where $I_1^*(N)$ is given by (81), and

$$I_2^*(N) = \sum_{q \leqslant N^{1/8}} \sum_{a} \int_{\mathfrak{M}^*_{a,q}} \Theta^*(a, q, a)\,\Omega_1^*(a)\,\Omega_2^*(a)\,e(-Na)\,da, \tag{83}$$

$$I_3^*(N) = \int_{\mathfrak{M}^*} \{\theta^*(a) - \Theta^*(a, q, a)\}\,\Omega_1^*(a)\,\Omega_2^*(a)\,e(-Na)\,da, \tag{84}$$

$$I_4^*(N) = \int_{\mathfrak{m}^*} (\theta^* a)\,\Omega_1^*(a)\,\Omega_2^*(a)\,e(-Na)\,da. \tag{85}$$

It follows trivially from Lemmas 22 and 23, that

$$I_3^*(N) \ll N^{-1-10\delta}\,\theta^*(0)\,\Omega_1^*(0)\,\Omega_2^*(0),$$
$$I_2^*(N) \ll N^{-1-10\delta}\,\theta^*(0)\,\Omega_1^*(0)\,\Omega_2^*(0).$$

Also from Lemma 25,

$$I_4^*(N) \ll N^{-1-10\delta}\,\theta^*(0)\,\Omega_1^*(0)\,\Omega_2^*(0).$$

Hence from (81), and (82), we have

$$r^*(N) \gg N^{-1-\delta}\,\theta^*(0)\,\Omega_1^*(0)\,\Omega_2^*(0);$$

so that $r^*(N) > 0$ for large N.

This completes the proof of Theorem 2.

Acknowledgement. I am indebted to prof. Roth and prof. Halberstam for constant encouragement, valable advice and criticisms. I should also like to thank prof. Halberstam, prof. Estermann and the referee for checking manuscripts and making useful changes.

Finally, I like to thank Messrs T. E. Sellars and R. Wooldridge for their kind encouragement.

References

[1] H. Davenport, *On Waring's problem for fourth powers*, Annals of Math. (2) 40 (1939), pp. 731-747.

[2] — *On Waring's problem for cubes*, Acta Math. 71 (1939), pp. 123-143.

[3] — *On sums of positive integral k-th powers*, Amer. J. Math. 64 (1942), pp. 189-198.

[4] A. Y. Khinchin, *Three pearls of number theory*, Translated from the second (1948) revised Russian edition by F. Bagemihl, H. Komm and W. Seidel, Rochester, N. Y. 1952.

[5] E. Landau, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, Vol. I, Leipzig 1927.

[6] K. F. Roth, *A problem in additive number theory*, Proc. London Math. Soc. (2) 53 (1951), pp. 381-395.

[7] E. J. Scourfield, *A generalization of Waring's problem*, J. London Math. Soc. 35 (1960), pp. 98-116.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
CONSTANTINE COLLEGE OF TECHNOLOGY
Middlesbrought, England

Reçu par la Rédaction le 9. 1. 1967

ACTA ARITHMETICA
XIII (1968)

Sur les nombres qui ont des propriétés additives et multiplicatives données

par

A. O. Gelfond (Moscou)

Soit $q \geqslant 2$ un entier. Considérons la représentation d'un entier dans le système de numération de base q et posons

$$N = \sum_{k=0}^{\nu} C_k q^k, \quad 0 \leqslant C_k \leqslant q-1, \tag{1}$$

où l'on suppose aussi $C_\nu \neq 0$, $k = 0, 1, \ldots, s$, tandis que tous les autres C_s, $s \neq \nu_k$ sont nuls.

Admettons que la fonction $f(x)$ soit additive dans le système de base q, autrement dit que

$$f(N) = f(N_1) + f(N_2), \quad N = N_1 + N_2, \quad N_1 < 2^\nu, \quad N_2 = 2^\nu N_3, \tag{2}$$

où N, N_1, N_2, N_3 sont non négatifs, par exemple

$$f_1(N) = N; \quad f_2(N) = \sum_{1}^{\nu} C_k, \quad N = \sum_{0}^{\nu} C_k q^k, \quad 0 \leqslant C_k \leqslant q-1;$$

$$f_3(N) = \alpha f_1(N) + \beta f_2(N) = \alpha \sum_{0}^{\nu} C_k q^k + \beta \sum_{0}^{\nu} C_k.$$

