[10] — *On the characters of primes I*, Mat. Sb. N. S. 16 (58) (1945), pp. 101-120.

[11] K. Prachar, *Primzahlverteilung*, Berlin 1957.

[12] K. A. Rodosskiĭ (К. А. Родосский), *О наименьшем простом числе в арифметической прогрессии* (in Russian), Mat. Sb. N. S. 34 (76) (1954), pp. 331-356.

[13] P. Turán, *On a density theorem of Yu. V. Linnik*, Publications of the Mathematical Institute of Hungarian Academy of Science, VIA (1961), pp. 165-179.

*Reçu par la Rédaction le 4. 6. 1964*

---

ACTA ARITHMETICA
XI (1965)

# О нулях аналитических функций с заданной арифметикой коэффициентов и представлении чисел

А. О. Гельфонд (Москва)

**§ 1. Нули аналитических функций с целыми коэффициентами.** Если целочисленность аналитической функции на каком — либо [1] кольце сразу вызывает ограничения на ее рост в том или ином смысле, то целочисленность коэффициентов $a_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, функций

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad f_2(z) = \sum_{n=0} \frac{a_n}{n!} z^n$$

практически не накладывает никаких условий на арифметическую природу их нулей.

Докажем, в подтверждение этого, ряд теорем.

Теорема I. *Если* $a_1, a_2, \ldots; |a_k| < 1$, *последовательность действительных чисел и* $m \geqslant 1$ *целое, то можно найти последовательность целых чисел* $t_0, t_1, t_2, \ldots$, $t_0 \neq 0$, $|t_k| \leqslant m$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ *такую, что*

$$(1.1) \qquad f(a_k) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \ldots; \quad f(z) = \sum_{0}^{\infty} t_k z^k,$$

*при условии*

$$(1.2) \qquad 1+m > \prod_{1}^{n} |a_k|^{-1}, \quad n \geqslant 1.$$

*Это условие не меняется и в случае кратных корней,* $f^{(n)}(a_k) = 0$, $n = 0, \ldots, p-1$. *Тогда в нем надо брать* $|a_k|^p$ *вместо* $|a_k|$.

Замечание к теореме. Если предполагать числа $a_k$ комплексными, то условие (1.2) заменится условиями

$$(1.3) \qquad 1+m > \prod_{1}^{n} |a_k|^{-2}, \quad 1+m > \prod_{1}^{n} |a_k|^{-1}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

если, соответственно, $|t_k| \leqslant m$ целые или $|t'_k| < m$, $|t''_k| < m$, $t_k = t'_k + it''_k$, где $t'_k$ и $t''_k$ целые рациональные.

Доказательство. Пусть $\nu>1$ произвольно большое целое число. Рассмотрим $\nu$ линейных форм от целочисленных $x_k$

$$L_s=\sum_{k=0}^{N}x_k a_s^k,\quad 0\leqslant x_k\leqslant m,\qquad |a_s|\leqslant|a_{s+1}|,\quad s=1,\ldots,\nu$$

Тогда $|L_s|<\dfrac{m}{1-|a_s|}$. Полагая $\varrho_\nu=\prod\limits_1^\nu|a_k|^{-1}$, мы можем, в силу условия (1.3), выбрать целые $x_k$, $|x_k|\leqslant m$, отличные от нуля в совокупности, так, чтобы выполнялись неравенства

$$|L_s|<\left(\frac{\varrho_\nu}{m+1}\right)^{-N/2\nu}|a_s|^N,\qquad s=1,\ldots,\nu;\ N>N_0. \tag{1.4}$$

Действительно, векторы $(L_1,\ldots,L_\nu)$ в $\nu$-мерном пространстве попадают внутрь куба $T$ со стороной $2m/(1-|a_\nu|)$. Разделим каждую сторону куба $T$ на $N_s$ частей,

$$N_s=\left[\frac{2m}{1-|a_\nu|}\left(\frac{1+m}{\varrho_\nu}\right)^{\frac{N}{2\nu}}|a_s|^{-N}\right]+1.$$

Мы разобьем наш куб $T$ на $N_1\cdot N_2\ldots N_\nu$ параллелепипедов. Число векторов $(L_1,\ldots,L_\nu)$ равно, очевидно $(m+1)^{N+1}$. В силу неравенства (1.3), при $N>N_0$

$$\prod_{s=1}^{\nu}N_s<\frac{4^\nu m^\nu}{(1-(a_\nu|)^\nu}\left(\frac{1+m}{\varrho_\nu}\right)^{N/2}\varrho_\nu^N=\frac{(4m)^\nu}{(1-|a_\nu|)^\nu}\left(\frac{\varrho_\nu}{m+1}\right)^{N/2}(1+m)^N$$
$$<\frac{1}{2}(m+1)^N,\qquad N>N_0.$$

Значит, хотя бы в один параллелепипед попадают два вектора. Разности между координатами этих векторов удовлетворяют неравенствам

$$|x_k'-x_k''|\leqslant m;\qquad |L_s'-L_s''|<\frac{2m}{1-|a_\nu|}\cdot\frac{1}{N_s}<\left(\frac{\varrho_\nu}{m+1}\right)^{-N/2\nu}|a_s|^N,\qquad N\geqslant N_1,$$

причем $L_s'=\sum\limits_0^N x_k'a_s^k$, $L_s''=\sum\limits_0^N x_k''a_s^k$, $s=1,\ldots,\nu$.

Итак, мы построили многочлен

$$\overline{P}_N(t)=\sum_{n=0}^{N}x_nt^n,\qquad |x_k|\leqslant m,\qquad \sum_1^N|x_k|\neq0;\qquad |\overline{P}_N(a_k)|<\left(\frac{\varrho_\nu}{m+1}\right)^{\frac{N}{2\nu}}|a_k|^N,$$
$$1\leqslant k\leqslant N,$$



где все $x_k$ целые. Так как все $x_k$ не могут быть равны нулю, то существует такое $q<N$, что $x_0=\ldots=x_{q-1}=0$, $x_q\neq0$, $x_q\geqslant1$. Поэтому многочлен $P_{N-q}(t)=t^{-q}\overline{P}_N(t)$, удовлетворяет неравенствам

$$|P_{N-q}(a_s)|<\left(\frac{\varrho_N}{1+m}\right)^{\frac{N}{2\nu}},\qquad s=1,2,\ldots,\nu. \tag{1.5}$$

Так как коэффициенты полиномов $P_{N-q}(z)$ ограничены числом $m$, а свободный член целое число между единицей и $m$, то семейство этих многочленов нормально в любом круге $|z|\leqslant r<1$ и из него можно выбрать подпоследовательность полиномов, равномерно сходящуюся в единичном круге к функции $f_\nu(z)$,

$$f_\nu(z)=\sum_0^\infty a_nz^n,\qquad |a_n|\leqslant m,\qquad f_\nu(a_k)=0,\qquad 1\leqslant k\leqslant\nu, \tag{1.6}$$

в силу неравенств (1.3) и (1.5), причем $a_k$ — целые числа, $a_0\neq0$. Семейство функций $f_\nu(z)$ опять нормально в любом круге $|z|\leqslant r<1$ и из него можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся к функции $f(z)$

$$f(z)=\sum_0^\infty c_nz^n,\qquad |c_n|\leqslant m,\qquad c_0\neq0,\qquad f(a_k)=0,\qquad k=1,2,\ldots$$

где $c_n$ целые числа. Этим теорема доказана. Доказательства ее обобщений, о которых говорилось выше, ничем не отличаются от приведенного доказательства. Точность этой теоремы можно увидеть на примере одного нуля $a$. Если предположить, что $a<1/(m+1)$, то

$$\left|\sum_0^\infty c_ka^k\right|\geqslant1-m\sum_1^\infty a^k>0.$$

Значит условие (1.2) существенно ослабить нельзя.

