)}| \leqslant y_h N\mathfrak{k}^{1/n}, \ h = r_1 + 1, \ldots, n.$$

Wegen $(\mathfrak{k}, \mathfrak{a}\mathfrak{d}_1\mathfrak{d}_2) = 1$ werden alle diese ξ gegeben durch die Lösungen von $\xi \equiv \beta_0 \bmod (\mathfrak{k}\mathfrak{a}[\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2])$, $0 < \xi^{(h)} \leqslant y_h N\mathfrak{k}^{1/n}$, $h = 1, \ldots, r_1$; $|\xi^{(h)}| \leqslant y_h N\mathfrak{k}^{1/n}$, $h = r_1 + 1, \ldots, n$.

Daher folgt aus (1.28) und (3.7):

$$A_\mathfrak{k}(M_\mathfrak{a}, \varrho) \leqslant \sum_{\substack{\mathfrak{d}_i | P_\mathfrak{k}(\varrho) \\ i=1,2}} \lambda_{\mathfrak{d}_1} \lambda_{\mathfrak{d}_2} \Big\{ B \cdot \frac{y^*}{N[\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2]} + O\Big(\Big(\frac{y^*}{N[\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2]} \Big)^{(n-1)/n} + 1 \Big) \Big\}$$

$$\leqslant B \cdot y^* \sum_{\mathfrak{d}_i | P_\mathfrak{k}(\varrho)} \frac{\lambda_{\mathfrak{d}_1} \cdot \lambda_{\mathfrak{d}_2}}{N\mathfrak{d}_1 \cdot N\mathfrak{d}_2} \sum_{\mathfrak{c} | (\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2)} \varphi(\mathfrak{c}) + O\Big\{ \Big(\sum_{\substack{1 \leqslant N\mathfrak{d} \leqslant t \\ \mathfrak{d} | P_\mathfrak{k}(\varrho)}} |\lambda_\mathfrak{d}| \Big)^2 \Big\} +$$

$$+ O\Big\{ y^{*(n-1)/n} \Big(\sum_{\substack{1 \leqslant N\mathfrak{d}_i \leqslant t \\ \mathfrak{d}_i | P_\mathfrak{k}(\varrho)}} |\lambda_{\mathfrak{d}_1} \lambda_{\mathfrak{d}_2}|^n \Big)^{1/n} \Big(\sum_{\substack{1 \leqslant N\mathfrak{d}_i \leqslant t \\ \mathfrak{d}_i | P_\mathfrak{k}(\varrho)}} N[\mathfrak{d}_1, \mathfrak{d}_2]^{-1} \Big)^{(n-1)/n} \Big\}$$

$$\leqslant B \cdot y^* \sum_{\substack{1 \leqslant N\mathfrak{b} \leqslant t \\ \mathfrak{b} | P_\mathfrak{k}(\varrho)}} \varphi(\mathfrak{b}) \Big(\sum_{\substack{\mathfrak{d} | P_\mathfrak{k}(\varrho) \\ \mathfrak{b} | \mathfrak{d}}} \frac{\lambda_\mathfrak{d}}{N\mathfrak{d}} \Big)^2 + O\Big\{ \Big(\sum_{1 \leqslant N\mathfrak{d} \leqslant t} \mu^2(\mathfrak{d}) \Big)^2 \Big\} +$$

$$+ O\Big\{ y^{*(n-1)/n} \Big(\sum_{1 \leqslant N\mathfrak{d} \leqslant t} \mu^2(\mathfrak{d}) \Big)^{2/n} [\min(\log t, \log N\mathfrak{p}_\varrho) + 1]^{3(n-1)/n} \Big\}$$

wegen (3.2), (3.4)

$$= B \cdot y^* \sum_{\substack{1 \leqslant N\mathfrak{b} \leqslant t \\ \mathfrak{b} | P_\mathfrak{k}(\varrho)}} \varphi(\mathfrak{b}) \cdot \frac{\mu^2(\mathfrak{b})}{\varphi^2(\mathfrak{b}) S_\mathfrak{k}^2(t, \varrho)} +$$

$$+ O\{ y^{*(n-1)/n} t^{2/n} [\min(\log t, \log N\mathfrak{p}_\varrho) + 1]^{3(n-1)/n} \} + O(t^2)$$

wegen (3.3).

Das ergibt (3.6).

Man kann (3.6) auch in folgender Form schreiben:

$$(3.8)\quad \frac{A_{\mathfrak{k}}(M_{\mathfrak{a}},\varrho)}{B\cdot y^*\cdot R_{\mathfrak{k}}(\varrho)} \leqslant \frac{1}{R_{\mathfrak{k}}(\varrho)\cdot S_{\mathfrak{k}}(t,\varrho)}+ + O\left\{\frac{t^{2/n}}{y^{*1/n}\cdot R_{\mathfrak{k}}(\varrho)}[\min(\log t, \log N\mathfrak{p}_\varrho)+1]^{3(n-1)/n}\right\}+O\left(\frac{t^2}{y^*\cdot R_{\mathfrak{k}}(\varrho)}\right)$$

für $\varrho \geqslant 0$ und jedes ganze Ideal $\mathfrak{a}$ aus K mit $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_\varrho) = 1$, $y > 0$, $t > 1$.

Satz 3.2. *Sei ϱ eine ganze rationale Zahl, $\mathfrak{a}$ ein ganzes Ideal aus K mit $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_\varrho) = 1$. Dann gilt:*

$$(3.9)\quad \frac{A_{\mathfrak{k}}(M_{\mathfrak{a}},\varrho)}{B\cdot y^*\cdot R_{\mathfrak{k}}(\varrho)} \leqslant 1+F_0\left(\frac{\log y^*}{\log N\mathfrak{p}_\varrho}\right)+O\left\{\frac{(\log\log 3y^*)^2(\log\log 3N\mathfrak{k})^6}{\log y^*}\right\}$$

für $\varrho \geqslant 1$, $y^* \geqslant N\mathfrak{p}_\varrho$.

$$(3.10)\quad \frac{A_{\mathfrak{k}}(M_{\mathfrak{a}},\varrho)}{B\cdot y^*\cdot R_{\mathfrak{k}}(\varrho)} \leqslant 1+O\left\{\frac{(\log\log 3y^*)^2(\log\log 3N\mathfrak{k})^6}{\log y^*}\right\}$$

für $\varrho \geqslant 1$, $y^* \geqslant N\mathfrak{p}_\varrho$, $N\mathfrak{p}_\varrho \leqslant z_1 := \exp\left(\dfrac{\log y^*}{\log\log 3y^*}\right)$.

$$(3.11)\quad \frac{A_{\mathfrak{k}}(M_{\mathfrak{a}},\varrho)}{B\cdot y^*\cdot R_{\mathfrak{k}}(\varrho)} \leqslant 1+O\left(\frac{1}{\log^2 y^*}\right)$$

für $\varrho \geqslant 1$, $y^* \geqslant N\mathfrak{p}_\varrho$, $N\mathfrak{p}_\varrho \leqslant z_2 := \exp\left\{\dfrac{\sqrt{a_K}}{3}\left(\dfrac{\log y^*}{\log\log 3y^*}\right)^{1/2}\right\}$.

Bemerkung. Wegen $A_{\mathfrak{k}}(M_{\mathfrak{a}}, 0) = |M_{\mathfrak{a}}| = B\cdot y^* + O(y^{*(n-1)/n})$ für $y^* \geqslant 1$ sieht man sofort, daß alle drei Aussagen des Satzes 3.2 auch für den Fall gelten: $y^* > 1$, $\varrho = 0$.

Beweis. Sei $2 \leqslant y^* \leqslant y_0$ (y_0 unabhängig von $\mathfrak{k}$), wobei sich y_0 aus dem Beweisgang ergeben wird. Wegen $N\mathfrak{p}_\varrho \leqslant y^*$ gilt also insbesondere: $N\mathfrak{p}_\varrho \leqslant y_0$. Dann ist:

$$(3.12)\quad \frac{A_{\mathfrak{k}}(M_{\mathfrak{a}},\varrho)}{B\cdot y^*\cdot R_{\mathfrak{k}}(\varrho)} \leqslant \frac{|M_{\mathfrak{a}}|}{B\cdot y^*\cdot R_{\mathfrak{k}}(\varrho)} = O\big(R_{\mathfrak{k}}(\varrho)^{-1}\big) = O(\log N\mathfrak{p}_\varrho) = O(1).$$

Daher gelten alle drei Behauptungen für $y^* \leqslant y_0$. Im folgenden kann man also $y^* \geqslant y_0$ annehmen.

Sei $t^2 = y^*/(\log y^*)^{6n-3}$; dann ist insbesondere $t \geqslant 2$ für $y^* \geqslant y_0$. Aus (3.8) folgt für die Restglieder:

$$\frac{t^2}{y^*\cdot R_{\mathfrak{k}}(\varrho)} = O\big((\log y^*)^{-2}\big).$$

$$\frac{t^{2/n}}{y^{*1/n}\cdot R_{\mathfrak{k}}(\varrho)}\cdot \min(\log t, \log N\mathfrak{p}_\varrho)^{3(n-1)/n} = O\big((\log y^*)^{-2}\big).$$

Daraus folgt:

$$(3.13)\quad \frac{A_{\mathfrak{k}}(M_{\mathfrak{a}},\varrho)}{B\cdot y^*\cdot R_{\mathfrak{k}}(\varrho)} \leqslant \frac{1}{R_{\mathfrak{k}}(\varrho)\cdot S_{\mathfrak{k}}(t,\varrho)} + O\big((\log y^*)^{-2}\big)$$

für $t^2 = \dfrac{y^*}{(\log y^*)^{6n-3}}$, $y^* \geqslant y_0$.

Sei σ_2 so gewählt, daß gilt: $N\mathfrak{p}_{\sigma_2} \leqslant z_2 < N\mathfrak{p}_{\sigma_2+1}$. Es sei $1 \leqslant \varrho \leqslant \sigma_2$. Dann gilt:

$$(3.14)\quad R_{\mathfrak{k}}(\varrho)\cdot S_{\mathfrak{k}}(t,\varrho) \geqslant R_{\mathfrak{k}}(\sigma_2)\cdot S_{\mathfrak{k}}(t,\sigma_2) \geqslant 1-\exp\left(-R_1(\sigma_2)\frac{\log t}{\log N\mathfrak{p}_{\sigma_2}}\right)$$

wegen (2.44), (2.45).