Alors

$$\sum_{1}^{N} f(n) = \sum_{a_0=0}^{q-1} \cdots \sum_{a_\nu=0}^{C_k-1} f\Big(\sum_{0}^{\nu} q_k q^k\Big) + \sum_{a_0=0}^{q-1} \cdots \sum_{a_{\nu_1}=0}^{C_{\nu_1}-1} f\Big(\sum_{k=0}^{\nu_1} a_k q^k + C_\nu q^\nu\Big) + \ldots, \tag{3}$$

ou, en vertu de l'additivité de $f(x)$,

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) = \prod_{0}^{\nu-1} [f(0) + f(q^k) + \ldots + f((q-1)q^k)][f(0) + \ldots + f((C_\nu - 1)q^\nu)] + \tag{4}$$
$$+ \prod_{0}^{\nu_1-1} [f(0) + \ldots + f((q-1)q^k)][f(0) + \ldots + f((C_{\nu_1} - 1)q^{\nu_1})]\, f(C_\nu q^\nu) + \ldots,$$

d'où résulte, si $f(n) \leqslant M$, l'inégalité

$$(5) \qquad \Big|\sum_{1}^{N} f(n)\Big| < qM \sum_{n=0}^{\nu-1} \Big|\prod_{k=0}^{n} [f(0)+f(q^k)+\ldots+f\big((q-1)q^k\big)]\Big|,$$

où $\nu = [\ln N/\ln q]$. Soient maintenant a un nombre réel, z et p des entiers, $p \geqslant 2$, $1 \leqslant z \leqslant p-1$, $(p, q-1) = 1$. Cette dernière condition simplifie beaucoup les estimations ultérieures, mais elle est inutile quand $q = 2$ (¹).

Supposons maintenant que $f(n)$ a la forme

$$f(n) = \exp\Big[2\pi i\Big(an + \frac{z}{p}S(n)\Big)\Big]; \qquad n = \sum_{0}^{\nu} a_k q^k, \qquad S(n) = \sum_{k=0}^{\nu} a_k.$$

Alors

$$(6) \qquad \Big|\sum_{S=0}^{q-1} f(Sq^k)\Big| = \Big|\sum_{S=0}^{q-1} e^{2\pi i(aq^k+z/p)S}\Big| = \Big|\frac{\sin \pi q(aq^k+z/p)}{\sin \pi(aq^k+z/p)}\Big|, \quad (S(q^k\nu) = \nu).$$

Posons $\beta = aq^k + z/p$, $\beta_1 = aq^{k+1} + z/p$ et considérons le produit

$$\Big|\frac{\sin \pi q\beta}{\sin \pi\beta} \cdot \frac{\sin \pi q\beta_1}{\sin \pi\beta_1}\Big| = Q.$$

Remarquons d'abord que $q\beta - \beta_1 = \dfrac{z}{p}(q-1)$, c'est-à-dire $(q\beta - \beta_1) > 1/p$, où (x) désigne l'entier le plus proche de x, car $(p, q-1) = 1$. Mais il en résulte que ou bien $(\beta) \geqslant (2pq)^{-1}$, ou bien $(\beta_1) \geqslant (2pq)^{-1}$. Ensuite,

$$(7) \qquad \varphi(x) = \Big|\frac{\sin \pi qx}{\sin \pi x}\Big|$$

admet la période 1 et, sur l'intervalle $(2pq)^{-1} \leqslant x \leqslant 1-(2pq)^{-1}$, satisfait à l'inégalité

$$\varphi(x) \leqslant \frac{\sin(\pi/2p)}{\sin(\pi/2pq)} < q.$$

Par contre, sur les intervalles $0 \leqslant x \leqslant (2pq)^{-1}$, $1 \geqslant x \geqslant 1-(2pq)^{-1}$, on a

$$(8) \qquad \begin{aligned} \varphi(x) &\leqslant \Big|\frac{\sin \pi\theta q}{\sin \pi\theta}\Big|, \qquad \theta \leqslant x \leqslant \varphi\Big(\frac{1}{2pq}\Big), \\ \varphi(x) &\leqslant \Big|\frac{\sin \pi\theta q}{\sin \pi\theta}\Big|, \qquad 1-\varphi\Big(\frac{1}{2pq}\Big) \leqslant x \leqslant 1-\theta. \end{aligned}$$

(¹) Si $p \mid q-1$ tous les problèmes qu'on vient de considérer sont triviaux.