Так как неизвестно, как применить подобный метод доказательства при неограниченном росте $\varrho_\nu$, то мы приведем здесь другую, менее точную, но зато общую теорему:

Теорема II. *Пусть функции $f(z)$ и $F(z)$ будут регулярны в единичном круге и имеют действительные коэффициенты*

$$f(z)=\sum_0^\infty a_nz^n,\qquad a_0=1,\qquad F(z)=\sum_0^\infty c_nz^n. \tag{1.7}$$

*Тогда при*

$$\delta_0=c_0,\qquad \delta_n=\left\{c_n-\sum_{k=0}^{n-1}\delta_ka_{n-k}\right\},\qquad n=1,2,\ldots, \tag{1.8}$$

*где $\{x\}$ есть дробная доля $x$, $1 > \{x\} \geqslant 0$, будет иметь место соотношение*

$$(1.9)\qquad \begin{gathered} f(z)\sum_{0}^{\infty}\delta_n z^n = F(z) - \sum_{1}^{\infty} p_n z^n, \\ |p_n| < |c_n| + |c_0 a_n| + \sum_{1}^{n-1}|a_k|, \qquad n = 1, \ldots, \end{gathered}$$

*где все $p_n$ целые рациональные числа.*

Для доказательства этой теоремы достаточно перемножить ряды в левой части (1.9). Мы получаем тогда соотношения

$$\delta_0 = c_0, \qquad \delta_n + p_n = c_n - \sum_{0}^{n-1}\delta_k a_{n-k}, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

Если выбирать $\delta$ последовательно, начиная с $\delta_1$, так как указано в соотношениях (1.8), то мы и будем иметь, что $p_n$ целые числа, а неравенства (1.9) очевидны. Из-за неточности неравенств (1.9) эта теорема менее точна, чем теорема I.

Теорема II остается в силе и для любого числа переменных. Действительно, если $f(z_1, \ldots, z_\nu)$ и $F(z_1, \ldots, z_\nu)$ функции $\nu$ комплексных переменных, то имеют место соотношения

$$(1.10)\qquad f(z_1, \ldots, z_\nu)\sum_{n_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{n_\nu=0}^{\infty}\delta_{n_1}, \ldots, n_\nu z_1^{n_1}\ldots z_\nu^{n_\nu} =$$

$$= F(z_1, \ldots, z_\nu) - \sum_{n_1=0}^{\infty}\ldots\sum_{n_\nu=0}^{\infty} p_{n_1,\ldots,n_\nu} z_1^{n_1}\ldots z_\nu^{n_\nu}, \ p_{0,\ldots,0} = 0,$$

$$\delta_{0,\ldots,0} = c_{0,\ldots,0}; \qquad \delta_{n_1,\ldots,n_\nu} = \Big\{c_{n_1,\ldots,n_\nu} - \sum_{\sum_1^\nu (n_s - k_s) > 0} \delta_{k_1,\ldots,k_\nu} a_{n_1-k_1,\ldots,n_\nu-k_\nu}\Big\},$$

где все $p_{n_1,\ldots,n_\nu}$ целые числа и

$$f(z_1, \ldots, z_\nu) = \sum a_{n_1,\ldots,n_\nu} z_1^{n_1}\ldots z_\nu^{n_\nu}; \qquad F(z_1, \ldots, z_\nu) = \sum c_{n_1,\ldots,n_\nu} z_1^{n_1}\ldots z_\nu^{n_\nu}.$$

Приведем еще одну теорему типа теорем I и II.

Теорема III. *Пусть бесконечная последовательность $s_1, s_2, \ldots, s_n, \ldots$, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$ будет последовательностью целых чисел, $m_n = \prod\limits_{1}^{n} s_k$, $f_1(z)$ и $F(z)$ целые функции с действительными коэффициентами*

$$(1.11)\qquad f_1(z) = 1 - \sum_{1}^{\infty}\frac{a_n}{m_n}z^n, \qquad F(z) = c_0 + \sum_{1}^{\infty}\frac{c_n}{m_n}z_n, \qquad m_0 = 1.$$



*Тогда*

$$(1.12)\qquad \begin{gathered} f(z)\sum_{0}^{\infty}\frac{\delta_n}{m_n}z^n = F(z) - \sum_{1}^{\infty}\frac{p_n}{m_n}, \qquad \delta_0 = c_0, \\ \delta_n = \Big\{c_n + \sum_{k=0}^{n-1}\delta_k a_{n-k}\frac{m_n}{m_k m_{n-k}}\Big\}; \qquad |p_n| < |c_n| + |c_0 a_0| + \sum_{1}^{n-1}\frac{m_n|a_k|}{m_k m_{n-k}}, \end{gathered}$$

*где все $p_n$ целые числа.*

Доказательство этой теоремы очевидно и следует из перемножения рядов.

Теорема II и ее обобщение, при $a_n$ и $c_n$ комплексных, будут иметь место, если, например, брать $\delta_n = \delta_n' + i\delta_n''$ тоже комплексными, а $\delta_n'$ и $\delta_n''$ дробными долями соответствующих линейных форм от $a_n$ и $c_n$.

Из теоремы II следует, что при любых нулях в единичном круге функция с целыми коэффициентами будет мало отличаться, в смысле роста, от минимальной функции с теми же нулями.

**§ 2. О распределении знаков обобщенных $q$-ичных разложений.** Положим в теореме II

$$f(z) = 1 - \theta z, \qquad \theta > 1, \qquad F(z) = \alpha, \qquad 0 < \alpha < 1.$$

Тогда нетрудно видеть, что при $z = 1/\theta$

$$(2.1)\qquad \alpha = \sum_{1}^{\infty} p_n\theta^{-n}, \qquad p_n = [\theta\delta_{n-1}],$$

другими словами мы получаем разложение числа $\theta$ по степеням $\theta^{-1}$, причем

$$(2.2)\qquad \delta_n = \{\theta\delta_{n-1}\}, \qquad \delta_0 = \alpha', \qquad \delta_n = \{q^n\alpha\}, \qquad \theta = q$$

если $\theta$ есть целое число $q$. Хорошо известно, что числа $\delta_n = \{q^n\alpha\}$ равномерно распределены, при $q$ целом и, при нецелом $\theta$, существует закон распределения чисел $\delta_n = \delta_n(\alpha)$ почти для всех $\alpha$ (см. [3]). Следствием этого является одинаковая частота встреч чисел $0, 1, \ldots \ldots, q-1$ среди чисел $p_n$ при $\theta$ целом и определенный закон распределения знаков $0, 1, \ldots, [\theta]$ среди чисел $p_n$ в общем случае.