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} -R_1(\sigma_2)\frac{\log t}{\log N\mathfrak{p}_{\sigma_2}} &\leqslant -\frac{1}{2}\cdot\frac{\log t^2}{\log z_2}\left\{\frac{a_K e^{-\gamma}}{\log N\mathfrak{p}_{\sigma_2}}+O\big((\log N\mathfrak{p}_{\sigma_2})^{-2}\big)\right\} \\ &\leqslant -\frac{1}{2}\cdot\frac{\log t^2}{(\log z_2)^2}\left\{a_K e^{-\gamma}-\frac{c_{19}}{\log z_2}\cdot\frac{\log z_2}{\log N\mathfrak{p}_{\sigma_2}}\right\} \\ &\leqslant -\frac{1}{2}\cdot\frac{\log t^2}{(\log z_2)^2}\cdot\frac{a_K}{2} \end{aligned}$$

wegen $e^{-\gamma} > \frac{1}{2}$, z_2 genügend groß, also $y^* \geqslant y_0$

$$\leqslant -2\log\log 3y^* \quad \text{für} \quad y^* \geqslant y_0.$$

Also folgt aus (3.14):

$$R_{\mathfrak{k}}(\varrho)\cdot S_{\mathfrak{k}}(t,\varrho) \geqslant 1-(\log 3y^*)^{-2} \quad \text{für} \quad 1 \leqslant \varrho \leqslant \sigma_2,\ y^* \geqslant y_0.$$

Daher:

$$\big(R_{\mathfrak{k}}(\varrho)\cdot S_{\mathfrak{k}}(t,\varrho)\big)^{-1} \leqslant 1+O\big((\log y^*)^{-2}\big) \quad \text{für} \quad 1 \leqslant \varrho \leqslant \sigma_2.$$

Mit (3.13) folgt daher (3.11).

Wegen (3.12) ist $A_{\mathfrak{k}}(M_{\mathfrak{a}},\varrho)/B\cdot y^*\cdot R_{\mathfrak{k}}(\varrho) = O(\log N\mathfrak{p}_\varrho)$. Daher gelten (3.9), (3.10) für

$$(\log\log 3N\mathfrak{k})^3 > \frac{\log y^*}{\log\log 3y^*}.$$

Im folgenden wird also angenommen:

$$(3.15)\quad (\log\log 3N\mathfrak{k})^3 \leqslant \frac{\log y^*}{\log\log 3y^*}.$$

Man wähle nun σ_1, ϱ_0 folgendermaßen:

$$N\mathfrak{p}_{\sigma_1} \leqslant z_1 < N\mathfrak{p}_{\sigma_1+1}, \quad N\mathfrak{p}_{\varrho_0} \leqslant y^* < N\mathfrak{p}_{\varrho_0+1}.$$

Sei $\sigma_1 \leqslant \varrho \leqslant \varrho_0$. Dann folgt:

$$R_{\mathfrak{k}}(\varrho)\cdot S_{\mathfrak{k}}(t,\varrho) - e^{-\gamma} D\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\log y^*}{\log N\mathfrak{p}_\varrho}\right)$$
$$= \left\{R_{\mathfrak{k}}(\varrho) S_{\mathfrak{k}}(t,\varrho) - e^{-\gamma} D\frac{\log t}{\log N\mathfrak{p}_\varrho}\right\} + \left\{e^{-\gamma} D\left(\frac{\log t}{\log N\mathfrak{p}_\varrho}\right) - e^{-\gamma} D\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\log y^*}{\log N\mathfrak{p}_\varrho}\right)\right\}$$
$$= O\left\{R_{\mathfrak{k}}(\varrho)\left(\frac{\log t}{\log N\mathfrak{p}_\varrho}+1\right)(\log\log 3N\mathfrak{k})^2\right\} - e^{-\gamma}\frac{\log y^* - \log t^2}{2\log N\mathfrak{p}_\varrho} D'(\tau)$$
$$\text{wegen (2.31), mit } \frac{\log t^2}{2\log N\mathfrak{p}_\varrho} < \tau < \frac{\log y^*}{2\log N\mathfrak{p}_\varrho},$$
$$= O\left\{\frac{(\log\log 3N\mathfrak{k})^3}{\log N\mathfrak{p}_\varrho}\left(\frac{\log t}{\log N\mathfrak{p}_\varrho}+1\right)\right\} + O\left\{\frac{\log(y^*/t^2)}{\log N\mathfrak{p}_\varrho}\right\} \qquad \text{wegen (2.10)}$$
$$(3.16) \quad = O\left\{\frac{\log y^*}{(\log N\mathfrak{p}_\varrho)^2}(\log\log 3N\mathfrak{k})^3\right\} + O\left\{\frac{(\log\log 3y^*)^2}{\log y^*}\right\}.$$

Daher folgt:

$$R_{\mathfrak{k}}(\varrho)\cdot S_{\mathfrak{k}}(t,\varrho) \geqslant R_{\mathfrak{k}}(\varrho_0)\cdot S_{\mathfrak{k}}(t,\varrho_0)$$
$$\geqslant e^{-\gamma} D\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\log y^*}{\log N\mathfrak{p}_{\varrho_0}}\right) - O\left\{\frac{(\log\log 3N\mathfrak{k})^3}{\log y^*}\right\} - O\big((\log\log 3y^*)^{-1}\big)$$
$$\geqslant \tfrac{1}{2}e^{-\gamma} - O\big((\log\log 3y^*)^{-1}\big)$$
$$\text{wegen } D(u/2) \geqslant \tfrac{1}{2} \text{ für } u \geqslant 1 \text{ und (3.15)};$$

also

$$R_{\mathfrak{k}}(\varrho)\cdot S_{\mathfrak{k}}(t,\varrho) \geqslant \tfrac{1}{2}e^{-\gamma} - O\big((\log\log 3y^*)^{-1}\big) \quad \text{für} \quad \sigma_1 \leqslant \varrho \leqslant \varrho_0.$$

Daraus folgt mit (3.16)

$$\frac{1}{R_{\mathfrak{k}}(\varrho)\cdot S_{\mathfrak{k}}(t,\varrho)} - \frac{e^{\gamma}}{D\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\log y^*}{\log N\mathfrak{p}_\varrho}\right)}$$
$$= O\left\{\left|R_{\mathfrak{k}}(\varrho)\cdot S_{\mathfrak{k}}(t,\varrho) - e^{-\gamma} D\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\log y^*}{\log N\mathfrak{p}_\varrho}\right)\right|\right\}$$
$$= O\left\{\frac{(\log\log 3y^*)^2}{\log y^*}\right\} + O\left\{\frac{(\log\log 3y^*)^2}{\log y^*}(\log\log 3N\mathfrak{k})^3\right\}.$$

Also folgt für $z_1 \leqslant N\mathfrak{p}_\varrho \leqslant y^*$ bzw. genauer: $\sigma_1 \leqslant \varrho \leqslant \varrho_0$:

$$(3.17) \qquad \frac{1}{R_{\mathfrak{k}}(\varrho)\cdot S_{\mathfrak{k}}(t,\varrho)} \leqslant \frac{e^{\gamma}}{D\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{\log y^*}{\log N\mathfrak{p}_\varrho}\right)} + O\left\{\frac{(\log\log 3y^*)^2(\log\log 3N\mathfrak{k})^6}{\log y^*}\right\}.$$

Wegen (1.5) ist damit (3.9) für den Bereich $z_1 \leqslant N\mathfrak{p}_\varrho \leqslant y^*$ gezeigt, wenn man noch (3.13) berücksichtigt. Sei jetzt $N\mathfrak{p}_\varrho \leqslant z_1$, also $1 \leqslant \varrho \leqslant \sigma_1$. Es gilt:

$$\frac{1}{R_{\mathfrak{k}}(\varrho)\cdot S_{\mathfrak{k}}(t,\varrho)} \leqslant \frac{1}{R_{\mathfrak{k}}(\sigma_1)\cdot S_{\mathfrak{k}}(t,\sigma_1)}$$
$$\leqslant 1 + F_0\left(\frac{\log y^*}{\log N\mathfrak{p}_{\sigma_1}}\right) + O\left\{\frac{(\log\log 3y^*)^2}{\log y^*}(\log\log 3N\mathfrak{k})^6\right\}$$
$$\text{wegen (2.44) und (3.17)}$$
$$= 1 + O\left\{\exp\left(-\frac{\log y^*}{\log N\mathfrak{p}_{\sigma_1}}\right)\right\} + O(\ldots) \qquad \text{wegen (1.24)}$$
$$= 1 + O\left\{\exp\left(-\frac{\log y^*}{\log z_1}\right)\right\} + O(\ldots)$$
$$= 1 + O\left\{\frac{(\log\log 3y^*)^2}{\log y^*}(\log\log 3N\mathfrak{k})^6\right\}.$$

Wegen (3.13) folgt daher (3.10). Wegen $F_0(u) \geqslant 0$, (1.19), folgt aber auch (3.9) für den Bereich $1 \leqslant \varrho \leqslant \sigma_1$, wodurch der Satz in allen Teilen bewiesen ist.

Satz 3.3. *Sei* $z \geqslant \sqrt{y^*} > 1$ *und* $N\mathfrak{p}_\varrho < z \leqslant N\mathfrak{p}_{\varrho+1}$. *Dann gilt für* $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}\mathfrak{p}_1\ldots\mathfrak{p}_\varrho) = 1$:

$$(3.18) \qquad \frac{A_{\mathfrak{k}}(M_{\mathfrak{a}},\varrho)}{B\cdot y^*\cdot R_{\mathfrak{k}}(\varrho)} \leqslant 2e^{\gamma}\frac{\log z}{\log y^*} + O\left\{\frac{\log z\cdot\log\log 3y^*}{(\log y^*)^2}\right\}.$$

Beweis. Man sieht leicht ein, daß man $y^* \geqslant y_0$ wählen kann, wobei sich y_0 aus dem Beweisgang ergeben wird.

Man wähle $t^2 = y^*/(\log y^*)^{6n}$; für $y^* \geqslant y_0$ folgt: $t \geqslant 2$, ferner:

$$(3.19) \qquad N\mathfrak{p}_\varrho > t;$$

denn, falls $N\mathfrak{p}_\varrho \geqslant \sqrt{y^*}$ ist, ist (3.19) klar. Sei nun

$$N\mathfrak{p}_\varrho < \sqrt{y^*} \leqslant z{:}\ \frac{\sqrt{y^*}}{N\mathfrak{p}_\varrho} \leqslant \frac{N\mathfrak{p}_{\varrho+1}}{N\mathfrak{p}_\varrho} \leqslant c_{13},$$

also

$$N\mathfrak{p}_\varrho \geqslant c_{13}^{-1}\sqrt{y^*} > \frac{\sqrt{y^*}}{(\log y^*)^{3n}} \quad \text{für} \quad y^* \geqslant y_0.$$

a) $$\frac{1}{R_{\mathfrak{k}}(\varrho)\cdot S_{\mathfrak{k}}(t,\varrho)} \leqslant \frac{1}{R_1(\varrho)\cdot S_1(t,\varrho)} \leqslant \frac{1}{R_1(\varrho)\cdot H(t,\varrho)}$$

wegen (2.48), (2.49).

$$H(t,\varrho) = \sum_{1\leqslant N\mathfrak{a}\leqslant t} N\mathfrak{a}^{-1} \qquad \text{wegen (3.19)}$$

$$= \alpha_K \log t + \beta_K + O(t^{-2/(n+1)})$$

(Landau, [8], S. 81). Zusammen mit (2.4) folgt also:

$$\frac{1}{R_1(\varrho)\cdot H(t,\varrho)} = \frac{\alpha_K e^\gamma\cdot \log N\mathfrak{p}_\varrho\{1+O((\log N\mathfrak{p}_\varrho)^{-1})\}}{\alpha_K \log t\cdot \{1+O((\log t)^{-1})\}}$$

$$\leqslant 2e^\gamma \frac{\log z}{\log y^*} + O\left\{\frac{\log z\cdot \log\log 3y^*}{(\log y^*)^2}\right\}.$$

b) $$\frac{t^2}{R_{\mathfrak{k}}(\varrho)\cdot y^*} = O\left\{\frac{\log z}{(\log y^*)^6}\right\}.$$

c) $$\frac{t^{2/n}(\log t)^{3(n-1)/n}}{R_{\mathfrak{k}}(\varrho)\cdot y^{*1/n}} = O\left\{\frac{\log z(\log y^*)^{3(n-1)/n}}{(\log y^*)^6}\right\} = O\left\{\frac{\log z}{(\log y^*)^2}\right\}.$$

Aus (3.8), a), b), c) folgt Satz 3.3.