Pour la démonstration de ces dernières inégalités, il suffit de considérer, sur $0 \leqslant x \leqslant (2pq)^{-1}$, la dérivée de $\varphi(x)$. Nous avons

$$\varphi'(x) = \frac{\pi q \cos \pi qx \cos \pi x}{\sin^2 \pi x}(q \operatorname{tg} \pi x - \operatorname{tg} \pi qx) > 0, \qquad 0 \leqslant x \leqslant (2pq)^{-1}.$$

Car, si $0 \leqslant x \leqslant \pi/2q$, on a

$$\operatorname{tg} x - \frac{1}{q}\operatorname{tg} qx = \int_0^x \Big[\frac{1}{\cos^2 y} - \frac{1}{\cos^2 qy}\Big]dy > 0.$$

On démontre de la même manière la seconde inégalité pour $[1-(2pq)^{-1}, 1]$. Ainsi, pour tous les p et q tels que $(p, q-1) = 1$, nous aurons l'inégalité

$$(9) \qquad Q < q\frac{\sin(\pi/2p)}{\sin(\pi/2pq)} = q^{2\lambda}, \qquad \lambda = \frac{1}{2\ln q}\ln\frac{q\sin(\pi/2p)}{\sin(\pi/2pq)} < 1.$$

En utilisant les inégalités (9) et (5) nous aurons finalement, si $(p, q-1) = 1$, a est arbitraire et $1 \leqslant z \leqslant p-1$, l'inégalité

$$\prod_{k=0}^{n}\Big|\sum_{S=0}^{q-1}\exp\{2\pi i[(aqq^k+z/p)S]\}\Big| < q^{\lambda n+1}.$$

A partir de cette inégalité, nous obtenons, sous les mêmes hypothèses: $(p, q-1) = 1$, $1 \leqslant z \leqslant p-1$, et a arbitraire, la suivante:

$$(10) \qquad \begin{aligned} \Big|\sum_{n=1}^{N}\exp\Big\{2\pi i\Big[a_n + \frac{z}{p}S(n)\Big]\Big\}\Big| &< q^2\sum_{n=0}^{\nu-1} q^{\lambda n} \\ &< \frac{q^{\lambda+2}}{q^\lambda - 1}[q^{\nu-1}]^\lambda < \gamma_0 N^\lambda, \qquad \lambda < 1. \end{aligned}$$

Remarquons également que, si $z \equiv 0 \bmod p$, $a = t/m \not\equiv 0 \bmod 1$, où t est entier, on a

$$(11) \qquad \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i n t/m} = \sum_{n=1}^{N_1} e^{2\pi i n t/m}, \qquad N_1 < m.$$

Maintenant nous pouvons formuler le

Lemme I. *Si p, q, m, t sont des entiers et si a est réel, alors pour tout a on a, sous les hypothèses: $1 \leqslant z \leqslant p-1$, $(p, q-1) = 1$, l'inégalité* (10) *pour un $\lambda < 1$, $\lambda = \lambda(p, q)$,*

D'autre part, si $z \equiv 0 \bmod p$, et $a = t/m \not\equiv 0 \bmod 1$, t entier, on a l'inégalité (11).

Posons

$$S(n) = \sum_{k=0}^{\nu} a_k, \qquad n = \sum_{k=0}^{\nu} a_k q^k.$$

Dans le cas $q=2$, $p=2$ on peut donner une estimation, plus précise que (10), qui peut être réalisée. Dans ce cas particulier on a $z=1$. Nous allons démontrer un lemme auxiliaire.

LEMME II. *Si $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ quand $0 \leqslant x \leqslant 1$, si x_0 est la racine le plus à droite de l'équation $x = f(x)$ et si $f'(x) \leqslant -1$ quand $x \geqslant x_0$ et $t_k = f(t_{k-1})$, $t_0 = t$, $0 \leqslant t \leqslant 1$ on a l'inégalité*

$$\prod_0^{\nu-1} t_k < x_0^{\nu-1}. \tag{12}$$

En effet, supposons que $t_k = x_0(1+\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Alors

$$f(t_k) = f(x_0+\varepsilon x_0) = f(x_0)+\varepsilon x_0 f'(\varepsilon) < x_0(1-\varepsilon)$$

et

$$t_k f(t_k) < x_0^2(1+\varepsilon)(1-\varepsilon) < x_0^2.$$

Cela implique notre lemme. Dans le cas considéré la relation (6) prendra la forme

$$\Big|\sum_{S=0}^{q-1} f(Sq^k)\Big| = \big|1+\exp\big(2\pi i(2^k\alpha+\tfrac{1}{2})\big)\big| < 2\,|\sin 2^k\alpha|,$$

et il nous faut estimer le produit

$$\prod_0^{\nu-1} |\sin 2^k\alpha|.$$

On a ici $f(x) = 2x\sqrt{1-x^2}$, $x = \sin\alpha$, $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $x_0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, comme on peut aisément le voir. Par conséquent