Соотношения (1.8) и (1.9) в теореме II-й могут быть рассматриваемы при некоторых $f(z)$ и $F(z)$, как дальнейшее обобщение аппарата $q$-ичных представлений одного или нескольких чисел.

В качестве первого простейшего примера таких обобщенных $q$-ичных разложений рассмотрим следующий пример.

Пусть числа $q_1, \ldots, q_\nu$ будут различными целыми, большими единицы числами. Положим

$$f(z) = 1 - \sum_{k=1}^{\nu} a_k z^k = \prod_{k=1}^{\nu} (1 - q_k z); \qquad F(z) = a, \qquad 0 < a < 1.$$

Тогда, при $z = 1/q_k$, мы будем иметь, что

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{q_k^n}, \quad 1 \leqslant k \leqslant \nu; \qquad \delta_n = \Big\{\sum_{k=1}^{n} a_k \delta_{n-k}\Big\}, \quad n \geqslant 1, \tag{2.3}$$
$$a = \delta_0, \qquad p_n = \Big[\sum_{k=1}^{\nu} a_k \delta_{n-k}\Big].$$

Если допустить, что точки $(\delta_n, \delta_{n+1}, \ldots, \delta_{n+\nu-1})$ равномерно распределены в $\nu$-мерном единичном кубе (а это мы докажем ниже почти для всех $a$), и принять во внимание, что $a_{2k-1} > 0$ и $a_{2k} < 0$, то мы будем иметь, что

$$-\sum_{2k \leqslant \nu} a_{2k} \leqslant p_n \leqslant \sum_{2k-1 \leqslant \nu} a_{2k-1} - 1. \tag{2.4}$$

При этом же предположении равномерной распределенности точек $(\delta_n, \delta_{n+1}, \ldots, \delta_{n+\nu-1})$ мы непосредственно будем также иметь, что

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \sum_{\substack{p_n = p \\ n \leqslant N}} 1 = \underset{p \leqslant \sum_{k=1}^{\nu} a_k x_k < p+1}{\int_0^1 \cdots \int_0^1} dx_1 \ldots dx_\nu, \tag{2.5}$$

при $p$ любом в границах (2.4).

При любых целых $a_1, \ldots, a_\nu$ можно легко получить явное выражение для $\delta_n = \delta_n(a)$. Действительно, в этом случае $\delta_n(a) = \{t_n\}$, где $t_n$ есть решение разностного уравнения

$$t_n = \sum_{k=1}^{\nu} a_k t_{n-k}; \qquad t_0 = a, \qquad t_{-1} = \ldots = t_{-\nu+1} = 0. \tag{2.6}$$

В нашем случае, в частности, характеристическое уравнение этого разностного уравнения имеет вид

$$x^n - \sum_{k=1}^{n} a_k x^{n-k} = \prod_{k=1}^{\nu} (x - q_k) = 0. \tag{2.7}$$

Решение $t_n$ нашего разностного уравнения может быть записано в виде $s_n a = t_n$, где $s_n$ решение этого же уравнения с начальными



условиями $s_0 = 1$, $s_{-n} = 0$, $1 \leqslant n \leqslant \nu - 1$. Поэтому $s_n$ целые числа. В дальнейшем нам понадобится линейная независимость функций $s_n, s_{n+1}, \ldots, s_{n+\nu-1}$, которая будет следовать из леммы.

Лемма I. *Если $s_n$ решение разностного уравнения* (2.6), *где $a_n$ любые, $a_\nu \neq 0$, при начальных условиях $s_{\nu_0-1}, s_{\nu_0-2}, \ldots, s_0, \ldots, s_{-\nu+\nu_0}$, то необходимым и достаточным условием, что $s_n$ не удовлетворяет никакому разностному уравнению порядка меньше $\nu$, линейному с постоянными коэффициентами, является отсутствие общих нулей у многочленов*

$$P(x) = x^\nu - \sum_{k=1}^{\nu} a_k x^{\nu-k}; \qquad P_1(x) = \sum_{k=0}^{\nu-1} \Big(\sum_{n=k+1}^{\nu} a_{n-k-1} s_{\nu_0-n}\Big) x^k. \tag{2.8}$$

Доказательство. Действительно, если $s_n$ решение уравнения (2.6) порядка $\nu$, то

$$s_x = \sum_{k=1}^{r} \Big(\sum_{m=1}^{p_k} c_{m,k} x^{m-1}\Big) t_k^x, \qquad \sum_{k=1}^{r} p_k = \nu, \tag{2.9}$$

где $t_k$ корни с кратностями $p_k$ уравнения $P(x) = 0$. Если бы $s_x$ было бы решением линейного разностного уравнения с постоянными коэффициентами порядка $\nu_1 < \nu$, то с помощью корней нового характеристического уравнения мы имели бы представление типа (2.9), где $\sum_{k=1}^{r_1} p_k^1 = \nu_1 < \nu$. Значит в представлении (2.9) хотя бы одно $c_{p_k,k} = 0$. Фиксируя это $k$ и полагая

$$\frac{P(x)}{x - t_k} = \sum_{n=0}^{\nu-1} a_{k,\nu-n} x^n; \qquad a_{k,\nu-n} = \sum_{m=1}^{\nu-n-1} a_{\nu-m-n} t_k^{m-1}, \tag{2.10}$$

мы видим, что $s_x$ удовлетворяет разностному уравнению

$$\sum_{n=0}^{\nu-1} a_{k,\nu-n} s_{x+n} = 0; \qquad a_{k,1} = 1, \qquad a_{k,\nu} = -a_\nu t_k^{-1} \neq 0. \tag{2.11}$$

Полагая $x = \nu_0 - \nu$, мы видим, что начальные условия связаны соотношением

$$\sum_{n=0}^{\nu-1} a_{k,\nu-n} s_{\nu_0-\nu+n} = \sum_{m=0}^{\nu-1} t_k^m \sum_{n=m+1}^{\nu} a_{n-m-1} s_{\nu_0-n},$$

что и доказывает нашу лемму.

В случае, когда $\nu_0 = 1$, $s_0 = 1$, $s_{-k} = 0$, $1 \leqslant k \leqslant \nu - 1$, мы видим, что $P_1(x) = 1$. Значит условия леммы выполнены.