§ 4. LEMMA 4.1. *Sei* $\varrho \geqslant 1$, $N\mathfrak{p}_\varrho < y \leqslant \sqrt{x}$; ϱ_0 *sei gegeben durch* $N\mathfrak{p}_{\varrho_0} \leqslant y < N\mathfrak{p}_{\varrho_0+1}$. *Dann gilt:*

$$(4.1)\qquad \frac{1}{R_{\mathfrak{k}}(\varrho_0)} \sideset{}{'}\sum_{\varrho<j\leqslant\varrho_0} \frac{R_{\mathfrak{k}}(j-1)}{N\mathfrak{p}_j}\Phi\left(\frac{\log(x/N\mathfrak{p}_j)}{\log N\mathfrak{p}_j}\right)$$

$$= \frac{\log y}{\log x}\int_{\frac{\log x}{\log y}-1}^{\infty}\Phi(t)\,dt + O\left\{\frac{\log y}{(\log N\mathfrak{p}_\varrho)^2}\log\log 3N\mathfrak{k}\right\} + O\left\{\frac{\log y}{\log x}\exp\left(-\frac{\log x}{\log N\mathfrak{p}_\varrho}\right)\right\},$$

wo $\Phi(t)$ *eine der Funktionen* $f_\nu(t), F_\nu(t), \nu = 0, 1, \ldots,$ *aus* (1.5), (1.6), (1.7) *ist.*

Beweis. Die Funktionen $f_\nu(t), F_\nu(t)$ haben höchstens je eine Unstetigkeit bei $t = 2$ und sind stetig differenzierbar mit Ausnahme von höchstens $t = 2$, $t = 3$. Also hat $\Phi\left(\frac{\log(x/w)}{\log w}\right)$ höchstens eine Unstetigkeit bei $w = x^{1/3}$ und ist stetig differenzierbar bis auf höchstens $w = x^{1/3}, x^{1/4}$, das heißt, stetig differenzierbar für $2 \leqslant w \leqslant \sqrt{x}$ mit höchstens zwei Ausnahmepunkten. Das Lemma wird zunächst unter der Voraussetzung bewiesen, daß $x^{1/3}$ und $x^{1/4}$ beide nicht ganzzahlig sind und daß $y \neq x^{1/3}, x^{1/4}$ ist.

Wegen (2.24) gilt:

$$(4.2)\qquad \sideset{}{'}\sum_{\varrho<\nu\leqslant\sigma}\frac{R_{\mathfrak{k}}(\nu-1)}{N\mathfrak{p}_\nu} = R_{\mathfrak{k}}(\varrho) - R_{\mathfrak{k}}(\sigma).$$

Für $\varrho < \sigma \leqslant \varrho_0$ definiere man

$$G(\sigma) := \frac{1}{R_{\mathfrak{k}}(\varrho_0)} \sideset{}{'}\sum_{\varrho<\nu\leqslant\sigma}\frac{R_{\mathfrak{k}}(\nu-1)}{N\mathfrak{p}_\nu}.$$

Wegen (4.2) folgt nach (2.11):

$$G(\sigma) = \log N\mathfrak{p}_{\varrho_0}\cdot\left(\frac{1}{\log N\mathfrak{p}_\varrho} - \frac{1}{\log N\mathfrak{p}_\sigma}\right) + O\left\{\frac{\log y\cdot\log\log 3N\mathfrak{k}}{(\log N\mathfrak{p}_\varrho)^2}\right\}.$$

Für $N\mathfrak{p}_\varrho \leqslant w \leqslant y$ gilt:

$$G(\pi(w)) = \log N\mathfrak{p}_{\varrho_0}\left(\frac{1}{\log N\mathfrak{p}_\varrho} - \frac{1}{\log w}\right) + \log N\mathfrak{p}_{\varrho_0}\left(\frac{1}{\log w} - \frac{1}{\log N\mathfrak{p}_{\pi(w)}}\right) + $$
$$+ O\left\{\frac{\log y\cdot\log\log 3N\mathfrak{k}}{(\log N\mathfrak{p}_\varrho)^2}\right\}$$

$$(4.3)\qquad = \log N\mathfrak{p}_{\varrho_0}\left(\frac{1}{\log N\mathfrak{p}_\varrho} - \frac{1}{\log w}\right) + O\left\{\frac{\log y\cdot\log\log 3N\mathfrak{k}}{(\log N\mathfrak{p}_\varrho)^2}\right\}$$

wegen

$$\frac{1}{\log w} - \frac{1}{\log N\mathfrak{p}_{\pi(w)}} = \frac{\log(N\mathfrak{p}_{\pi(w)}/w)}{\log w\cdot\log N\mathfrak{p}_{\pi(w)}} = O((\log N\mathfrak{p}_\varrho)^{-2}).$$

Setzt man abkürzend $\Phi_j := \Phi\left(\frac{\log(x/N\mathfrak{p}_j)}{\log N\mathfrak{p}_j}\right)$, dann folgt:

$$\frac{1}{R_{\mathfrak{k}}(\varrho_0)} \sideset{}{'}\sum_{\varrho<j\leqslant\varrho_0}\frac{R_{\mathfrak{k}}(j-1)}{N\mathfrak{p}_j}\Phi_j$$

$$= G(\varrho_0)\Phi_{\varrho_0} - \sum_{\varrho<j\leqslant\varrho_0-1} G(j)\int_{N\mathfrak{p}_j}^{N\mathfrak{p}_{j+1}} d\Phi\left(\frac{\log(x/w)}{\log w}\right);$$

in der Summe treten nur j auf mit $N\mathfrak{p}_j < N\mathfrak{p}_{j+1}$; für solche j gilt aber: $G(j) = G(\pi(N\mathfrak{p}_j))$; also folgt weiter:

$$= G(\varrho_0)\,\Phi_{\varrho_0} - \int\limits_{N\mathfrak{p}_\varrho}^{N\mathfrak{p}_{\varrho_0}} G(\pi(w))\cdot d\Phi\left(\frac{\log(x/w)}{\log w}\right),$$

$$\text{da } G(\pi(w)) = 0 \text{ für } N\mathfrak{p}_\varrho \leqslant w < N\mathfrak{p}_{\varrho+1},$$

$$= G(\pi(N\mathfrak{p}_{\varrho_0}))\cdot\Phi\left(\frac{\log(x/y)}{\log y}\right) - \int\limits_{N\mathfrak{p}_\varrho}^{y} G(\pi(w))\cdot d\Phi\left(\frac{\log(x/w)}{\log w}\right)$$

$$= \Phi\left(\frac{\log(x/y)}{\log y}\right)\cdot\left(\frac{\log N\mathfrak{p}_{\varrho_0}}{\log y} - 1\right) + O\left\{\frac{\log y\cdot\log\log 3N\mathfrak{k}}{(\log N\mathfrak{p}_\varrho)^2}\right\} +$$

$$+\log N\mathfrak{p}_{\varrho_0}\cdot\int\limits_{N\mathfrak{p}_\varrho}^{y}\Phi\left(\frac{\log x}{\log w} - 1\right)\frac{dw}{w\cdot(\log w)^2}$$

$$\text{wegen (4.3), (1.24)}$$

$$= \log N\mathfrak{p}_{\varrho_0}\cdot\int\limits_{N\mathfrak{p}_\varrho}^{y}\Phi\left(\frac{\log x}{\log w} - 1\right)\frac{dw}{w\cdot(\log w)^2} + O\left\{\frac{\log y\cdot\log\log 3N\mathfrak{k}}{(\log N\mathfrak{p}_\varrho)^2}\right\}$$

$$\text{wegen } 1 - \frac{\log N\mathfrak{p}_{\varrho_0}}{\log y} = O\left\{\frac{\log y}{(\log N\mathfrak{p}_\varrho)^2}\right\}$$

$$= \frac{\log N\mathfrak{p}_{\varrho_0}}{\log x}\int\limits_{\frac{\log x}{\log y}}^{\frac{\log x}{\log N\mathfrak{p}_\varrho}}\Phi(t-1)\,dt + O\left\{\frac{\log y\cdot\log\log 3N\mathfrak{k}}{(\log N\mathfrak{p}_\varrho)^2}\right\}$$

$$= \frac{\log y}{\log x}\int\limits_{\frac{\log x}{\log y}}^{\infty}\Phi(t-1)\,dt + O\left\{\frac{\log N\mathfrak{p}_{\varrho_0}}{\log x}\cdot\int\limits_{\frac{\log x}{\log N\mathfrak{p}_\varrho}}^{\infty}\Phi(t-1)\,dt\right\} +$$

$$+\int\limits_{\frac{\log x}{\log y}}^{\infty}\Phi(t-1)\,dt\cdot\left(\frac{\log N\mathfrak{p}_{\varrho_0}}{\log x} - \frac{\log y}{\log x}\right) + O\left\{\frac{\log y\cdot\log\log 3N\mathfrak{k}}{(\log N\mathfrak{p}_\varrho)^2}\right\},$$

und daraus folgt die Behauptung wegen (1.24) und

$$\frac{\log(y/N\mathfrak{p}_{\varrho_0})}{\log x} = O\left(\frac{\log y}{\log^2 N\mathfrak{p}_\varrho}\right).$$

Damit ist (4.1) zunächst für den Spezialfall bewiesen. Tritt einer oder treten mehrere der ausgeschlossenen Fälle auf, dann kann man $\varepsilon > 0$ so finden, daß, für $x+\varepsilon$ anstelle von x wieder der bewiesene Spezialfall vorliegt, das heißt, für $x+\varepsilon$ anstelle von x gilt dann (4.1). Geht $\varepsilon\to 0$, so treten auf der rechten Seite keine Schwierigkeiten auf, da alles in x stetig ist und die O-Konstanten nicht von x abhängen. Links treten keine neuen Summenglieder auf, und der Grenzprozess ist nur auf die endlich vielen $\Phi(\log(x+\varepsilon)/\log N\mathfrak{p}_j - 1)$ anzuwenden. Aber auch hier treten keine Schwierigkeiten auf, da $\Phi(t)$ rechtsseitig stetig ist, und wegen $\log(x+\varepsilon) > \log x$ geht das Argument von Φ ebenfalls von rechts her gegen $\log x/\log N\mathfrak{p}_j$. Damit ist (4.1) bewiesen.

