ACTA ARITHMETICA
XII (1967)

Existenz eines invarianten Maßes beim Jacobischen Algorithmus

von

F. Schweiger (Wien)

In einer früheren Arbeit [7] wurde gezeigt, daß die durch

$$\delta(x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{x_2}{x_1} - \left[\frac{x_2}{x_1}\right], \frac{x_3}{x_1} - \left[\frac{x_3}{x_1}\right], \ldots, \frac{1}{x_1} - \left[\frac{1}{x_1}\right]\right)$$

definierte Abbildung des n-dimensionalen Einheitswürfels in sich bezüglich des Lebesgueschen Maßes unzerlegbar ist. Wegen der Terminologie sei in erster Linie auf [2] verwiesen. Ist nun

$$(x_i) = [a_i^{(1)}, a_i^{(2)}, \ldots, a_i^{(k)}, \ldots]$$

die 1-1-deutige Entwicklung eines reellen Punktes $x = (x_i)$ aus dem Einheitswürfel $B^{(0)}$, so bedeutet

$$\delta(x_i) = [a_i^{(2)}, a_i^{(3)}, \ldots, a_i^{(k)}, \ldots]$$

d.h. es liegt eine Verschiebungstransformation, analog zu der von Marczewski für Kettenbrüche eingeführten Transformation, vor (s. [2] oder [4]).

Bezüglich der verwendeten Bezeichnungen und Sätze über den Jacobischen Algorithmus sei insbesondere auf [3], [5], [6] oder [7] verwiesen. Es soll nur noch erwähnt sein, daß ich unter $B^{(\nu)}$ den Lebesguemeßbaren Bereich des Einheitswürfels verstehe, der alle Punkte (x_i) enthält, deren Entwicklung bis zum ν-ten Schritt vorgegeben ist, etwa durch

$$[k_i^{(1)}, k_i^{(2)}, \ldots, k_i^{(\nu)}, \ldots].$$

Es soll in dieser Note folgender Satz bewiesen werden:

Satz. *Sei δ die durch*

$$\delta(x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{x_2}{x_1} - \left[\frac{x_2}{x_1}\right], \frac{x_3}{x_1} - \left[\frac{x_3}{x_1}\right], \ldots, \frac{1}{x_1} - \left[\frac{1}{x_1}\right]\right)$$

definierte Transformation des Einheitswürfels $B^{(0)}$ in sich. Dann existiert ein Maß μ sodaß gilt:

a) *μ ist invariant bezüglich,*

b) *$K_1\mathfrak{M}E \leqslant \mu(E) \leqslant K_2\mathfrak{M}E$ für jede meßbare Menge E.*

$\mathfrak{M}$ bedeute hier das n-dimensionale Lebesguesche Maß.

Beweis. Hilfssatz 3 der Arbeit [7] besagt im wesentlichen, daß es genügt, die Mengen $B^{(\nu)}$ zu betrachten. Für das weitere grundlegend ist die Abschätzung (s. [5], (4.1))

$$\frac{1}{n!(2n+1)(\omega_{0n}^{(\nu)}k_n^{(\nu)})^{n+1}} < \mathfrak{M}B^{(\nu)} < \frac{1}{(\omega_{0n}^{(\nu)}k_n^{(\nu)})^{n+1}}. \tag{1}$$

Ist nun $B^{(\nu)}$ der Bereich aller $\alpha \epsilon B^{(0)}$ mit

$$[k_i^{(1)}, k_i^{(2)}, k_i^{(3)}, \ldots, k_i^{(\nu)}, \ldots]$$

so ist $\delta^{-m}B^{(\nu)}$ die Vereinigung über alle Bereiche $B^{(m,\nu)}$

$$[s_i^{(m)}, \ldots, s_i^{(1)}, k_i^{(1)}, \ldots, k_i^{(\nu)}, \ldots]$$

wo die Vereinigung über alle zulässigen Wertsysteme $s_i^{(m)}, \ldots, s_i^{(1)}$ erstreckt wird. Nun werden die Größen $\omega_{ij}^{(\nu)}$ nach den Formeln

$$\Omega^{(\nu)} = A^{(0)}A^{(1)}\ldots A^{(\nu-1)}$$

mit

$$A^{(\mu)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & k_1^{(\mu)} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & k_2^{(\mu)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & k_n^{(\mu)} \end{pmatrix}$$

berechnet. Die den Bereichen $B^{(m,\nu)}$ entsprechenden $\omega_{ij}^{(m,\nu)}$ erhält man dann nach den Formeln

$$\begin{aligned}\Omega^{(m,\nu)} &= A^{(0)}S^{(m)}\ldots S^{(1)}A^{(1)}A^{(2)}\ldots A^{(\nu-1)} \\ &= A^{(0)}S^{(m)}\ldots S^{(1)}A^{(0)-1}\Omega^{(\nu)}\end{aligned}$$

mit Matrizen

$$S^{(t)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & s_1^{(t)} \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & s_2^{(t)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & s_n^{(t)} \end{pmatrix}.$$