Лемма II. *Если числа $s_{1,r}, s_{2,r}, \ldots, s_{n,r}$ удовлетворяют неравенствам*

$$\int_0^1\cdots\int_0^1 \left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \exp\left\{2\pi i\sum_{k=1}^{\nu} m_k \sum_{r=1}^{p} s_{k+n,r}\alpha_r\right\}\right|^2 d\alpha_1\ldots d\alpha_p < \ln^{-1-\varepsilon}N.$$

(2.12)

$$\sum_{k=1}^{\nu} m_k^2 \neq 0, \quad \varepsilon>0, \quad N > N_0(\varepsilon, m_1\ldots, m_\nu),$$

*при любых целых $m_1,\ldots,m_\nu$, то точки*

(2.13) $$\left(\left\{\sum_{r=1}^{p} s_{n,r}\alpha_r\right\},\ldots,\left\{\sum_{r=1}^{p} s_{n+\nu-1,r}\alpha_r\right\}\right)$$

*равномерно распределены в $\nu$-мерном единичном кубе почти для всех точек $p$-мерного единичного куба $(\alpha_1,\ldots,\alpha_p)$.*

Лемма эта хорошо известна [4]. Ее доказательство основано на том, что при фиксированной точке $(\alpha_1,\ldots,\alpha_p)$ неравенства

$$Q_N(m_1,\ldots,m_\nu) = \frac{1}{N}\left|\sum_{n=1}^{N}\exp\left\{2\pi i\sum_{k=1}^{\nu} m_k\sum_{r=1}^{p} s_{k+n,r}\alpha_r\right\}\right| < \varepsilon_N,$$

(2.14)

$$\lim_{N\to\infty}\varepsilon_N = 0, \quad \sum_{k=1}^{\nu} m_k^2 \neq 0, \quad 1\leqslant m_k<\infty, \quad 1\leqslant k\leqslant\nu_0$$

служат необходимым и достаточным признаком равномерного распределения точек (2.13) в $\nu$-мерном единичном кубе (критерий Вейля). Остальная часть доказательства может быть получена приемом Чебышева. Именно, если $E_n$ измеримое множество в $p$-мерном единичном кубе, на котором $Q_N > \ln^{-\varepsilon/4}N$, то мера этого множества удовлетворяет, в силу (2.12), неравенству

$$\operatorname{mes} Q_N \ln^{-\varepsilon/2}N < \ln^{-1-\varepsilon}N, \quad \operatorname{mes} Q_N < \ln^{-1-\varepsilon/2}N.$$

Беря $N=[e^{q/t}]$, $t\geqslant 1$ целое, $q=1,2,\ldots,t$ фиксировано, и находя сумму $\operatorname{mes} Q_N$ для $q, q+1,\ldots$, мы будем иметь, что

$$\sum Q_N < \sum_{k=k_0}^{\infty}\ln^{-1-\varepsilon/2}[e^{q/t}] < 2\sum_{k=k_0}^{\infty}\frac{t^{1+\varepsilon}}{(q+k)^{1+\varepsilon/2}} < \frac{5}{\varepsilon}\cdot\frac{t^{1+\varepsilon}}{q^{\varepsilon/2}},$$

откуда следует, что

(2.15) $$\lim Q_N = 0, \quad N=[e^{q/t}],$$

при фиксированном $t$, для всех $(\alpha_1,\ldots,\alpha_p)$ за исключением множества меры нуль. Но сумма счетного множества множеств меры нуль имеет нулевую меру, поэтому предел (2.15) имеет место на множестве полной меры при любом $t$. Но числа $[e^{q/t}]$ приближают любое $N$ с точностью до $N/t$. Значит, в силу формы $Q_N$ предел (2.15) имеет место по всем $N$ при данном наборе $m_1,\ldots,m_n$ на множестве полной меры. Но опять сумма счетного множества множеств меры нуль есть множество меры нуль, поэтому на множестве полной меры предел (2.15) имеет место при любых $m_1,\ldots,m_\nu$, $\sum_1^\nu m_k^2\neq 0$. Этим наша лемма доказана. Условие (2.12) может быть заменено условием сходимости $\sum\varphi(e^q)$, если справа в (2.12) стоит $\varphi(N)$.



Лемма III. *Если $s_1, s_2, \ldots$ целые числа и $A(p,N)$ есть число решений уравнения*

(2.16) $$\sum_{k=1}^{\nu} m_k s_{n+k} = p, \quad n\leqslant N,$$

*при целых, отличных от нуля в совокупности $m_1,\ldots,m_\nu$ и $p$ целом, то*

(2.17)

$$\int_0^1\left|\frac{1}{N}\sum_{1}^{N}\exp\left\{2\pi i\sum_{k=1}^{\nu} m_k s_{n+k}\alpha\right\}\right|^2 d\alpha = \frac{1}{N^2}\sum_{k=1}^{N}A^2(p_k,N), \quad \sum_{k=1}^{N}A(p_k)=N.$$

Доказательство. Очевидно.

Теорема IV. *Если $s_n$ решение разностного уравнения* (2.6) *с начальными условиями $s_0=1$, $s_{-k}=0$, $1\leqslant k\leqslant\nu-1$, то почти для всех $\alpha$, $0<\alpha<1$, точки $(\{s_n\alpha\},\ldots,\{s_{n+\nu-1}\alpha\})$ равномерно распределены в $\nu$-мерном единичном кубе. Значит верны в этом случае соотношения* (2.5).

Доказательство. Мы уже знаем, что такие $s_n$ не удовлетворяют никакому разностному уравнению порядка ниже $\nu$. Значит при любых $m_1,\ldots,m_\nu$ функция $\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\nu} m_k s_{x+k}$ есть не тождественно равное нулю решение уравнения (2.6) и имеет вид

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\nu} c_k q_k^x,$$

где $c_k$ отличны от нуля в совокупности. Поэтому уравнение $\varphi(x)=p$ имеет не более $\nu$ решений в действительных числах $x$. Из леммы III следует поэтому неравенство

$$\frac{1}{N^2}\int_0^1\left|\sum_{1}^{N}\exp\left\{2\pi i\sum_{k=1}^{\nu} m_k s_{x+k}\alpha\right\}\right|^2 d\alpha \leqslant \frac{\nu}{N},$$

которое, в силу леммы II, доказывает нашу теорему.

Положим теперь в теореме II

$$f(z)=1-\sum_{n=1}^{\nu}a_nz^n=\prod_{k=1}^{\nu}(1-q_kz),\qquad F(z)=f(z)\sum_{s=1}^{\nu}\frac{a_sq_s^{\nu-1}}{(1-q_sz)\prod\limits_{k=1}^{\nu}{}'(q_s-q_k)},$$

(2.18)

$$q_\nu>q_{\nu-1}>\ldots>q_1>1,\qquad 0\leqslant\alpha_s<1,$$

и $q_s$-целые. Тогда имеет место

Теорема V. *Точки* $(\delta_n,\delta_{n+1},\ldots,\delta_{n+\nu-1})$, $\delta_n=\delta_n(\alpha_1,\ldots,\alpha_\nu)$, *определяемые соотношениями*

$$\delta_n=\{\delta_{n-1}a_1+\ldots+\delta_{n-\nu}a_\nu\},\quad n\geqslant\nu;\quad \delta_n=\{c_n+a_1\delta_{n-1}+\ldots+a_n\delta_0\},\quad n<\nu,$$

$$(2.19)\qquad s_0=c_0;\quad F(z)=\sum_{n=0}^{\nu-1}\left(\sum_{s=1}^{\nu}\frac{\alpha_sa_{s,n}}{\prod\limits_{1}^{\nu}{}'(q_s-q_k)}\right)z^n=\sum_{0}^{\nu-1}c_nz^n,$$

$$\sum_{n=0}^{\nu}a_{s,n}z^n=\frac{f(z)}{1-q_sz}q_s^{\nu-1},$$

*равномерно распределены в $\nu$-мерном единичном кубе почти для всех точек $\nu$-мерного единичного куба $(\alpha_1,\ldots,\alpha_\nu)$. Если при этом*

$$(2.20)\qquad p_n=[\delta_{n-1}a_1+\ldots+\delta_{n-\nu}a_\nu],\quad n\geqslant\nu;\qquad \alpha_s=\sum_{1}^{\infty}\frac{p_k}{q_s^k},\quad 1\leqslant s\leqslant\nu,$$