Korollar 4.1. *Sei* $\varrho\geqslant 1$, $N\mathfrak{p}_\varrho < y \leqslant \sqrt{x}$; *sei* ϱ_0 *gegeben durch* $N\mathfrak{p}_{\varrho_0}\leqslant y < N\mathfrak{p}_{\varrho_0+1}$. *Dann gilt:*

$$(4.4)\qquad \frac{1}{R_\mathfrak{k}(\varrho_0)}\sum_{\varrho<j\leqslant\varrho_0}{}' \frac{R_\mathfrak{k}(j-1)}{N\mathfrak{p}_j}\cdot\Phi\left(\frac{\log(x/N\mathfrak{p}_j)}{\log N\mathfrak{p}_{j-1}}\right)$$

$$\leqslant \frac{\log y}{\log x}\int\limits_{\frac{\log x}{\log y}-1}^{\infty}\Phi(t)\,dt + O\left\{\frac{\log y\cdot\log\log 3N\mathfrak{k}}{(\log N\mathfrak{p}_\varrho)^2}\right\} + O\left\{\frac{\log y}{\log x}\cdot\exp\left(-\frac{\log x}{\log N\mathfrak{p}_\varrho}\right)\right\}.$$

Beweis. Wegen $N\mathfrak{p}_{j-1}\leqslant N\mathfrak{p}_j$ gilt:

$$\frac{\log(x/N\mathfrak{p}_j)}{\log N\mathfrak{p}_j}\leqslant\frac{\log(x/N\mathfrak{p}_j)}{\log N\mathfrak{p}_{j-1}};$$

da die $f_\nu(t), F_\nu(t)$ nach (1.20) monoton fallend sind mit Ausnahme von eventuell $t = 2$, gilt deswegen:

$$(4.5)\qquad \Phi\left(\frac{\log(x/N\mathfrak{p}_j)}{\log N\mathfrak{p}_{j-1}}\right)\leqslant\Phi\left(\frac{\log(x/N\mathfrak{p}_j)}{\log N\mathfrak{p}_j}\right)$$

mit etwaiger Ausnahme des Falles j_0 mit

$$\frac{\log(x/N\mathfrak{p}_{j_0})}{\log N\mathfrak{p}_{j_0-1}}\geqslant 2,\qquad \frac{\log(x/N\mathfrak{p}_{j_0})}{\log N\mathfrak{p}_{j_0}} < 2.$$

Da die $f_\nu(t), F_\nu(t)$ nach (1.24) gleichmäßig in ν beschränkt sind, tritt somit in (4.1) höchstens das zusätzliche Restglied $O\left\{\frac{1}{R_\mathfrak{k}(\varrho_0)}\cdot\frac{R_\mathfrak{k}(j_0-1)}{N\mathfrak{p}_{j_0}}\right\}$ auf. Nun ist:

$$(4.6)\qquad \frac{R_\mathfrak{k}(j_0-1)}{R_\mathfrak{k}(\varrho_0)}\cdot\frac{1}{N\mathfrak{p}_{j_0}} = O\left\{\frac{\log y}{(\log N\mathfrak{p}_\varrho)^2}\right\}\qquad\text{wegen (2.8).}$$

Damit folgt Korollar 4.1 aus (4.5), (4.6) und (4.1).

Hauptsatz. *Sei* $\varrho\geqslant 1$ *eine ganze rationale Zahl; sei* $\mathfrak{a}$ *ein ganzes Ideal aus* K *mit* $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}\mathfrak{p}_1\ldots\mathfrak{p}_\varrho) = 1$. *Die* $y_1,\ldots,y_n$ *mit* $y = y_1\ldots y_n$ *seien wie in* (1.26) *gewählt;* $M_\mathfrak{a}$ *sei die Menge aus* (2.26). *Ferner sei*

$$y^*: = y/N\mathfrak{p} > 1, \quad N\mathfrak{p}_\varrho \leqslant y^*.$$

Dann gilt für $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ mit von ν unabhängiger Konstante c_{20}:

$$(4.7)\qquad \frac{A_\mathfrak{k}(M_\mathfrak{a}, \varrho)}{B\cdot y^*\cdot R_\mathfrak{k}(\varrho)} \leqslant 1+F_\nu\left(\frac{\log y^*}{\log N\mathfrak{p}_\varrho}\right)+\frac{(c_{20}\log\log 3y^*)^{1/2+2\nu}(\log\log 3N\mathfrak{k})^6}{(\log y^*)^{1/2}};$$

$$(4.8)\qquad \frac{A_\mathfrak{k}(M_\mathfrak{a}, \varrho)}{B\cdot y^*\cdot R_\mathfrak{k}(\varrho)} \geqslant 1-f_\nu\left(\frac{\log y^*}{\log N\mathfrak{p}_\varrho}\right)-\frac{(c_{20}\log\log 3y^*)^{3/2+2\nu}(\log\log 3N\mathfrak{k})^6}{(\log y^*)^{1/2}}.$$

Bemerkung. Sei $\varrho = 0, y^* > 1$. Dann gilt wegen (2.27) und (1.28)

$$\frac{A_\mathfrak{k}(M_\mathfrak{a}, 0)}{B\cdot y^*} = 1+O\big((y^*)^{-1/n}\big),$$

und daraus folgt (4.7), da $F_\nu(t) \geqslant 0$ nach (1.19). Außerdem gilt auch:

$$\frac{A_\mathfrak{k}(M_\mathfrak{a}, 0)}{B\cdot y^*} \geqslant 1-c_{21}(y^*)^{-1/n},$$

und daraus folgt wegen $f_\nu(t) \geqslant 0$ (4.8). Also gilt der Hauptsatz auch für $\varrho = 0$.

Beweis des Satzes. Setzt man $u: = \log y^*/\log N\mathfrak{p}_\varrho$, so ist $N\mathfrak{p}_\varrho = (y^*)^{1/u}$, und der Satz soll gelten für $1 \leqslant u \leqslant \log y^*/\log N\mathfrak{p}_1$. Wegen der Bemerkung soll er sogar für $u \geqslant 1$ gelten.

Nach (2.28) gilt:

$$\begin{aligned}
A_\mathfrak{k}(M_\mathfrak{a}, \varrho) &= |M_\mathfrak{a}|-\sum_{j=1}^{\varrho}{}' A_\mathfrak{k}(M_{\mathfrak{a}\mathfrak{p}_j}, j-1)\\
&= |M_\mathfrak{a}|-\sum_{j=1}^{\varrho}{}'\left\{A_\mathfrak{k}(M_{\mathfrak{a}\mathfrak{p}_j}, j-1)-B\cdot\frac{y^*}{N\mathfrak{p}_j}\cdot R_\mathfrak{k}(j-1)\right\}-B\cdot y^*\cdot\sum_{j=1}^{\varrho}{}'\frac{R_\mathfrak{k}(j-1)}{N\mathfrak{p}_j}\\
&= By^*+O\big((y^*)^{(n-1)/n}\big)-B\cdot y^*\cdot\big(1-R_\mathfrak{k}(\varrho)\big)-\\
&\qquad -\sum_{j=1}^{\varrho}{}'\left\{A_\mathfrak{k}(M_{\mathfrak{a}\mathfrak{p}_j}, j-1)-B\cdot\frac{y^*}{N\mathfrak{p}_j}\cdot R_\mathfrak{k}(j-1)\right\}
\end{aligned}$$

wegen (1.28), (2.24);

also folgt:

$$(4.9)\qquad \frac{A_\mathfrak{k}(M_\mathfrak{a}, \varrho)}{B\cdot y^*\cdot R_\mathfrak{k}(\varrho)} = 1+O\left(\frac{\log N\mathfrak{p}_\varrho}{y^{*1/n}}\right)-$$

$$-\frac{1}{B\cdot y^*\cdot R_\mathfrak{k}(\varrho)}\sum_{j=1}^{\varrho}{}'\left\{A_\mathfrak{k}(M_{\mathfrak{a}\mathfrak{p}_j}, j-1)-B\cdot\frac{y^*}{N\mathfrak{p}_j}\cdot R_\mathfrak{k}(j-1)\right\}.$$

Für $\nu = 0$ gilt (4.7) nach (3.9).

Für $1 \leqslant u \leqslant 2$ gilt (4.8), da dann für jede Konstante $c_{20} > 0$ die rechte Seite wegen (1.6) < 0 wird. Also kann man sich für die untere Abschätzung auf den Fall $u \geqslant 2$ beschränken.

Für obere und untere Abschätzungen kann man $y^* \geqslant y_0$ annehmen, wobei sich y_0 aus dem Beweisgang ergeben wird.

Wegen $u \geqslant 2$ gilt:

$$(4.10)\qquad N\mathfrak{p}_{j-1} \leqslant \frac{y^*}{N\mathfrak{p}_j} \quad \text{für} \quad 1 \leqslant j \leqslant \varrho,\ u \geqslant 2.$$

1) Sei

$$(4.11)\qquad x_2: = \exp\left\{\frac{\sqrt{a_K}}{4}\left(\frac{\log y^*}{\log\log 3y^*}\right)^{1/2}\right\}.$$

Dann gilt:

$$(4.12)\qquad \log N\mathfrak{p}_{j-1} \leqslant \frac{\sqrt{a_K}}{3}\left(\frac{\log(y^*/N\mathfrak{p}_j)}{\log\log(3y^*/N\mathfrak{p}_j)}\right)^{1/2} \quad \text{für} \quad N\mathfrak{p}_j \leqslant x_2,\ y^* \geqslant y_0.$$

Wählt man τ_2, so daß gilt: $N\mathfrak{p}_{\tau_2} \leqslant x_2 < N\mathfrak{p}_{\tau_2+1}$, so gilt (4.12) für $1 \leqslant j \leqslant \tau_2$.

