ACTA ARITHMETICA
XI (1966)

Ergodische Theorie des Jacobischen Algorithmus

von

F. Schweiger (Wien)

Herrn Professor E. Hlawka
zum 50. Geburtstag gewidmet

1. Einleitung. Sei μ ein σ-Maß, welches auf einem σ-Körper von Teilmengen eines Raumes X definiert ist, derart daß $\mu(X) = 1$. Eine Abbildung φ von X in sich heißt *meßbar*, wenn das Urbild $\varphi^{-1}E$ jeder meßbaren Menge E meßbar ist. Eine Menge E heißt *invariant* bezüglich φ, wenn $E = \varphi^{-1}E$. Man nennt dann φ *unzerlegbar*, wenn jede invariante Menge das Maß 0 oder 1 besitzt. In der metrischen Theorie der Kettenbrüche betrachtet man die folgende von Marczewski eingeführte Abbildung des Einheitsintervalles $\langle 0, 1\rangle$ in sich

$$\delta(x) = \frac{1}{x} - \left[\frac{1}{x}\right].$$

Knopp ([2]) hat einen Satz bewiesen, der in der Terminologie der Ergodentheorie ausgedrückt, aussagt, daß δ bezüglich des Lebesgueschen Maßes unzerlegbar ist. Ziel dieser Arbeit ist es, diesen Satz auf Jacobische Algorithmen zu übertragen, d.h. es wird bewiesen, die durch

$$\delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(\frac{x_2}{x_1} - \left[\frac{x_2}{x_1}\right], \frac{x_3}{x_1} - \left[\frac{x_3}{x_1}\right], \ldots, \frac{1}{x_1} - \left[\frac{1}{x_1}\right]\right)$$

definierte Transformation des n-dimensionalen Einheitswürfels in sich ist bezüglich des n-dimensionalen Lebesgueschen Maßes unzerlegbar.

Der Beweis folgt der Darstellung von Ryll-Nardzewski ([4]), ist aber aus verschiedenen Gründen erheblich komplizierter.

Den Jacobialgorithmus hat Perron ([3]) wohl als erster ausführlich untersucht. Man ordnet jedem Punkt $a = (a_1, \ldots, a_n)$ des n-dimensionalen reellen euklidischen Raumes 1-1-deutig eine n-fache Zahlenfolge

$$\text{(1.1)} \qquad \begin{bmatrix} a_1 a_1' & a_1'' & \cdots \\ a_2 a_2' & a_2'' & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n a_n' & a_n'' & \cdots \end{bmatrix}$$

zu, wobei das Bildungsgesetz folgendes ist:

$$a_1^{(\nu)} = a_1^{(\nu)} + \frac{1}{a_n^{(\nu+1)}}, \quad a_2^{(\nu)} = a_2^{(\nu)} + \frac{a_1^{(\nu+1)}}{a_n^{(\nu+1)}}, \quad \ldots, \quad a_n^{(\nu)} = a_n^{(\nu)} + \frac{a_{n-1}^{(\nu+1)}}{a_n^{(\nu+1)}}.$$

Dabei ist $a_i^{(\nu)} = [a_i^{(\nu)}]$, die nächstkleinere Zahl. Bildet man aus dieser n-fachen Zahlenfolge Näherungsbrüche $\omega_{in}^{(\nu)}/\omega_{0n}^{(\nu)}$ gemäß der Rekursionsvorschrift:

(1.2a) $$\omega_{jn}^{(\nu+1)} = \omega_{j0}^{(\nu)} + a_1^{(\nu)}\omega_{j1}^{(\nu)} + \ldots + a_n^{(\nu)}\omega_{jn}^{(\nu)}, \qquad j = 0, 1, \ldots, n$$

mit den Anfangswerten

$$\omega_{jk}^{(\mu)} = \delta_{j,k+\mu}$$

für $k+\mu \leqslant n$, wo $\delta_{j,k+\mu}$ das Kroneckersymbol bedeutet, so zeigt man

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{\omega_{in}^{(\nu)}}{\omega_{0n}^{(\nu)}} = a_i.$$