*то частота повторения равенства $p_n=p$ определяется почти для всех $(\alpha_1,\ldots,\alpha_\nu)$ по формуле* (2.5). *Заметим, что в этом случае мы имеем представления чисел $\alpha_1,\ldots,\alpha_\nu$*

$$(2.21)\qquad \alpha_s=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p_k}{q_s^k},\qquad 1\leqslant s\leqslant\nu.$$

Доказательство. Из формул (2.18) прежде всего следует, что $a_{s,n}$ целые рациональные. Положим $\alpha_s=\beta_s\prod\limits_{1}^{\nu}|q_s-q_k|$. Определим числа $t_0,t_1,t_2,\ldots$ из соотношения

$$\prod_{1}^{\nu}(1-q_kz)\sum_{0}^{\infty}t_nz^n=\prod_{1}^{\nu}(1-q_kz)\sum_{s=1}^{\nu}\frac{\beta_s(-1)^{\nu-s}}{1-q_sz}.$$

Мы непосредственно будем иметь, что

$$t_n=\sum_{1}^{\nu}(-1)^{\nu-s}q_s^{n+\nu-1}\beta_s,\qquad \delta_n=\{t_n\},\qquad \beta_s=\frac{\alpha_s}{\prod\limits_{k=1}^{\nu}{}'(q_s-q_k)}.$$



Так как все числа $\prod\limits_{k=1}^{\nu}{}'(q_s-q_k)$ целые, то достаточно доказать, что равномерно распределены в единичном кубе точки $(\delta_n,\ldots,\delta_{n+\nu-1})$ для почти всех точек единичного куба $(\beta_1,\ldots,\beta_\nu)$.

Рассмотрим теперь неравенство (2.12) леммы II. В нашем случае

$$s_{k,n}=(-1)^{\nu-k}q_k^{n+\nu-1},\qquad 1\leqslant n\leqslant\nu$$

и, поэтому

$$\int_0^1\!\!\ldots\!\int_0^1\left|\frac{1}{N}\sum_{1}^{N}\exp\left\{2\pi i\sum_{s=1}^{\nu}\beta_s\sum_{k=1}^{\nu}m_kq_s^{n+k+\nu-1}\right\}\right|^2d\alpha_1\ldots d\alpha_\nu=\frac{1}{N}$$

так как система уравнений

$$\sum_{k=1}^{\nu}m_kq_s^{\nu-1+n+k}=r_s,\qquad 1\leqslant s\leqslant\nu,$$

имеет только одно решение в переменных $m_1,\ldots,m_\nu$. Из леммы II уже следует теорема V.

Теорема V имеет место и в более широких предположениях относительно чисел $q_1,\ldots,q_\nu$.

Теорема V′. *Если в теореме V считать $q_k$, $|q_k|>1$, различными, действительными и корнями уравнения*

$$x^\nu=\sum_{k=1}^{\nu}a_kx^{\nu-k},$$

*где все $a_1,\ldots,a_\nu$ целые, то теорема V и представления* (2.21) *сохраняются.*

Определяя попрежнему числа $t_n$ из (2.19), но не производя замены $\alpha_s$ на $\beta_s$, мы получим, что

$$t_n=\sum_{s=1}^{\nu}\alpha_s\frac{q_s^{\nu-1}}{\prod\limits_{k=1}^{\nu}{}'(q_s-q_k)}q_s^n=\sum_{s=1}^{\nu}\alpha_s\lambda_sq_s^n.$$

Пусть $m_1,\ldots,m_\nu$ отличны от нуля в совокупности. Тогда отличны от нуля, в совокупности, и числа $\sum\limits_{k=1}^{\nu}m_kq_s^{k-1}=r_s$, $1\leqslant s\leqslant\nu$, так как $q_s$ различны между собой. Отсюда следует, что или $r_k=0$, или $r_k\geqslant r$, где $r\neq0$ для всех $r_k\neq0$. Кроме этого существует такое $\lambda>0$, что $|\lambda_s|\geqslant\lambda$, $1\leqslant s\leqslant\nu$. Из этих соображений следует, при $n>k$ целых, что

$$\left|\lambda_sq_s^n(1-q_s^{k-m})\sum_{l=1}^{\nu}m_lq_s^{l-1}\right|>\lambda r\left(1-\frac{1}{q}\right)q^n,\qquad q>1,$$

хотя бы для одного $s, 1 \leqslant s \leqslant \nu$. Поэтому мы имеем неравенство

$$\left|\int_0^1\dots\int_0^1 \exp\left\{2\pi i\sum_{s=1}^{\nu}\alpha_s\lambda_s(q_s^n-q_s^k)\sum_{l=1}^{\nu}m_l q_s^{l-1}\right\}d\alpha_1\dots d\alpha_\nu\right| < \frac{2q}{\lambda^2(q-1)}\,q^{-n}, \qquad n>k.$$

Из этого неравенства уже непосредственно следует, что

$$\int_0^1\dots\int_0^1\left|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\exp\left\{2\pi i\sum_{s=1}^{\nu}\lambda_s\alpha_s q_s^n\sum_{l=1}^{\nu}m_l q_s^{l-1}\right\}\right|^2 d\alpha_1\dots d\alpha_\nu$$

$$=\frac{1}{N^2}\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\int_0^1\dots\int_0^1\exp\left\{2\pi i\sum_{s=1}^{\nu}\lambda_s\alpha_s(q_s^n-q_s^k)\sum_{l=1}^{\nu}m_l q_s^{l-1}\right\}d\alpha_1\dots d\alpha_\nu$$

$$<\frac{1}{N^2}\left(N+2\sum_{k=1}^{N-1}\frac{2q}{\lambda r(q-1)}kq^{-k}\right)<\frac{2}{N}, \qquad N>N_0.$$

Значит опять условия леммы II выполняются и, тем самым наша теорема V′ доказана. Любопытно отметить, что для разложения (2.1) при нецелом $\theta>1$ закон распределения $\delta_n$ (2.2), существует, но отличен от равномерного распределения даже для алгебраических $\theta$. Можно показать, что при произвольных действительных $q_1, \dots, q_\nu$, $|q_k|>1$, $q_i \neq qk$, закон распределения $\delta_n=\delta_n(\alpha_1,\dots,\alpha_\nu)$ будет существовать.