Also folgt in (4.9) nach (3.11) und Bemerkung zu (3.11) (denn $y^*/N\mathfrak{p}_j \geqslant y^*/x_2 > 1$ für $y^* \geqslant y_0$), sowie nach (4.10), wenn $\tau'' \leqslant \tau_2$ ist:

$$\frac{1}{B\cdot y^*\cdot R_\mathfrak{k}(\varrho)}\sum_{j=1}^{\tau''}{}'\left\{A_\mathfrak{k}(M_{\mathfrak{a}\mathfrak{p}_j}, j-1)-B\frac{y^*}{N\mathfrak{p}_j}\cdot R_\mathfrak{k}(j-1)\right\}$$

$$\leqslant \frac{1}{B\cdot y^*\cdot R_\mathfrak{k}(\varrho)}\sum_{j=1}^{\tau''}{}' O\left\{B\frac{y^*}{N\mathfrak{p}_j}\cdot R_\mathfrak{k}(j-1)\left(\log\frac{y^*}{N\mathfrak{p}_j}\right)^{-2}\right\}$$

$$(4.13)\qquad \leqslant \frac{1}{R_\mathfrak{k}(\varrho)}O\left\{\sum_{j=1}^{\tau_2}{}'\frac{R_\mathfrak{k}(j-1)}{N\mathfrak{p}_j}\cdot\left(\log\frac{y^*}{N\mathfrak{p}_j}\right)^{-2}\right\} = O\left(\frac{1}{\log y^*}\right) \quad \text{für} \quad y^* \geqslant y_0.$$

2) Sei

$$(4.14)\qquad x_1: = \exp\left\{\frac{1}{2}\cdot\frac{\log y^*}{\log\log 3y^*}\right\}, \qquad N\mathfrak{p}_{\tau_1} \leqslant x_1 < N\mathfrak{p}_{\tau_1+1}.$$

Für $j \leqslant \tau_1$ erhält man:

$$\log N\mathfrak{p}_{j-1} \leqslant \frac{\log(y^*/N\mathfrak{p}_j)}{\log\log(3y^*/N\mathfrak{p}_j)}, \qquad y^* \geqslant y_0.$$

Daher kann man in (4.9) auf die Summe für $\tau_2+1 \leqslant j \leqslant \tau' \leqslant \tau_1$ (3.10) anwenden (noch wegen (4.10)):

$$\frac{1}{B\cdot y^*\cdot R_{\mathfrak{k}}(\varrho)} \sum_{\tau_2<j\leqslant\tau'}' \left\{A_{\mathfrak{k}}(M_{\mathfrak{a}\mathfrak{p}_j}, j-1) - B\cdot\frac{y^*}{N\mathfrak{p}_j}\cdot R_{\mathfrak{k}}(j-1)\right\}$$

$$\leqslant \frac{1}{B\cdot y^*\cdot R_{\mathfrak{k}}(\varrho)} \sum_{\tau_2<j\leqslant\tau'}' O\left\{\frac{By^*}{N\mathfrak{p}_j} R_{\mathfrak{k}}(j-1)\frac{\big(\log\log(3y^*/N\mathfrak{p}_j)\big)^2(\log\log 3N\mathfrak{k})^6}{\log(y^*/N\mathfrak{p}_j)}\right\}$$

$$\leqslant \frac{1}{R_{\mathfrak{k}}(\varrho)}\, O\left\{(\log\log 3y^*)^2(\log\log 3N\mathfrak{k})^6 \sum_{\tau_2<j\leqslant\tau_1}' \frac{R_{\mathfrak{k}}(j-1)}{N\mathfrak{p}_j(\log y^* - \log N\mathfrak{p}_j)}\right\}$$

$$\leqslant O\left\{\frac{(\log\log 3y^*)^2(\log\log 3N\mathfrak{k})^6}{\log y^*}\cdot\frac{R_{\mathfrak{k}}(\tau_2)}{R_{\mathfrak{k}}(\varrho)}\right\} \qquad \text{für} \quad y^* \geqslant y_0;$$

$$(4.15) \qquad = O\left\{\frac{(\log\log 3y^*)^2(\log\log 3N\mathfrak{k})^6}{\log y^*}\cdot\frac{\log N\mathfrak{p}_\varrho}{\log x_2}\right\} \qquad \text{wegen (2.8).}$$

Zwischenresultat: Ist $(y^*)^{1/u} \leqslant x_2$, so erhält man aus (4.9), (4.13):

$$(4.16) \qquad \frac{A_{\mathfrak{k}}(M_{\mathfrak{a}}, \varrho)}{B\cdot y^*\cdot R_{\mathfrak{k}}(\varrho)} \geqslant 1 - O\big((\log y^*)^{-1}\big) \qquad \text{für} \quad y^* \geqslant y_0.$$

Das ist (4.8) für alle $\nu = 0, 1, 2, \ldots$

Ist $x_2 < (y^*)^{1/u} \leqslant x_1$, dann folgt aus (4.9), (4.16), (4.15):

$$\frac{A_{\mathfrak{k}}(M_{\mathfrak{a}}, \varrho)}{B\cdot y^*\cdot R_{\mathfrak{k}}(\varrho)} \geqslant 1 - O\big((\log y^*)^{-1}\big) - O\left\{\frac{(\log\log 3y^*)^2(\log\log 3N\mathfrak{k})^6}{\log y^*}\cdot\frac{\log x_1}{\log x_2}\right\}$$

$$(4.17) \qquad \geqslant 1 - O\big((\log y^*)^{-1}\big) - O\left\{\frac{(\log\log 3y^*)^{3/2}(\log\log 3N\mathfrak{k})^6}{(\log y^*)^{1/2}}\right\}$$

$$\text{für } y^* \geqslant y_0, \text{ wegen (4.11), (4.14).}$$

Das ist (4.8) für alle $\nu = 0, 1, 2, \ldots$

Um (4.8) für $\nu = 0$ vollständig zu beweisen, braucht jetzt nur noch der Fall $(y^*)^{1/u} > x_1$ für $u \geqslant 2$ betrachtet zu werden. Da (4.7) für $\nu = 0$ durchweg gilt, kann dies vorausgesetzt werden. Zu (4.17) kommt dann nach (4.9) noch folgender Term hinzu:

$$\frac{1}{B\cdot y^*\cdot R_{\mathfrak{k}}(\varrho)} \sum_{\tau_1<j\leqslant\varrho}' \left\{A_{\mathfrak{k}}(M_{\mathfrak{a}\mathfrak{p}_j}, j-1) - B\cdot\frac{y^*}{N\mathfrak{p}_j}\cdot R_{\mathfrak{k}}(j-1)\right\}$$

$$\leqslant \frac{1}{B\cdot y^*\cdot R_{\mathfrak{k}}(\varrho)} \sum_{\tau_1<j\leqslant\varrho}' \left\{B\cdot\frac{y^*}{N\mathfrak{p}_j}\cdot R_{\mathfrak{k}}(j-1)\cdot F_\nu\left(\frac{\log(y^*/N\mathfrak{p}_j)}{\log N\mathfrak{p}_{j-1}}\right) + \right.$$

$$\left. + B\cdot\frac{y^*}{N\mathfrak{p}_j}\cdot R_{\mathfrak{k}}(j-1)\frac{\big(c_{20}\log\log(3y^*/N\mathfrak{p}_j)\big)^{1/2+2\nu}(\log\log 3N\mathfrak{k})^6}{\big(\log(y^*/N\mathfrak{p}_j)\big)^{1/2}}\right\}$$

$$\text{wegen (4.10) und (4.7), } \nu = 0;$$

$$\leqslant \frac{1}{R_{\mathfrak{k}}(\varrho)} \sum_{\tau_1<j\leqslant\varrho}' \frac{R_{\mathfrak{k}}(j-1)}{N\mathfrak{p}_j}\cdot F_\nu\left(\frac{\log(y^*/N\mathfrak{p}_j)}{\log N\mathfrak{p}_{j-1}}\right) +$$

$$+ \frac{1}{R_{\mathfrak{k}}(\varrho)} \sum_{\tau_1<j\leqslant\varrho}' \frac{R_{\mathfrak{k}}(j-1)}{N\mathfrak{p}_j}\cdot\frac{(c_{20}\log\log 3y^*)^{1/2+2\nu}(\log\log 3N\mathfrak{k})^6}{(\log y^* - u^{-1}\log y^*)^{1/2}}$$

$$\leqslant u^{-1}\int_{u-1}^{\infty} F_\nu(t)\,dt + O\left\{\frac{\log(y^*)^{1/u}\cdot\log\log 3N\mathfrak{k}}{(\log N\mathfrak{p}_{\tau_1})^2}\right\} +$$

$$+ O\left\{\frac{\log(y^*)^{1/u}}{\log y^*}\cdot\exp\left(-\frac{\log y^*}{\log N\mathfrak{p}_{\tau_1}}\right)\right\} +$$

$$+ c_{21}\frac{(c_{20}\log\log 3y^*)^{1/2+2\nu}(\log\log 3N\mathfrak{k})^6}{(\log y^*)^{1/2}}\cdot\frac{R_{\mathfrak{k}}(\tau_1)}{R_{\mathfrak{k}}(\varrho)}$$

wegen (4.4) mit $\varrho_0 \to \varrho$; $y \to N\mathfrak{p}_\varrho = (y^*)^{1/u}$; $x \to y^*$; $\varrho \to \tau_1$ und $N\mathfrak{p}_{\tau_1} \leqslant x_1 < (y^*)^{1/u}$, $u \geqslant 2$;

$$\leqslant f_\nu(u) + \frac{(c_{20}\log\log 3y^*)^{3/2+2\nu}(\log\log 3N\mathfrak{k})^6}{(\log y^*)^{1/2}}.$$

Zusammen mit (4.16) und (4.17) folgt daraus (4.8) für $\nu = 0$ (c_{20} mußte von vornherein groß genug gewählt sein). Nunmehr werden (4.7), (4.8) für $\nu \geqslant 0$ mit einer geeignet großen Konstanten c_{20} vorausgesetzt. Daraus soll (4.7) für $\nu+1$ abgeleitet werden. Aus (2.28) folgt durch Differenzbildung:

$$A_{\mathfrak{k}}(M_{\mathfrak{a}}, \varrho) = A_{\mathfrak{k}}(M_{\mathfrak{a}}, \tau_1) - \sum_{\tau_1<j\leqslant\varrho}' A_{\mathfrak{k}}(M_{\mathfrak{a}\mathfrak{p}_j}, j-1).$$