Sei ferner $A^{(m)} = A^{(0)}S^{(m)}\ldots S^{(1)}A^{(0)^{-1}}$ mit den Matrixelementen $a_{ij}^{(m)}$, so errechnet man

$$\omega_{0n}^{(m,\nu)} = a_{00}^{(m)}\omega_{0n}^{(\nu)} + a_{01}^{(m)}\omega_{1n}^{(\nu)} + \ldots + a_{0n}^{(m)}\omega_{nn}^{(\nu)}.$$

Leicht überlegt man sich $a_{00}^{(m)} \geqslant a_{0i}^{(m)}$, so wie $\omega_{0n}^{(\nu)} \geqslant \omega_{in}^{(\nu)}$ schon bekannt ist. Demnach ist

$$a_{00}^{(m)}\omega_{0n}^{(\nu)}(n+1) \leqslant \omega_{0n}^{(m,\nu)} \leqslant a_{00}^{(m)}\omega_{0n}^{(\nu)}.$$

Es folgt daraus

$$\frac{1}{n!(2n+1)^{n+1}(n+1)^{n+1}(a_{00}^{(m)}\omega_{0n}^{(\nu)}k_n^{(\nu)})^{n+1}} < \mathfrak{M}B^{(m,\nu)} < \frac{1}{(a_{00}^{(m)}\omega_{0n}^{(\nu)}k_n^{(\nu)})^{n+1}}$$

wenn man (1) für $B^{(m,\nu)}$ hinschreibt.

Summiert man über alle $B^{(m,\nu)}$, d.h. betrachtet man alle zulässigen Wertsysteme $s_i^{(m)}, \ldots, s_i^{(1)}$, so erhält man

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n!(2n+1)^{n+1}(n+1)^{n+1}(\omega_{0n}^{(\nu)}k_n^{(\nu)})^{n+1}}\sum\frac{1}{(a_{00}^{(m)})^{n+1}} \\ &\qquad < \mathfrak{M}(\delta^{-m}B^{(\nu)}) < \frac{1}{(\omega_{0n}^{(\nu)}k_n^{(\nu)})^{n+1}}\sum\frac{1}{(a_{00}^{(m)})^{n+1}}.\end{aligned} \tag{2}$$

Es ist zu beachten, daß $\sum\frac{1}{(a_{00}^{(m)})^{n+1}}$ nur insofern von $B^{(\nu)}$ abhängt, als einige Wertsysteme nichtzulässig sind (vgl. [6], die Betrachtungen in § 3). Sei nun insbesonders $B^{(\nu)} = B^{(0)}$, d.h. der gesamte Einheitswürfel, so liegen einerseits keinerlei Einschränkungen für die Wertsysteme $s_i^{(m)}, \ldots, s_i^{(1)}$ vor, andererseits ist

$$\mathfrak{M}\delta^{-m}B^{(0)} = 1.$$

Da man ferner

$$\frac{1}{n!(2n+1)^{n+1}(n+1)^{n+1}(a_{00}^{(m)})^{n+1}} < \mathfrak{M}B^{(m,0)} < \frac{1}{(a_{00}^{(m)})^{n+1}} \tag{3}$$

für $\nu = 0$ nachrechnet, ist stets

$$\sum\frac{1}{(a_{00}^{(m)})^{n+1}} < n!(2n+1)^{n+1}(n+1)^{n+1}. \tag{4}$$

Demnach ist

$$\mathfrak{M}(\delta^{-m}B^{(\nu)}) < \big(n!(2n+1)^{n+1}\big)^2(n+1)^{n+1}\mathfrak{M}B^{(\nu)}$$

wenn man (2) mit (1) und (4) kombiniert. Es ist daher

$$\mathfrak{M}\delta^{-m}B^{(\nu)} < K\mathfrak{M}B^{(\nu)} \tag{5}$$

und daraus folgt

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\mathfrak{M}(\delta^{-i}B^{(\nu)}) \leqslant K\mathfrak{M}B^{(\nu)} \tag{6}$$

d.h. die Bedingung von Dunford-Miller [1] ist für die $B^{(\nu)}$ erfüllt. Gemäß der anfänglich gemachten Bemerkung folgt aus (5), daß jede Nullmenge gegenüber δ invariant ist und zusammen mit (6) bedeutet dies (siehe [2], XII), es existiert ein gegenüber δ invariantes Maß μ, definiert durch

$$\mu(E) = \lim_{n}\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n-1}\mathfrak{M}(\delta^{-j}E).$$