Из теорем II и III можно получать и многие другие разложения чисел и систем чисел в ряды, являющиеся обобщениями $q$-ичных разложений и доказывать существование законов распределения чисел $p_n$ в этих разложениях. В качестве примера рассмотрим разложение одного числа $\alpha$, получающееся из теоремы III при $f(z)=1-z$, $F(z)=\alpha$. Мы будем иметь хорошо известное разложение

$$\alpha=\sum_1^{\infty}\frac{p_n}{m_n}; \qquad \delta_n=\{m_n\alpha\}, \qquad p_n=[s_n\delta_{n-1}],$$

(2.22)

$$m_n=\prod_1^n s_k, \qquad \lim_{n\to\infty}s_n=\infty.$$

Разложим функцию

$$\begin{aligned}
&U_q(a,b;x)=0, && 0\leqslant x\leqslant a, \quad b\leqslant x\leqslant 1;\\
&U_q(a,b;x)=1, && a+1/q\leqslant x\leqslant b-1/q;\\
&U_q(a,b;x)=(x-a)q, && a\leqslant x\leqslant a+1/q;\\
&U_q(a,b;x)=(b-x)q, && b-1/q\leqslant x\leqslant b;
\end{aligned} \tag{2.23}$$

$$\int_0^1 U_q(x)\,dx=b-a-1/q,$$



в ряд Фурье. Мы будем иметь, что

$$U_q(a,b;x)=b-a-\frac{1}{q}+2\operatorname{Re}T(x),$$

(2.24)

$$T(x)=i\sum_{k=1}^{\infty}\frac{q\sin(\pi k/q)}{2\pi^2k^2}\,[e^{-2\pi ibk}-e^{-2\pi iak}]\,e^{2\pi ikx}$$

Мы видим также, что

$$U_q(a,b;x)\leqslant U_0(a,b;x)\leqslant U_q\left(a-\frac{1}{q},\,b+\frac{1}{q};\,x\right), \tag{2.25}$$

где $U_0(a,b;x)$ есть функция, равная единице на $[a,b]$ и нулю вне него. Числа $p_n$, $n\leqslant N$, могут принимать значения $p$, $0\leqslant p\leqslant s_N-1$. Из (2.22) следует, что $p_n=p$, если

$$\frac{p}{s_n}\leqslant\delta_{n-1}\leqslant\frac{p+r}{s_n}; \qquad n_0(p)<n\leqslant N, \tag{2.26}$$

где $n_0(p)$ есть наименьшее $n$, при котором $s_n\geqslant p$. Полагая в (2.24)

$$a=\left\{\frac{p}{s_n}\right\}, \qquad b=\left\{\frac{t_n}{s_n}\right\}, \qquad t_n=\min(p+r,\,s_n), \qquad q=N,$$

и суммируя по $n$, мы будем иметь, что

$$\sum_{N\geqslant n>n_0(p)}U_q\left(\left\{\frac{p}{s_n}\right\},\left\{\frac{t_n}{s_n}\right\};\delta_{n-1}\right)=\sum_{N\geqslant n>n_0(p)}\frac{t_n-p}{s_n}-\frac{1}{q}+2\operatorname{Re}\sum_{N\geqslant n>n_0(p)}T_n(\delta_{n-1}),$$

(2.27)

$$\sum_{N\geqslant n>n_0(p)}T_n(\delta_{n-1})=i\sum_{k=1}^{\infty}\frac{q\sin(\pi k/q)}{2\pi^2k^2}\sum_{N\geqslant n>n_0(p)}[e^{-2\pi i\frac{t_nk}{s_n}}-e^{-2\pi i\frac{pk}{s_n}}]\,e^{2\pi ikm_{n-1}\alpha},$$

где Re знак действительной части. Найдем теперь оценку остаточного члена в (2.27), верную почти для всех $\alpha$. Нетрудно видеть, что

$$|a_{n,k}|\leqslant 1, \qquad a_{n,k}=\frac{1}{2}\left(e^{-2\pi i\frac{t_nk}{s_n}}-e^{-2\pi i\frac{pk}{s_n}}\right). \tag{2.28}$$

Если $n_0=n_0(p)$, то при $n_0\leqslant\sqrt{N}$, $\nu>1$,

$$A_{k,\nu,N}=\int_0^1\left|\sum_{n_0+1}^{N}a_{n,k}e^{2\pi ikm_n\alpha}\right|^{2\nu}d\alpha \tag{2.29}$$

$$<2^{2\nu}N^{\nu}+2^{2\nu}\int_0^1\left|\sum_{n=[\sqrt{N}]+1}^{N}a_{n,k}e^{2\pi ikm_n\alpha}\right|^{2\nu}d\alpha$$

$$<2^{2\nu}N^{\nu}+2^{2\nu}\sum_{\sum_{s=1}^{N}k_s=\nu}\left(\frac{\nu!}{k_1!\dots k_N!}\right)^2<\nu!^3N^{\nu}, \qquad N\geqslant 10,$$

так как, при целых $b_k \geqslant 0$, $\sum\limits_{k=1}^{\nu} b_k = \nu$ и $s_k > \nu+1$ (что при $k \geqslant [N^{1/2}+1]$ и $N \geqslant N_0(\nu)$ будет иметь место), уравнение

$$\sum_{1}^{t_1} b_k m_{n_k} = \sum_{1}^{t_2} b'_k m_{q_k}, \qquad m_n < m_{n+1},$$

имеет решение только при

$$b_k = b'_k, \quad m_{n_k} = m_{q_k}, \quad t_1 = t_2, \quad k = 1, 2, \ldots, t_1.$$

Это, последнее утверждение имеет место, так как при $n_1 > q_{\mu-1}$ и $n_1 < q_\mu$

$$\sum_{1}^{t_1} b_k \frac{m_{n_k}}{m_{n_1}} = \sum_{k=1}^{\mu-1} \frac{b'_k}{m_{n_1}} m_{q_k} + R_0,$$

что невозможно, так как слева целое число, а справа целое число $R_0$ и правильная дробь в силу неравенства $s_{n_1} > \nu+1$. Если же $n_0 \geqslant \sqrt{N}$, то по тем же соображениям

$$A_{k,\nu,N} < \nu!^3 N^\nu. \tag{2.30}$$

Оценки (2.29) и (2.30) используют также неравенство

$$\sum_{\sum\limits_{s=1}^{N} k_s = \nu} \left(\frac{\nu!}{k_1!\ldots k_N!}\right)^2 \leqslant \nu!^2 N^\nu \int_0^1 \left(1 + \sum_{1}^{\infty} \frac{e^{4\pi i k a}}{N^k (k!)^2}\right)^N e^{-4\pi i \nu a} da$$

$$= \nu!^2 N^\nu \int_0^1 \exp\left\{N \ln\left(1 + \frac{1}{N}\sum_{1}^{\infty} \frac{e^{4\pi i k a}}{N^{k-1}(k!)^2}\right)\right\} \exp\{-4\pi i \nu a\} da < \nu!^2 N^\nu.$$

В дальнейшем, для упрощения вычислений, мы будем считать, что

$$\nu = \min\left(\left[\frac{1}{2} s_{N_1}\right], \left[\frac{\ln N}{\ln^{1+\varepsilon} \ln N}\right]\right), \quad \varepsilon > 0, \quad N_1 = [\sqrt{N}], \tag{2.31}$$

где $\varepsilon > 0$ произвольная постоянная. В этих предположениях мы можем объединить оценки (2.29) и (2.30) и получим, что

$$\int_0^1 \left| N^{-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1+\varepsilon}{\nu}\right)} \sum_{n=n_0(p)}^{N} a_{n,k} e^{2\pi i k m_{n-1} a}\right|^{2N} da < e^{3\frac{\ln N}{\ln^\varepsilon \ln N}} N^{-1-\varepsilon}, \tag{2.32}$$

где $\varepsilon$ не зависит от $N$ и $k$.