Wegen (4.14) und (3.10) gilt (4.7) für $1 \leqslant \varrho \leqslant \tau_1$, weil dann $N\mathfrak{p}_\varrho \leqslant N\mathfrak{p}_{\tau_1} \leqslant x_1 < z_1$ ist. Also folgt aus der letzten Beziehung:

$$A_{\mathfrak{k}}(M_{\mathfrak{a}}, \varrho) = A_{\mathfrak{k}}(M_{\mathfrak{a}}, \tau_1) - B\cdot y^*\cdot\big(R_{\mathfrak{k}}(\tau_1) - R_{\mathfrak{k}}(\varrho)\big) -$$

$$- \sum_{\tau_1<j\leqslant\varrho}' \left\{A_{\mathfrak{k}}(M_{\mathfrak{a}\mathfrak{p}_j}, j-1) - B\cdot\frac{y^*}{N\mathfrak{p}_j}\cdot R_{\mathfrak{k}}(j-1)\right\}$$

$$\leqslant B\cdot y^*\cdot R_{\mathfrak{k}}(\tau_1)\left\{1 + F_\nu\left(\frac{\log y^*}{\log N\mathfrak{p}_{\tau_1}}\right) + \frac{(c_{20}\log\log 3y^*)^{1/2+2\nu}(\log\log 3N\mathfrak{k})^6}{(\log y^*)^{1/2}}\right\} +$$

$$+ \sum_{\tau_1<j\leqslant\varrho}' \left\{B\cdot\frac{y^*}{N\mathfrak{p}_j}\cdot R_{\mathfrak{k}}(j-1) f_\nu\left(\frac{\log(y^*/N\mathfrak{p}_j)}{\log N\mathfrak{p}_{j-1}}\right) + \right.$$

$$\left. + B\cdot\frac{y^*}{N\mathfrak{p}_j}\cdot R_{\mathfrak{k}}(j-1)\frac{(c_{20}\log\log 3y^*)^{3/2+2\nu}(\log\log 3N\mathfrak{k})^6}{\big(\log(y^*/N\mathfrak{p}_j)\big)^{1/2}}\right\} -$$

$$- B\cdot y^*\cdot\big(R_{\mathfrak{k}}(\tau_1) - R_{\mathfrak{k}}(\varrho)\big).$$

Daher folgt:

$$\frac{A_{\mathfrak{k}}(M_{\mathfrak{a}},\varrho)}{B\cdot y^*\cdot R_{\mathfrak{k}}(\varrho)}\leqslant 1+\frac{R_{\mathfrak{k}}(\tau_1)}{R_{\mathfrak{k}}(\varrho)}\cdot F_\nu\left(\frac{\log y^*}{\log N\mathfrak{p}_{\tau_1}}\right)+$$
$$+\frac{R_{\mathfrak{k}}(\tau_1)}{R_{\mathfrak{k}}(\varrho)}\cdot\frac{(c_{20}\log\log 3y^*)^{1/2+2\nu}(\log\log 3N\mathfrak{k})^6}{(\log y^*)^{1/2}}+$$
$$+\frac{1}{R_{\mathfrak{k}}(\varrho)}\sum_{\tau_1<j\leqslant\varrho}{}' \frac{R_{\mathfrak{k}}(j-1)}{N\mathfrak{p}_j}\cdot f_\nu\left(\frac{\log(y^*/N\mathfrak{p}_j)}{\log N\mathfrak{p}_{j-1}}\right)+$$
$$+\frac{(c_{20}\log\log 3y^*)^{3/2+2\nu}(\log\log 3N\mathfrak{k})^6}{(\log y^*-\log x_1)^{1/2}}\cdot\frac{R_{\mathfrak{k}}(\tau_1)}{R_{\mathfrak{k}}(\varrho)}.$$

Daraus ergibt sich (4.7) für $\nu+1$, wenn man Korollar 4.1, (4.14) und (1.24) berücksichtigt.

Aus (4.7) für ν folgt jedoch (4.8) für ν, wenn man den Beweis auf Seite 304/305 nun für beliebiges $\nu\geqslant 0$ berücksichtigt. Damit ist der Hauptsatz vollständig bewiesen.

Korollar 4.2. *Unter den Voraussetzungen des Hauptsatzes gilt:*

$$\frac{A_{\mathfrak{k}}(M_{\mathfrak{a}},\varrho)}{B\cdot y^*\cdot R_{\mathfrak{k}}(\varrho)}\leqslant \Lambda\left(\frac{\log y^*}{\log N\mathfrak{p}_\varrho}\right)+O\left\{\frac{(\log\log 3N\mathfrak{k})^6}{(\log\log 3y^*)^7}\right\},$$
$$(4.18)\qquad \frac{A_{\mathfrak{k}}(M_{\mathfrak{a}},\varrho)}{B\cdot y^*\cdot R_{\mathfrak{k}}(\varrho)}\geqslant \lambda\left(\frac{\log y^*}{\log N\mathfrak{p}_\varrho}\right)-O\left\{\frac{(\log\log 3N\mathfrak{k})^6}{(\log\log 3y^*)^7}\right\}.$$

Bemerkung. Die Abschätzungen (4.18) gelten auch für den Fall

$$\varrho=0,\quad y^*>1.$$

Beweis. Man setze in (4.7), (4.8) $N\mathfrak{p}_\varrho=(y^*)^{1/u}$. Dann erhält man aus (4.7):

$$\frac{A_{\mathfrak{k}}(M_{\mathfrak{a}},\varrho)}{B\cdot y^*\cdot R_{\mathfrak{k}}(\varrho)}\leqslant 1+F(u)+[F_\nu(u)-F(u)]+\frac{(c_{20}\log\log 3y^*)^{1/2+2\nu}(\log\log 3N\mathfrak{k})^6}{(\log y^*)^{1/2}}$$
$$\leqslant \Lambda(u)+c_{22}\left(\frac{e}{3}\right)^{2\nu}+\frac{(c_{20}\log\log 3y^*)^{1/2+2\nu}(\log\log 3N\mathfrak{k})^6}{(\log y^*)^{1/2}},$$

wobei die letzte Zeile wegen (1.4) und (1.21) folgt. Entsprechend folgt aus (4.8), (1.4) und (1.21):

$$\frac{A_{\mathfrak{k}}(M_{\mathfrak{a}},\varrho)}{B\cdot y^*\cdot R_{\mathfrak{k}}(\varrho)}\geqslant \lambda(u)-c_{23}\left(\frac{e}{3}\right)^{2\nu+1}-\frac{(c_{20}\log\log 3y^*)^{3/2+2\nu}(\log\log 3N\mathfrak{k})^6}{(\log y^*)^{1/2}}.$$

Daraus folgen die Ungleichungen (4.18) für $\nu=[36\log\log\log 3y^*]$.

§ 5. Sei $\varrho(z)$ für $z>1$ diejenige ganze Zahl $\geqslant 0$, für welche gilt:

$$N\mathfrak{p}_\varrho<z\leqslant N\mathfrak{p}_{\varrho+1}.$$

Ferner sei

$$A_{\mathfrak{k}}(M_{\mathfrak{a}};z):=|\xi;\ \xi\in M_{\mathfrak{a}},\mathfrak{p}\nmid\xi \text{ für } N\mathfrak{p}<z|,\qquad z>1.$$

Dann gilt:

$$(5.1)\qquad A_{\mathfrak{k}}(M_{\mathfrak{a}};z)=A_{\mathfrak{k}}(M_{\mathfrak{a}},\varrho(z)).$$

Setzt man

$$u:=\frac{\log y^*}{\log z},\quad\text{also}\quad u<\frac{\log y^*}{\log N\mathfrak{p}_{\varrho(z)}},$$

so folgt nach (4.18), (5.1) und Lemma 1.2:

$$(5.2)\qquad \lambda(u)-c_{24}\frac{(\log\log 3N\mathfrak{k})^6}{(\log\log 3y^*)^7}\leqslant\frac{A_{\mathfrak{k}}(M_{\mathfrak{a}};z)}{B\cdot y^*\cdot R_{\mathfrak{k}}(\varrho(z))}\leqslant \Lambda(u)+c_{24}\frac{(\log\log 3N\mathfrak{k})^6}{(\log\log 3y^*)^7}$$
$$\text{für}\quad u\geqslant 1,\ 2^u\leqslant y^*,\ \Big(\mathfrak{a},\mathfrak{k}\prod_{N\mathfrak{p}<z}\mathfrak{p}\Big)=1.$$

Nach Satz 3.3 folgt für $0<u\leqslant 2$:

$$\frac{A_{\mathfrak{k}}(M_{\mathfrak{a}};z)}{B\cdot y^*\cdot R_{\mathfrak{k}}(\varrho(z))}\leqslant\frac{2e^\gamma}{u}+O\left\{\frac{\log\log 3y^*}{u\cdot\log y^*}\right\}.$$

Also folgt wegen Lemma 1.2 und $u\leqslant 2$:

$$\frac{A_{\mathfrak{k}}(M_{\mathfrak{a}};z)}{B\cdot y^*\cdot R_{\mathfrak{k}}(\varrho(z))}\leqslant \Lambda(u)+\frac{c_{25}}{u}\cdot\frac{(\log\log 3N\mathfrak{k})^6}{(\log\log 3y^*)^7}.$$

Mit (5.2) folgt daher insgesamt: Es gibt eine Konstante $c_{26}(u)$ mit:

$$(5.3)\qquad \frac{A_{\mathfrak{k}}(M_{\mathfrak{a}};z)}{B\cdot y^*\cdot R_{\mathfrak{k}}((\varrho(z))}\leqslant \Lambda(u)+c_{26}(u)\frac{(\log\log 3N\mathfrak{k})^6}{(\log\log 3y^*)^7}$$
$$\text{für}\quad u>0,\ 2^u\leqslant y^*,\ \Big(\mathfrak{a},\mathfrak{k}\prod_{N\mathfrak{p}<z}\mathfrak{p}\Big)=1;$$

$$(5.4)\qquad \frac{A_{\mathfrak{k}}(M_{\mathfrak{a}};z)}{B\cdot y^*\cdot R_{\mathfrak{k}}(\varrho(z))}\geqslant \lambda(u)-c_{26}(u)\frac{(\log\log 3N\mathfrak{k})^6}{(\log\log 3y^*)^7}$$
$$\text{für}\quad u\geqslant 1,\ 2^u\leqslant y^*,\ \Big(a,\mathfrak{k}\prod_{N\mathfrak{p}<z}\mathfrak{p}\Big)=1.$$

Für $2 \leqslant z \leqslant \zeta \leqslant y$ definiere man mit $(\beta, \mathfrak{k}) = 1$:

$$C^a_{\mathfrak{k},\beta}(y,\zeta,z):=\left|\xi;\ \xi\equiv\beta \bmod \mathfrak{k};\ \begin{array}{l}0<\xi^{(h)}\leqslant y_h N\mathfrak{k}^{1/n},\ h=1,\dots,r_1,\\ |\xi^{(h)}|\leqslant y_h N\mathfrak{k}^{1/n},\ h=r_1+1,\dots,n,\end{array};\ \mathfrak{p}\nmid\xi \text{ für } N\mathfrak{p}<z;\ \mathfrak{p}^2\nmid\xi \text{ für } z\leqslant N\mathfrak{p}<\zeta,\ \sum_{\substack{\mathfrak{p}|\xi\\ z\leqslant N\mathfrak{p}<\zeta}}1\leqslant a\right|,$$

wo die y_h, $h = 1, \ldots, n$, nach (1.26) gewählt seien.