Ebenso ist

$$\mu(E) \leqslant K_2\mathfrak{M}(E)$$

für eine Konstante K_2. Es ist noch die Abschätzung nach unten zu zeigen. Dazu denke man sich, daß $\delta^{-1}B^{(\nu)}$ nur aus dem speziellen Bereich $\hat{B}^{(1,\nu)}$ besteht, der durch $(s_1^{(1)}, \ldots, s_n^{(1)}) = (1, 2, \ldots, n)$ definiert ist. Alle weiteren Urbilder $\delta^{-j}B^{(\nu)}$ durchlaufen in den $s_i^{(j)}, \ldots, s_i^{(2)}$ alle zulässigen Wertsysteme.

Es ist dann

$$\Omega^{(m+1,\nu)} = A^{(m)}A^{(0)}NA^{(0)^{-1}}\Omega^{(\nu)} = A^{(m+1)}\Omega^{(\nu)}$$

mit

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & n \end{pmatrix}$$

und somit

$$a_{00}^{(m+1)} = a_{00}^{(m)}n + a_{0n}^{(m)}(n-1) \leqslant a_{00}^{(m)}(2n-1).$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{n!(2n+1)(n+1)^{n+1}(\omega_{0n}^{(\nu)}k_n^{(\nu)})^{n+1}(2n-1)^{n+1}}\sum\frac{1}{(a_{00}^{(m)})^{n+1}} < \mathfrak{M}(\delta^{-(m+1)}B^{(\nu)}). \tag{7}$$

Es ist dabei zu beachten, daß wegen $\delta^{-1}B^{(\nu)} = \hat{B}^{(1,\nu)}$ über das erste Wertsystem nicht mehr summiert wird, die Summe

$$\sum\frac{1}{(a_{00}^{(m)})^{n+1}}$$

hingegen von $B^{(\nu)}$ unabhängig geworden ist. Es ist wiederum wegen $\mathfrak{M}\delta^{-m}B^{(0)} = 1$ aus (3)

$$1 < \sum\frac{1}{(a_{00}^{(m)})^{n+1}}.$$

Zusammen mit (7) und (1) ergibt dies

$$\frac{1}{n!(2n+1)^{n+1}(n+1)^{n+1}(2n-1)^{n+1}}\mathfrak{M}B^{(\nu)} < \mathfrak{M}(\delta^{-(m+1)}B^{(\nu)})$$

d.h.

$$C\mathfrak{M}B^{(\nu)} < \mathfrak{M}(\delta^{-j}B^{(\nu)})$$

woraus ohne weiteres

$$K_1\mathfrak{M}(E) \leqslant \mu(E)$$

zu folgen ist.

Eine unmittelbare Folgerung ist nun, daß die Transformation δ nicht nur unzerlegbar bezüglich des Lebesgueschen Maßes ist, sondern auch bezüglich des Maßes μ. Ferner ist μ das einzige Maß, welches endlich, invariant in bezug auf δ und bezüglich des Lebesgueschen Maßes absolut stetig ist, d.h.

$$\mu(E) = \int_E f(x)\,dx.$$

Es gilt nun der individuelle Ergodensatz, d.h.

$$\frac{1}{n}[g(x)+g(\delta x)+\ldots+g(\delta^{n-1}x)] \to \int_{B^{(0)}} g\,d\mu$$

fast überall für jede Lebesgueintegrierbare Funktion $g(x)$. Dieser läßt nun eine Reihe Anwendungen zu, von denen die wichtigsten erwähnt werden sollen. Sei

$$(x_i) = [a_i^{(1)}(x), a_i^{(2)}(x), \ldots, a_i^{(k)}(x), \ldots]$$

die Jacobische Entwicklung für ein $x = (x_i) \in B^{(0)}$ und bedeute $\chi^{(x)}$ die charakteristische Funktion aller $x \in B^{(0)}$, wo $a_i^{(1)}(x) = s_i$, so ist die Häufigkeit der s_i in der Folge der $a_i^{(k)}(x)$ gegeben durch

$$\int_{B^{(0)}}\chi(x)\,d\mu.$$

In [6] konnte lediglich gezeigt werden, daß die Dichte positiv ist Setzt man $g_n(x) = \log a_n^{(1)}(x)$, so erhält man

$$\sqrt[m]{a_n^{(1)}a_n^{(2)}\ldots a_n^{(m)}} \to \gamma$$

fast überall, wo γ eine Konstante ist. Es ist nämlich $\lim\limits_{m} \sqrt[m]{a_n^{(1)} \dots a_n^{(m)}}$ fast überall endlich, wie schon aus Satz 7 in [5] hervorgeht. Der Vollständigkeit halber sei in diesem Zusammenhang erwähnt, daß schon aus Satz 5 in [5] und Satz 2 in [6] folgt

$$a_i^{(\nu)} > \nu \ln \nu$$

für endlich viele Werte ν fast überall und demnach

$$\frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^{N} a_i^{(\mu)} \to \infty$$

fast überall.