Возвращаясь к (2.27), мы имеем, что

$$\left|2\mathrm{Re} \sum_{n_0(p)}^{N} T_n(\delta_{n-1})\right|$$

$$< 2\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \left|\sum_{n=n_0}^{N} a_{n,k} e^{2\pi i k m_{n-1} a}\right| + N \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left|\sum_{n=n_0(p)}^{N} a_{n,k} e^{2\pi i k m_{n-1} a}\right|$$

$$= 2\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} B_{N,k} + N \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^2} B_{N,k};$$

$$B_{N,k} = \left|\sum_{n=n_0(p)}^{N} a_{n,k} e^{2\pi i k m_{n-1} a}\right|.$$

Пусть $\varrho = \ln\ln N/\ln N$. Воспользовавшись неравенством Гельдера при $k = 2\nu$, $k' = 2\nu/(2\nu-1)$ и интегрируя, мы получаем, что

$$\int_0^1 \left|2\mathrm{Re} \sum_{n=n_0}^{N} T_n(\delta_{n-1})\right|^{2\nu} da$$

$$< 4^\nu \int_0^1 \left\{\left[\sum_{k=1}^{N} \frac{B_{N,k}}{k}\right]^{2\nu} + N^{2\nu}\left[\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{B_{N,k}}{k^2}\right]^{2\nu}\right\} da$$

$$< 4^\nu \int_0^1 \left[\left(\sum_{1}^{N} \frac{1}{k}\right)^{2\nu-1} \sum_{k=1}^{N} \frac{B_{N,k}^{2\nu}}{k} + N^{2\nu}\left(\sum_{k=N+1}^{\infty} (1/k)^{(4\nu-1-\varrho)/(2\nu-1)}\right)^{2\nu-1} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{B_{N,k}^{2\nu}}{k^2}\right] da$$

$$< e^{2\frac{\ln N}{\ln^\varepsilon \ln N}} \left[\sum_{1}^{N} \frac{1}{k} \int_0^1 B_{N,k}^{2\nu} da + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{k^{1+\varrho}} \int_0^1 B_{N,k}^{2\nu} da\right].$$

Воспользовавшись неравенством (2.3) и тем, что $\varrho = (\ln\ln N)/\ln N$, мы получаем окончательно, что

$$\int_0^1 \left|2N^{-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1+\varepsilon}{N}\right)} \mathrm{Re} \sum_{n=n_0}^{N} T_n(\delta_{n-1})\right|^{2\nu} da < e^{5\frac{\ln N}{\ln^\varepsilon \ln N}} N^{-1-\varepsilon}, \quad N > N_0. \tag{2.33}$$

Пусть $E_N$ измеримое множество на $(0, 1)$, где

$$\left|2N^{-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1+\varepsilon}{\nu}\right)} \mathrm{Re} \sum_{n=n_0}^{N} T_n(\delta_{n-1})\right| > \frac{1}{\ln N}. \tag{2.34}$$

Тогда из (2.33) следует, что

$$\mathrm{mes}\, E_N < \ln^2 N \cdot N^{-1-\varepsilon/2}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{mes}\, E_{N+k} < N^{-\varepsilon/3}, \quad N > N_1. \tag{2.35}$$

Итак, мы можем утверждать, что почти для всех $a$ на $(0,1)$

$$\lim_{N\to\infty}\left|2N^{-\frac{1}{2}\left(1+\frac{\varepsilon+1}{\nu}\right)}\operatorname{Re}\sum_{n_0}^{N}T_n(\delta_{n-1})\right|=0 \tag{2.36}$$

и, кроме того, тот же предел имеет место почти для всех $a$ и при замене суммы $T_n(\delta_{n-1})$ на $\sum T'_n(\delta_{n-1})$, получающуюся при разложении в ряд Фурье функции $U_q(a-1/q,\ b+1/q;x)$ и суммировании по $n$ при $a=p/s_n$, $b=t_n/s_n$, $x=\delta_{n-1}$ аналогично тому, как была получена сумма $\sum T_n(\delta_{n-1})$. Никаких изменений при доказательстве существования этого предела по сравнению с (2.36) не будет. Поэтому для всех $a$, за исключением множества меры нуль, будут иметь место оба предела.

Теорема VI. *Пусть* $s_1\leqslant s_2\leqslant s_3\leqslant\ldots$, $s_1=1$, *последовательность неограниченно растущих целых чисел,* $m_n=s_1s_2\ldots s_n$, $a<1$ *действительное число,* $n_0(p)$ *есть наименьшее* $n$ *в неравенстве* $s_n>p$.

*Тогда, если*

$$a=\sum_{1}^{\infty}\frac{p_n}{m_n},\qquad p_n=[s_n\delta_{n-1}],\qquad \delta_{n-1}=\{m_{n-1}a\}, \tag{2.37}$$

*то почти для всех* $a$ *на* $(0,1)$ *при* $N>N_0(a,\varepsilon)$ *имеет место неравенство*

$$\left|\sum_{p\leqslant p_n<p+r}1-\sum_{n=n_0+1}^{N}\frac{t_n-p}{s_n}\right|<\frac{1}{2}N^{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1+\varepsilon}{\nu}\right)}, \tag{2.38}$$

$$\nu=\min\left(\left[\frac{1}{2}S_{N_1}\right],\left[\frac{\ln N}{\ln^{1+\varepsilon}\ln N}\right]\right),\qquad N_1=[\sqrt{N}],$$

*где* $\varepsilon>0$ *фиксировано,* $t_n=\min(s_n,p+r)$.

Доказательство. Пусть $a$ число множества полной меры, для которого выполняется неравенство (2.36). Из (2.25), (2.27) и (2.36) тогда следует, что

$$\sum_{n=n_0(p)+1}^{N}U_0\left(\frac{p}{s_n},\frac{t_n}{s_n};\delta_{n-1}\right)=\sum_{p\leqslant p_n<p+r}1=\sum_{n=n_0(p)+1}^{N}\frac{t_n+p}{s_n}+\frac{\theta}{2}N^{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1+\varepsilon}{\nu}\right)},$$
$$N>N_0,\ |\theta|\leqslant 1,$$

что и доказывает нашу теорему.