Ferner:

$$E:=\left\{\xi;\ \xi\equiv\beta \bmod \mathfrak{k};\ \begin{array}{l}0<\xi^{(h)}\leqslant y_h N\mathfrak{k}^{1/n},\ h=1,\dots,r_1,\\ |\xi^{(h)}|\leqslant y_h N\mathfrak{k}^{1/n},\ h=r_1+1,\dots,n\end{array};\ \mathfrak{p}\nmid\xi \text{ für } N\mathfrak{p}<z;\ \mathfrak{p}^2\nmid\xi \text{ für } z\leqslant N\mathfrak{p}<\zeta\right\}.$$

Es ist das Ziel der folgenden Überlegungen, $C^a_{\mathfrak{k},\beta}(y,\zeta,z)$ nach unten abzuschätzen. Man erhält:

$$C^a_{\mathfrak{k},\beta}(y,\zeta,z)=|E|-\Big|\xi\in E;\ \sum_{\substack{\mathfrak{p}|\xi\\ z\leqslant N\mathfrak{p}<\zeta}}1>a\Big|$$

$$\geqslant\Big\{A_{\mathfrak{k}}(M;z)-\sideset{}{'}\sum_{z\leqslant N\mathfrak{p}<\zeta}\ \sum_{\substack{\xi\equiv\beta \bmod \mathfrak{k};\ \xi\equiv 0 \bmod \mathfrak{p}^2\\ 0<\xi^{(h)}\leqslant y_h N\mathfrak{k}^{1/n},\ h=1,\dots,r_1\\ |\xi^{(h)}|\leqslant y_h N\mathfrak{k}^{1/n};\ h=r_1+1,\dots,n}}1\Big\}-\Big|\xi\in E;\ \sum_{\substack{\mathfrak{p}|\xi\\ z\leqslant N\mathfrak{p}<\zeta}}1>a\Big|$$

$$\geqslant A_{\mathfrak{k}}(M;z)-\sideset{}{'}\sum_{z\leqslant N\mathfrak{p}<\zeta}\Big\{B\cdot\frac{y}{N\mathfrak{p}^2}+O\Big(\Big(\frac{y}{N\mathfrak{p}^2}\Big)^{(n-1)/n}+1\Big)\Big\}-\frac{1}{a+1}\sum_{\xi\in E}\ \sum_{\substack{\mathfrak{p}|\xi\\ z\leqslant N\mathfrak{p}<\zeta}}1$$

$$(5.5)\quad \geqslant A_{\mathfrak{k}}(M;z)-\sideset{}{'}\sum_{z\leqslant N\mathfrak{p}<\zeta}\Big\{B\cdot\frac{y}{N\mathfrak{p}^2}+O\Big(\Big(\frac{y}{N\mathfrak{p}^2}\Big)^{(n-1)/n}+1\Big)\Big\}-\frac{1}{a+1}\sideset{}{'}\sum_{z\leqslant N\mathfrak{p}<\zeta}A_{\mathfrak{k}}(M_{\mathfrak{p}};z).$$

Nun sei

$$z=y^{1/v},\quad \zeta=y^{1/u}\quad \text{mit}\quad 1<u\leqslant v,\ 2^v\leqslant y.$$

Dann ist

$$\frac{1}{y}\cdot\sideset{}{'}\sum_{y^{1/v}\leqslant N\mathfrak{p}<y^{1/u}}\Big\{B\cdot\frac{y}{N\mathfrak{p}^2}+O\Big(\Big(\frac{y}{N\mathfrak{p}^2}\Big)^{(n-1)/n}+1\Big)\Big\}=O\Big\{y^{-1/v}+\frac{1}{u}y^{-1/n}\log y+y^{1/u-1}\Big\}$$

gleichmäßig für $n \geqslant 2$.

Wegen (5.5) folgt daher:

$$\frac{C^a_{\mathfrak{k},\beta}(y,y^{1/u},y^{1/v})}{B\cdot y\cdot R_{\mathfrak{k}}(\varrho(y^{1/v}))}\geqslant\frac{A_{\mathfrak{k}}(M;y^{1/v})}{B\cdot y\cdot R_{\mathfrak{k}}(\varrho(y^{1/v}))}-c_{27}\frac{y^{-1/v}+u^{-1}y^{-1/n}\log y+y^{1/u-1}}{R_{\mathfrak{k}}(\varrho(y^{1/v}))}-$$
$$-\frac{1}{a+1}\sideset{}{'}\sum_{y^{1/v}\leqslant N\mathfrak{p}<y^{1/u}}\frac{1}{N\mathfrak{p}}\cdot\frac{A_{\mathfrak{k}}(M_{\mathfrak{p}};y^{1/v})}{B\cdot\frac{y}{N\mathfrak{p}}\cdot R_{\mathfrak{k}}(\varrho(y^{1/v}))}$$

$$\geqslant\Big\{\lambda(v)-c_{26}(v)\frac{(\log\log 3N\mathfrak{k})^6}{(\log\log 3y)^7}\Big\}-c_{28}(u,v)\frac{(\log\log 3N\mathfrak{k})^6}{(\log\log 3y)^7}-$$
$$-\frac{1}{a+1}\sideset{}{'}\sum_{y^{1/v}\leqslant N\mathfrak{p}<y^{1/u}}\frac{1}{N\mathfrak{p}}\Big\{\Lambda\Big(v\frac{\log(y/N\mathfrak{p})}{\log y}\Big)+c_{29}(u,v)\frac{(\log\log 3N\mathfrak{k})^6}{(\log\log(3y/N\mathfrak{p}))^7}\Big\}$$

wegen (5.3), (5.4), $2^v \leqslant y$ und (2.9),

$$(5.6)\quad \geqslant\lambda(v)-c_{30}(u,v)\frac{(\log\log 3N\mathfrak{k})^6}{(\log\log 3y)^7}-\frac{1}{a+1}\sideset{}{'}\sum_{y^{1/v}\leqslant N\mathfrak{p}<y^{1/u}}\frac{1}{N\mathfrak{p}}\Lambda\Big(v\frac{\log(y/N\mathfrak{p})}{\log y}\Big).$$

Durch partielle Summation läßt sich leicht zeigen:

$$\sideset{}{'}\sum_{y^{1/v}\leqslant N\mathfrak{p}<y^{1/u}}\frac{1}{N\mathfrak{p}}\Lambda\Big(v\frac{\log(y/N\mathfrak{p})}{\log y}\Big)=\int_u^v\Lambda\Big(v-\frac{v}{t}\Big)\frac{dt}{t}+O\Big\{\frac{v}{\log y}\Lambda\Big(v-\frac{v}{u}\Big)\Big\},$$

wo die O-Konstante nicht von y, u, v abhängt. Also folgt aus (5.6):

$$(5.7)\quad \frac{C^a_{\mathfrak{k},\beta}(y,y^{1/u},y^{1/v})}{B\cdot y\cdot R_{\mathfrak{k}}((y^{1/v}))}\geqslant\lambda(v)-\frac{1}{a+1}\int_u^v\Lambda\Big(v-\frac{v}{t}\Big)\frac{dt}{t}-c_{31}(u,v)\frac{(\log\log 3N\mathfrak{k})^6}{(\log\log 3y)^7}.$$

Man überzeugt sich leicht, daß die Funktionen $\Lambda(u)$, $\lambda(u)$ für $u > 0$ bzw. $u \geqslant 1$ genau mit den Funktionen $F(u)$, $f(u)$ aus der Arbeit von Jurkat und Richert ([7]) übereinstimmen. Man hat nur zu beachten, daß für das dortige $\varrho(u)$ gilt: $\varrho(u) = D'(u-1)$ für $u \geqslant 1$. Daraus folgt, daß (5.7) der Abschätzung (7.6) in [7] entspricht. Definiert man Λ_r wie dort, so gilt:

Satz 5.1. *Sei K ein algebraischer Zahlkörper vom Grade n über dem Körper der rationalen Zahlen. Die Zahlen $y_1, \ldots, y_n$ sollen die Bedingungen (1.26) erfüllen. Es sei $r \geqslant 2$ eine natürliche Zahl, $\mathfrak{k}$ ein ganzes Ideal* *aus K, $\beta \in K$ eine ganze Zahl mit $(\beta, \mathfrak{k}) = 1$ und $\varepsilon > 0$. Für alle $\mathfrak{k}$ mit $N\mathfrak{k} \geqslant k_0(r, \varepsilon, A, K)$ und*

$$y = (N\mathfrak{k})^{1/(1-1/\Lambda_r)+\varepsilon-1}$$

gilt dann:

Es existiert mindestens eine ganze Zahl $\xi \in K$ mit den Eigenschaften:

$$(5.8)\qquad \begin{cases} \xi \equiv \beta \bmod \mathfrak{k}; \\ 0 < \xi^{(h)} \leqslant y_h N\mathfrak{k}^{1/n}, \quad h = 1, \ldots, r_1, \\ |\xi^{(h)}| \leqslant y_h N\mathfrak{k}^{1/n}, \quad h = r_1+1, \ldots, n; \end{cases}$$

$$(5.9)\qquad \Omega(\xi) \leqslant r.$$

Beweis. Der Vollständigkeit halber werde der Beweis aus [7] skizziert. Dort wird definiert (s. Seite 236):

$$\Lambda_r := \sup_{u,v,a} \left(\frac{r+1-a}{u} + \frac{a}{v} \right),$$

wo das Supremum über alle Zahlen u, v mit $1 < u \leqslant v$ und alle ganzen Zahlen $a \geqslant 0$ zu erstrecken ist, so daß gilt:

$$(5.10)\qquad \lambda(v) - \frac{1}{a+1} \int_u^v \Lambda\left(v - \frac{v}{t}\right) \frac{dt}{t} > 0.$$

Da $\lambda(u)$ mit der Funktion $f(u)$ aus [7] übereinstimmt, zeigt man wie dort:

$$\frac{r+1}{2} \leqslant \Lambda_r \leqslant r+1.$$

Sei $\delta(\varepsilon)$ bestimmt durch

$$\frac{1}{1-1/\Lambda_r + \delta(\varepsilon)} = \frac{1}{1-1/\Lambda_r} + \varepsilon.$$

Wir können annehmen, daß $\delta(\varepsilon)$ genügend klein und $k_0(\varepsilon, r, A, K)$ genügend groß ist. Man wähle $u = u(r, \varepsilon)$, $v = v(r, \varepsilon)$, $a = a(r, \varepsilon)$ mit $1 < u \leqslant v$, $a \geqslant 0$ ganz, so daß gilt:

$$(5.11)\qquad \frac{1}{1/\Lambda_r + \delta(\varepsilon)} < \frac{r+1-a}{u} + \frac{a}{v}.$$

Wählt man dann die y_h gemäß (1.26) mit

$$y = (N\mathfrak{k})^{\frac{1}{1-1/\Lambda_r - \delta(\varepsilon)} - 1},$$

so folgt aus (5.7) wegen der Bedeutung von Λ_r, da k_0 genügend groß sein sollte:

$$C^a_{\mathfrak{k},\beta}(y, y^{1/u}, y^{1/v}) > 0.$$

Also existiert mindestens ein $\xi \in K$, welches (5.8) erfüllt. Sei nun b die Anzahl der Primidealteiler von ξ, deren Norm $< y^{1/u}$ ist. Wegen der Definition von

$$C^a_{\mathfrak{k},\beta}(y, y^{1/u}, y^{1/v})$$

ist $b \leqslant a$, und ein solcher Primidealteiler muß eine Norm $\geqslant y^{1/v}$ besitzen. Also gilt:

$$|N\xi| \geqslant y^{\frac{b}{v} + \frac{1}{u}(\Omega(\xi)-b)} \geqslant y^{\frac{a}{v} + \frac{1}{u}(\Omega(\xi)-a)}.$$

Andererseits hat man:

$$|N\xi| \leqslant y \cdot N\mathfrak{k},$$

und daher folgt wegen der Festsetzung von y:

$$\left(\frac{1}{1-1/\Lambda_r - \delta(\varepsilon)} - 1 \right) \left(\frac{a}{v} + \frac{\Omega(\xi)-a}{u} \right) \leqslant \frac{1}{1-1/\Lambda_r - \delta(\varepsilon)},$$

also wegen (5.11)

$$\Omega(\xi) < r+1.$$

Berücksichtigt man, daß $\Lambda_2 \geqslant 25/14$ ist ([7], Seite 239), so folgt aus Satz 5.1 der in der Einleitung formulierte Satz 1.