$$2^\nu \prod_0^{\nu-1} |\sin 2^k\alpha| < 2^\nu\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{\nu-1} = \frac{2}{\sqrt{3}}3^{\nu/2} = \frac{2}{\sqrt{3}}2^{\lambda\nu}, \qquad \lambda = \frac{\ln 3}{2\ln 2},$$

d'où résulte l'inégalité

$$\Big|\sum_1^N \exp\big(2\pi i[\alpha n+\tfrac{1}{2}S(n)]\big)\Big| < \gamma_1 N^\lambda, \qquad \lambda = \frac{\ln 3}{2\ln 2},$$

où γ_1 est une constante absolue.

Les estimations obtenues permettent de prouver quelques théorèmes.

THÉORÈME I. [2] *Le nombre des entiers n, $n \leqslant x$, satisfaisant aux conditions*

$$n \equiv l \bmod m; \qquad \sum_{k=0}^{\nu} a_k \equiv a \bmod p, \qquad n = \sum_{k=0}^{\nu} a_k q^k,$$

où $q>1$, $p>1$, $m>1$, l, a sont des entiers et $(p, q-1) = 1$, est donné par la formule

$$T_0(x) = \frac{x}{mp} + O(x^\lambda), \qquad \lambda < 1, \tag{13}$$

où λ ne dépend pas des x, m, l, a.

Démonstration. Tout d'abord nous avons les représentations

$$\begin{aligned} T_0(N) &= \frac{1}{pm}\sum_{t=0}^{m-1}\sum_{z=0}^{p-1}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i\left[\frac{n-l}{m}t+\frac{S(n)-a}{p}z\right]} \\ &= \frac{1}{mp}\sum_{t=0}^{m-1}\sum_{z=0}^{p-1} e^{-2\pi i\left(\frac{lt}{m}+\frac{az}{p}\right)} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i\left[\frac{nt}{m}+\frac{z}{p}S(n)\right]} \\ &= \frac{N}{pm} + \frac{1}{pm}\sum_{t=1}^{m-1}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i\frac{n-l}{m}t} + \\ &\quad + \frac{1}{pm}\sum_{t=0}^{m-1}\sum_{l=1}^{p-1} e^{-2\pi i\left(\frac{lt}{m}+\frac{az}{p}\right)} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i\left[\frac{nt}{m}+\frac{z}{p}S(n)\right]}, \end{aligned}$$

où

$$S(n) = \sum_{k=0}^{\nu} a_k, \qquad n = \sum_{k=0}^{\nu} a_k q^k, \qquad N = [x].$$

En utilisant l'égalité (11) nous obtenons l'estimation

$$\left|\frac{1}{mp}\sum_{t=1}^{m-1}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i\frac{n-l}{m}t}\right| < \frac{1}{pm}\left|\sum_{t=1}^{m-1}\sum_{n=1}^{N_1} e^{2\pi i\frac{n-l}{m}t}\right|$$

$$< \frac{N_1}{pm} + \frac{1}{p} < \frac{2}{p} \qquad (N_1 < m).$$

A partir de cette estimation et de l'inégalité (10) nous obtenons celle du théorème I.

[2] Un cas particulier (p — premier) de ce théorème se trouve dans le travail de M. N. J. Fine, *The distribution of the sum of digits* (mod p), Bull. Amer. Math. Soc. 71 (1965), p. 651-652.

THÉORÈME II. *Le nombre des entiers n, $n \leqslant x$, qui ne se divisent pas par la puissance z-ième de quelque nombre premier et qui satisfont aux conditions*

$$S(n) = \sum_{0}^{\nu} a_k \equiv l \bmod p, \quad n = \sum_{k=0}^{\nu} a_k q^k \tag{14}$$

est donné par la formule

$$T_1(x) = \frac{x}{p\zeta(z)} + O(x^{\lambda_1}), \quad \lambda_1 = \frac{1+(z-1)\lambda}{z}, \quad \lambda < 1. \tag{15}$$

Démonstration. Nous avons, tout d'abord,

$$T_1(x) = \sum_{n=1}^{N} \varphi(n) \sum_{d^z/n} \mu(d) = \sum_{n=1}^{N} \varphi(n)\psi(n), \quad N = [x],$$

où $\varphi(n) = 1$ quand (14) est satisfait, tandis que $\varphi(n) = 0$ dans le cas contraire, et $\psi(n) = 1$ selon que n ne se divise par aucun p^z, $p > 1$, ou se divise par quelque p^z de cette forme.