Die noch offene Frage ist, wie das invariante Maß μ aussieht, oder anders ausgedrückt, welche Funktion $f(x)$ die Eigenschaft

$$\mu(E) = \int_E f(x)\, dx$$

besitzt.

Literaturverzeichnis

[1] N. Dunford and D. S. Miller, *On the ergodic theorem*, Trans. Amer. Math. Soc. 60 (1946), S. 538-549.

[2] S. Hartman, E. Marczewski et Ryll-Nardzewski, *Théorèmes ergodiques et leurs applications*, Colloq. Math. 2 (1950), S. 109-123.

[3] O. Perron, *Grundlagen für eine Theorie des Jacobischen Kettenbruchalgorithmus*, Math. Ann. 64 (1907), S. 1-76.

[4] C. Ryll-Nardzewski, *On the ergodic theorems (II)*, Studia Math. 12 (1951), S. 74-79.

[5] F. Schweiger, *Geometrische und elementare metrische Sätze über den Jacobischen Algorithmus*, Sitzungsber. Öst. Akademie Wiss., Math.-naturw. Klasse, Abt. II, 173 (1964), S. 59-92.

[6] — *Metrische Sätze über den Jacobischen Algorithmus*, Monatsh. Math. 69 (1965), S. 243-255.

[7] — *Ergodische Theorie des Jacobischen Algorithmus*, Acta Arith. 11 (1966), S. 451-460.

Reçu par la Rédaction le 16. 3. 1966

ACTA ARITHMETICA
XII (1967)

On distribution of values of multiplicative functions in residue classes

by

W. Narkiewicz (Wrocław)

1. The following notion of uniform distribution of sequences of integers was introduced by I. Niven ([4]):

Let $N \geqslant 2$ be an integer. A sequence $a_1, a_2, \dots$ of integers is uniformly distributed $(\operatorname{mod} N)$ if and only if for every j, $N\big(n \leqslant x \mid a_n \equiv j (\operatorname{mod} N)\big) \sim x/N$ for x tending to infinity. (Here $N(n \leqslant x \mid \mathrm{P})$ denotes the number of positive integers $n \leqslant x$ with the property P.)

In this note we shall consider a similar, but weaker notion of uniform distribution:

Let $N \geqslant 3$ be an integer. A sequence $a_1, a_2, \dots$ of integers is *weakly uniformly distributed* $(\operatorname{mod} N)$ if and only if for every pair of integers j_1, j_2 with $(j_1, N) = (j_2, N) = 1$

$$N\big(n \leqslant x \mid a_n \equiv j_1 (\operatorname{mod} N)\big) \sim N\big(n \leqslant x \mid a_n \equiv j_2 (\operatorname{mod} N)\big)$$

for x tending to infinity, provided that the set $\{j \mid (a_j, N) = 1\}$ is infinite.

For shortness we shall write that such sequence is WUD $(\operatorname{mod} N)$.

It is easy to see that a necessary and sufficient condition for a sequence $a_1, a_2, \dots$ of integers to be WUD$(\operatorname{mod} N)$ is that for all characters $\chi(\operatorname{mod} N)$ which are not equal to χ_0 — the principal character, the following evaluation holds

$$\sum_{n \leqslant x} \chi(a_n) = o\Big(\sum_{n \leqslant x} \chi_0(a_n)\Big). \tag{1}$$

In fact, assuming (1) we get

$$\sum_{\substack{n \leqslant x \\ a_n \equiv j (\operatorname{mod} N)}} 1 = \varphi^{-1}(N) \sum_{\chi} \overline{\chi(j)} \sum_{n \leqslant x} \chi(a_n)$$

$$= \varphi^{-1}(N) \sum_{n \leqslant x} \chi_0(a_n) + \varphi^{-1}(N) \sum_{\chi \neq \chi_0} \overline{\chi(j)} \sum_{n \leqslant x} \chi(a_n) = \big(\varphi^{-1}(N) + o(1)\big) \sum_{n \leqslant x} \chi_0(a_n)$$