Im folgenden sei K ein total reeller Zahlkörper vom Grade n. Sei $\mathfrak{a}$ ein ganzes Ideal aus K mit $(\mathfrak{a}, \mathfrak{k}) = 1$, ferner:

$M_{\mathfrak{a}}(h)$:

$$= \left\{ \xi;\ \begin{matrix} \xi \equiv \beta \bmod \mathfrak{k}, \\ \xi \equiv 0 \bmod \mathfrak{a} \end{matrix} \quad (\beta, \mathfrak{k}) = 1;\ y_\nu - h_\nu N\mathfrak{k}^{1/n} < \xi^{(\nu)} \leqslant y_\nu,\ \nu = 1, \ldots, n \right\},$$

wobei mit einer festen Konstanten $0 < A \leqslant 1$ und $H := h_1 \ldots h_n$ gelten soll:

$$h_\nu \geqslant A \cdot H^{1/n}.$$

Ferner sei

$$0 < h_\nu N\mathfrak{k}^{1/n} \leqslant y_\nu, \qquad \nu = 1, \ldots, n;\ H > 1.$$

Mit $B = (2\pi)^{r_2}/|\sqrt{d}| = |\sqrt{d}|^{-1}$ gilt dann analog zu (1.28)

$$(5.12)\qquad |M_{\mathfrak{a}}(h)| = B \cdot \frac{H}{N\mathfrak{a}} + O\left\{ \left(\frac{H}{N\mathfrak{a}} \right)^{(n-1)/n} + 1 \right\}$$

mit nur von A und K abhängender O-Konstanten. Sei

$$(5.13)\qquad \begin{cases} B_{\mathfrak{k}}(M_{\mathfrak{a}}(h), \varrho) := |\xi \in M_{\mathfrak{a}}(h);\ \mathfrak{p}_\nu \nmid \xi \text{ für } \nu = 1, \ldots, \varrho|, \quad \varrho \geqslant 1; \\ B_{\mathfrak{k}}(M_{\mathfrak{a}}(h), 0) := |M_{\mathfrak{a}}(h)|. \end{cases}$$

Es ist zu untersuchen, ob für $B_{\mathfrak{k}}(M_{\mathfrak{a}}(h), \varrho)$ entsprechende obere und untere Abschätzungen gelten wie für $A_{\mathfrak{k}}(M_{\mathfrak{a}}, \varrho)$. Zunächst sieht man unmittelbar die Gültigkeit der (2.28) entsprechenden Gleichung ein:

$$(5.14) \qquad B_{\mathfrak{k}}(M_{\mathfrak{a}}(h), \varrho) = |M_{\mathfrak{a}}(h)| - \sum_{\nu=1}^{\varrho}{}' B_{\mathfrak{k}}(M_{\mathfrak{a}\mathfrak{p}_\nu}(h), \nu-1)$$
$$\text{für} \quad (\mathfrak{a}, \mathfrak{k}\mathfrak{p}_1 \ldots \mathfrak{p}_\varrho) = 1.$$

Man überzeugt sich leicht, daß man wegen (5.12), (5.14) mit $B_{\mathfrak{k}}(M_{\mathfrak{a}}(h), \varrho)$ völlig analog verfahren kann wie mit $A_{\mathfrak{k}}(M_{\mathfrak{a}}, \varrho)$, wenn man nur $y_1, \ldots, y_n$ durch $h_1, \ldots, h_n$ und y durch H ersetzt. Insbesondere gelten dann die Ungleichungen (5.3), (5.4). Durch Anwendung des Kuhnschen Schrittes erreicht man (5.7), wo nun mit $(\beta, \mathfrak{k}) = 1$

$$C^{a}_{\mathfrak{k},\beta}(H, H^{1/u}, H^{1/v}):$$
$$= \Big| \xi;\ \xi \equiv \beta \bmod \mathfrak{k};\ y_\nu - h_\nu N\mathfrak{k}^{1/n} < \xi^{(\nu)} \leqslant y_\nu,\ \nu = 1, \ldots, n;$$
$$\mathfrak{g} \nmid \xi \text{ für } N\mathfrak{p} < H^{1/v};\ \mathfrak{p}^2 \nmid \xi \text{ für } H^{1/v} \leqslant N\mathfrak{p} < H^{1/u} \text{ und } \sum_{\substack{\mathfrak{p} | \xi \\ H^{1/v} \leqslant N\mathfrak{p} < H^{1/u}}} 1 \leqslant a \Big|$$

ist, $1 < u \leqslant v$.

Überlegungen analog den in [7] angegebenen führen dann zu dem

SATZ 5.2. *Sei K ein total reeller algebraischer Zahlkörper vom Grade n über dem Körper der rationalen Zahlen. Die Zahlen $y_1, \ldots, y_n$ sollen die Bedingungen* (1.26) *erfüllen. Gegeben seien ferner Zahlen $h_1, \ldots, h_n$ mit den Eigenschaften*

$$0 < h_\nu N\mathfrak{k}^{1/n} \leqslant y_\nu, \qquad \nu = 1, \ldots, n;$$
$$H: = h_1 \ldots h_n;\ h_\nu \geqslant A \cdot H^{1/n} \quad \text{für} \quad \nu = 1, \ldots, n.$$

Es sei $r \geqslant 2$ eine natürliche Zahl, $\mathfrak{k}$ ein ganzes Ideal aus K, $\beta \in K$ eine ganze Zahl mit $(\beta, \mathfrak{k}) = 1$ und $\varepsilon > 0$. Für $y \geqslant y_0(r, \varepsilon, A, K)$ und

$$H = y^{1/\Lambda_r + \varepsilon}, \qquad N\mathfrak{k} \leqslant y^{1 - 1/\Lambda_r - \varepsilon}$$

gibt es mindestens eine ganze Zahl $\xi \in K$ mit

$$\xi \equiv \beta \bmod \mathfrak{k};$$
$$y_\nu - h_\nu N\mathfrak{k}^{1/n} < \xi^{(\nu)} \leqslant y_\nu, \qquad \nu = 1, \ldots, n;$$
$$\Omega(\xi) \leqslant r.$$

(Man kann sich ohne weiteres überlegen, daß man zu gegebenen $y_1, \ldots, y_n$, welche (1.26) erfüllen, stets $h_1, \ldots, h_n$ mit den angegebenen Eigenschaften finden kann.)

Der Fall $r = 2$ des Satzes 5.2 liefert den Satz 2 der Einleitung.

Literaturangaben

[1] H. M. Andruhaev, *The problem of adding prime and "almost" prime numbers in algebraic number fields*, Soviet Math., Doklady, 5 (1964) # 6, S. 1666-1668.

[2] N. C. Ankeny und H. Onishi, *The general sieve*, Acta Arith. 10 (1964), S. 31-62.

[3] N. G. de Bruijn, *On the number of uncancelled elements in the sieve of Eratosthenes*, Indagationes Mathematicae, Proc. Sect. Sci., XII (1950), S. 247-256.

[4] E. K. Fogels, *On the distribution of prime ideals*, Soviet Math., Doklady, 2 (1961) # 4, S. 1322-1325.

[5] — *On the distribution of prime ideals*, Acta Arith. 7 (1962), S. 255-269.

[6] — *Primes in sequences of norms of ideals*, Latvijas PSR Zinātņu Akad. Vestis 12 (173) (1961), S. 29-34.

[7] W. B. Jurkat und H.-E. Richert, *An improvement of Selberg's sieve method. I*, Acta Arith. 11 (1965), S. 217-240.

[8] E. Landau, *Über die zu einem algebraischen Zahlkörper gehörige Zetafunktion und die Ausdehnung der Tschebyschefschen Primzahlentheorie auf das Problem der Verteilung der Primideale*, J. reine angew. Math. 125 (1903), S. 64-188.

[9] — *Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale*, B. G. Teubner Verlag, 1918.

[10] D. N. Lenskoĭ, *Estimation from above of certain numbertheoretical functions in algebraic number fields*, Soviet Math., Doklady, 4 (1963) # 1, S. 641-643.

[11] H. Rademacher, *Über die Anwendung der Viggo Brunschen Methode auf die Theorie der algebraischen Zahlkörper*, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., Phys.-Math. Klasse, (1923), S. 211-218.

[12] G. J. Rieger, *Verallgemeinerung der Siebmethode von A. Selberg auf algebraische Zahlkörper*. I. II. III, J. reine angew. Math., 199 (1958), S. 208-214; 201 (1959), S. 157-171; 208 (1961), S. 79-90.

[13] — *On prime ideals of smallest norm in an ideal class mod $\mathfrak{f}$ of an algebraic number field*, Bull. Amer. Math. Soc. 67 (1961), S. 314-315.

[14] A. Selberg, *On elementary methods in prime number theory and their limitations*, 11. Skand. Mat. Kongr., Trondhjem 1949, S. 13-22.

[15] — *The general sieve method and its place in prime number theory*, Proc. Int. Congr. Math., Cambridge, Mass. 1 (1950), S. 286-292.

[16] T. Tatuzawa, *Additive prime number theory in an algebraic number field*, J. Math. Soc. Japan 7 (1955), S. 409-423.

[17] A. I. Vinogradoff, *Estimates from below by the sieve process in algebraic number fields*, Soviet Math., Doklady, 5 (1964) #1, S. 6-9.

[18] — *The sieve method in algebraic number fields. Lower bounds*, Mat. Sb. (N. S.) 64 (106) (1964), S. 52-78.

Reçu par la Rédaction le 3. 2. 1967