En faisant les transformations habituelles, nous obtenons pour $N_1 = [x^{1/z}]$:

$$T_1(N) = \sum_{d \leqslant N_1} \mu(d) \sum_{k \leqslant x/d^z} \varphi(d^z k) = \sum_{d=1}^{N_2} \mu(d) \sum_{k \leqslant x/d^z} \varphi(d^z k) + \sum_{N_2+1}^{N_1} \mu(d) \sum_{k \leqslant x/d^z} \varphi(d^z k)$$
$$= R_1 + R_2.$$

Ensuite

$$|R_2| < \sum_{N_2+1}^{N_1} \frac{x}{d^z} < \frac{x}{z-1} N_2^{1-z},$$

et, de plus, en vertu de la représentation (13), où l'on remplace m par d^z, nous aurons les égalités

$$R_1 = \sum_{d \leqslant N_2} \mu(d) \sum_{k \leqslant x/d^z} \varphi(d^z k) = \sum_{d \leqslant N_2} \mu(d) \left[\frac{x}{pd^z} + O(x^\lambda)\right]$$
$$= \frac{x}{p\zeta(z)} + O\left(\frac{x}{N_2^{z-1}}\right) + O(N_2 x^\lambda).$$

En réunissant les deux estimations et en posant $N_2 = [x^{(1-\lambda)/z}]$, nous obtenons

$$T_1(N) = \frac{x}{p\zeta(z)} + O(x^{\lambda_1}), \quad \lambda_1 = \frac{1+(z-1)\lambda}{z}, \quad \lambda < 1.$$

On démontre d'une manière semblable le

THÉORÈME III. *Posons $\varphi(n) = 1$ dans le cas où les entiers $n, n+1, \ldots, n+\nu-1$ ne se divisent pas par p^z, où p est premier, z, q sont fixés $q > 1$, et $\varphi(n) = 0$ dans le cas contraire.*

Si

$$S(n) = \sum_{0}^{n} a_k = l \bmod m, \quad n = \sum_{0}^{n} a_k q^k, \quad (m, q-1) = 1, \quad \varphi(n) = 1, \tag{16}$$

le nombre des entiers n qui satisfont à toutes les conditions (16) *et sont inférieurs à x, sera*

$$T(x) = \frac{x}{m\zeta^\nu(z)} + O(x^{\lambda_1}), \quad \lambda_1 < 1. \tag{17}$$

La démonstration de cette assertion résulte de la relation

$$T(x) = \sum_{n \leqslant x} \sum_{d_0^z/n} \sum_{d_1^z/(n+1)} \cdots \sum_{d_{\nu-1}^z/(n+\nu-1)} \mu(d_0) \ldots \mu(d_{\nu-1}) \varphi(n),$$

où $\varphi(x)$ satisfait aux conditions (16).

Après les mêmes transformations que dans le théorème II, nous obtenons la formule demandée.

Remarquons aussi qu'il résulte directement du lemme I, que les nombres $\{\alpha_n\}$, pour lesquels n parcourt tous les nombres naturels et qui satisfont aux conditions (16), sont équirépartis sur le segment $(0, 1)$. Pour conclure, nous indiquerons des problèmes suivants qui se posent directement dans le même ordre d'idées.

Tout d'abord, il serait intéressant de prouver que si $(q_1, q_2) = 1$ et

$$S_1(N) = \sum_{k=0}^{\nu} a_k, \; N = \sum_{0}^{\nu} a_k q^k; \quad S_2(N) \equiv l_2 \bmod m_2,$$

le nombre des entiers $N \leqslant x$ tels que

$$S_1(N) \equiv l_1 \bmod m_1, \quad S_2(N) \equiv l_2 \bmod m_2,$$

où $(m_1, q_1-1) = 1, (m_2, q_2-1) = 1$ est donné par la formule

$$\psi(x) = \frac{x}{m_1 m_2} + O(x^\delta), \quad \delta < 1.$$

Il serait aussi intéressant de trouver le nombre des nombres premiers $p \leqslant x$ tels que $S(p) \equiv l \bmod m$, où $S(p)$ est définie plus haut dans le système de numération de base q. Finalement, signalons comme problème à résoudre l'estimation du nombre des valeurs du polynôme $P(t)$ ne prenant que des valeurs entières sur l'ensemble A_{lm} des entiers rationnels, pour lesquelles on a $S[P(n)] \equiv l \bmod m$.

Reçu par la Rédaction le 3. 2. 1967