Следствия из этой теоремы.

Рассмотрим случай $s_n=[n^\gamma]$, $\gamma<\frac{1}{2}$. Здесь не выполняется несущественное условие $s_2>1$, но простым сдвигом можно его соблюсти. Мы вообще не примем, для простоты, его во внимание. Нетрудно



заметить, что вообще при $\gamma<1$ для того, чтобы $n$ удовлетворяли условиям

$$[n^\gamma]>[(n-1)^\gamma],\qquad [n^\gamma]=[(n-1)^\gamma]+1,$$

необходимо и достаточно, чтобы $n=[q^{1/\gamma}]+\varepsilon$, $q$ — целое, $\varepsilon=1$, если $q^{1/\gamma}$ нецелое и $\varepsilon=0$, если $q^{1/\gamma}$ — целое. Действительно, в этом случае $[n^\gamma]=q$,

$$n^\gamma-(n-1)^\gamma-\{n^\gamma\}=q-[(n-1)^\gamma]-\{(n-1)^\gamma\}\geqslant 1-\{(n-1)^\gamma\}>0.$$

Поэтому

$$q^{1/\gamma}=n\left(1-\frac{\{n^\gamma\}}{n^\gamma}\right)^{1/\gamma}\leqslant n,\qquad q^{1/\gamma}>n-1, \tag{2.39}$$

что и доказывает наше утверждение. Пусть, для простоты, $\gamma$ — иррациональное, тогда всегда $\varepsilon=1$. Если $\gamma<\frac{1}{2}$, to можно предположить, что $r=1$. Тогда, так как $s_n\geqslant p+1$, $t_n=p+1$ и мы будем иметь, что

$$\sum_{\substack{p_n=p\\ n\leqslant N}}1=\sum_{n=n_0(p)+1}^{N}\frac{1}{s_n}+\frac{\theta}{2}N^{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1+\varepsilon}{\nu}\right)},\qquad |\theta|<1, \tag{2.40}$$
$$\nu=\frac{\ln N}{\ln^{1+\varepsilon}\ln N},\qquad \sum_{n=n_0+1}^{N}\frac{1}{s_n}=\frac{1}{1-\gamma}\left(N^{1-\gamma}-[p^{1/\gamma}+1]^{1-\gamma}\right)+O(1).$$

Это неравенство показывает, например, что при $p<\theta N^\gamma$, $\theta<1$, частота встречи числа $p$ среди знаков разложения $a$ на отрезке $(0,N)$ отлична от нуля. Если же $N=[N_0^{1/\gamma}]$, $\gamma<\frac{1}{4}$, то уже для $p_n<N^\gamma-c$, где $c$ постоянная, частота встречи почти для всех $a$ не нулевая. Общее утверждение состоит в том, что при $s_{n_k}\leqslant n_k^\gamma$, $k=1,2,\ldots,\gamma<\frac{1}{2}$, среди чисел $p_n$

$$a=\sum_{1}^{\infty}\frac{p_n}{m_n},\qquad p_n=[s_n\{am_{n-1}\}],$$

встречаются все натуральные числа почти для всех $a$ на $(0,1)$. Это тоже простое следствие нашей теоремы, так как в этом случае, при фиксированном $p$, $\sum\limits_{n>n_0}^{N}1/s_n$ будет больше $N^{1-\gamma}$. Если же $\gamma>\frac{1}{2}$, то легко получить из нашей теоремы, что почти для всех $a$ при $p<\theta N^\gamma$ и $s_n=[n^\gamma]$, хотя бы одно из чисел интервала

$$[p,\,p+N^{\gamma_0-\frac{1}{2}+\varepsilon}],\qquad \varepsilon>0,\ \gamma_0=\min(\gamma,1)$$

встретится среди чисел $p_1,\ldots,p_N$. Таким же методом можно доказывать и более общие теоремы для представлений чисел из теоремы III.

Возможен, как всегда, и другой путь доказательства этих метрических теорем, элементарным, но громоздким подсчетом, но оценки тригонометрических сумм привлекли нас своей простотой.

### Цитированная литература

[1] А. О. Гельфонд, *Трансцендентные и алгебраические числа,* Москва 1952, p. 224.

[2] M. Lazard, *Les zéros d'une fonction analytique d'une variable sur un corps valué complet,* Institut des hautes études scientifiques, Publ. Mathem. 14 (1962), pp. 223-251.

[3] A. Rényi, *Representations for real numbers and their ergodic properties,* Acta Math. Acad. Scient. Hungar 8 (3-4) (1900), pp. 477-493.

[4] А. О. Гельфонд, *Об одном общем свойстве систем счисления,* И. А. Н. 23 (6) (1959), pp. 809-814.

[5] H. Davenport, P. Erdös, W. I. Le Veque, *On Weils criterion for uniform distributions,* Michigan Math. Journ. 10 (1963), pp. 311-314.

*Reçu par la Rédaction le 8. 6. 1964*

ACTA ARITHMETICA
XI (1965)

# Further developments in the comparative prime-number theory III

by

S. Knapowski (Poznań) and P. Turán (Budapest)

**1.** As well-known, Chebyshev (see Chebyshev [1]) asserted without a proof that ($p$ standing for primes)

$$\lim_{x\to+\infty}\sum_{p>2}(-1)^{(p-1)/2}e^{-p/x} = -\infty, \tag{1.1}$$

i.e. "there are more primes $\equiv 3$ (4) than $\equiv 1$ (4) in Abel's sense". This is undecided until now; but as well-known (see Hardy-Littlewood [1], Landau [1], [2]) it is equivalent to the fact that (with $s = \sigma+it$)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^s}\neq 0, \qquad \sigma>\frac{1}{2}.$$

The same could have been proved for the sum

$$\sum_{p>2}(-1)^{(p-1)/2}\log p\cdot e^{-p/x} \tag{1.2}$$

and analogously for

$$\sum_{p\equiv 1(3)}\log p\cdot e^{-p/x}-\sum_{p\equiv 2(3)}\log p\cdot e^{-p/x}. \tag{1.3}$$

By these are essentially all moduli $k$ with $\varphi(k) = 2$ settled. As to the next difficult question $\varphi(k) = 4$, the simplest is the case $k = 8$. It turned out (see Knapowski-Turán [1]) that for the functions

$$\sum_{p\equiv 1(8)}\log p\cdot e^{-p/x}-\sum_{p\equiv l(8)}\log p\cdot e^{-p/x} \tag{1.4}$$

we have an analogous situation as before; but as a new phenomenon, we proved that for $0<\delta<c_1$ for each $l_1\neq l_2$ among 3, 5, 7 we have

(1.5)

$$\max_{\delta^{-1/3}\leqslant x\leqslant\delta^{-1}}\Big\{\sum_{p\equiv l_1(8)}\log p\cdot e^{-p/x}-\sum_{p\equiv l_2(8)}\log p\cdot e^{-p/x}\Big\}>\frac{1}{\sqrt{\delta}}e^{-41\frac{\log(1/\delta)\log_3(1/\delta)}{\log_2(1/\delta)}}$$