Die n-fache Zahlenfolge ist bis auf folgende Einschränkungen beliebig: Stets ist $a_n^{(\nu)} \geqslant a_i^{(\nu)} \geqslant 0$ und $a_n^{(\nu)} \geqslant 1$. Gilt einmal $a_i^{(\nu)} = a_n^{(\nu)}$, so folgt weiters $a_{i-1}^{(\nu+1)} \leqslant a_{n-1}^{(\nu+1)}$, gilt dabei wieder das Gleichheitszeichen, so folgt obendrein $a_{i-2}^{(\nu+2)} \leqslant a_{n-2}^{(\nu+2)}$ und so fort. Dabei setzt man $a_0^{(\mu)} = 1$ und $a_k^{(\mu)} = 0$ für $k < 0$. Für die Größen $\omega_{ij}^{(\nu)}$ gelten weiters die Verschiebungsformeln

(1.2b) $$\omega_{ij}^{(\nu+1)} = \omega_{i,j+1}^{(\nu)}$$

und für die $(n+1)$-Determinante $\det(\omega_{ij}^{(\nu)})$ gilt:

$$\det(\omega_{ij}^{(\nu)}) = (-1)^{n\nu}, \qquad i, j = 0, 1, \ldots, n.$$

Für die Koordinaten a_i des Punktes a erhält man ferner die Darstellung

(1.3) $$a_i = \frac{\omega_{i0}^{(\nu)} + \omega_{i1}^{(\nu)} a_1^{(\nu)} + \ldots + \omega_{in}^{(\nu)} a_n^{(\nu)}}{\omega_{00}^{(\nu)} + \omega_{01}^{(\nu)} a_1^{(\nu)} + \ldots + \omega_{0n}^{(\nu)} a_n^{(\nu)}}.$$

Mit Hilfe der obigen Determinantenformel beweist man dann folgendes Resultat über die n-zeilige Determinante $\det(a_i\omega_{0j}^{(\nu)} - \omega_{ij}^{(\nu)})$

(1.4) $$\det(a_i\omega_{0j}^{(\nu)} - \omega_{ij}^{(\nu)}) = \frac{1}{\omega_{00}^{(\nu)} + \omega_{01}^{(\nu)} a_1^{(\nu)} + \ldots + \omega_{0n}^{(\nu)} a_n^{(\nu)}}, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Im folgenden beschränken wir uns auf den Bereich $B^{(0)} = \{(a_i) \mid 0 \leqslant a_i < 1\}$. Es ist dann stets $a_i^{(0)} = 0$, so daß in der n-fachen Zahlenfolge (1.1) die erste Spalte weggelassen werden kann. Die Menge aller Punkte $x \in B^{(0)}$, deren Entwicklung (1.1) bis zum ν-ten Schritt durch

$$\begin{vmatrix} k_1' & k_1'' & \ldots & k_1^{(\nu)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k_n' & k_n'' & \ldots & k_n^{(\nu)} \end{vmatrix}$$

vorgegeben ist, einen Lebesguemeßbaren Bereich $B^{(\nu)}$ dar. Es gilt die Abschätzung, wobei mit $\mathfrak{M}E$ das Lebesguemaß einer Menge E bezeichnet wird:

$$\frac{1}{n!(2n+1)^{n+1}(\omega_{0n}^{(\nu)}k_n^{(\nu)})^{n+1}} < \mathfrak{M}B^{(\nu)} < \frac{1}{(\omega_{0n}^{(\nu)}k_n^{(\nu)})^{n+1}}.$$

Ferner brauchen wir noch die Abschätzung des Verhältnisses der Maße zweier ineinanderliegender Bereiche $B^{(\nu+1)} \subset B^{(\nu)}$:

(1.5) $$\frac{A_1}{(k_n^{(\nu+1)})^{n+1}} < \frac{\mathfrak{M}B^{(\nu+1)}}{\mathfrak{M}B^{(\nu)}} < \frac{A_2}{(k_n^{(\nu+1)})^{n+1}}$$

mit den Konstanten

$$A_1 = \frac{1}{n!(2n+1)^{n+1}(n+1)^{n+1}}, \qquad A_2 = n!(2n+1)^{n+1}.$$

Wie erwähnen noch folgenden Satz: Betrachtet man die $a_i^{(\nu)} = a_i^{(\nu)}(a_1, \ldots, a_n)$ als Funktionen in $a_1, \ldots, a_n$, so sind diese auf den Bereichen $B^{(\nu-1)}$ 1-1-deutig. Diese Bereiche sind rekursiv bestimmt: Durchläuft a ganz $B^{(\nu-1)}$, so wird $B^{(\nu-1)}$ in abzählbar viele konvexe, fremde Bereiche $B^{(\nu)}$ zerlegt, die dadurch charakterisiert sind, daß die n Funktionen $a_i^{(\nu)}$ dort konstante Werte $k_i^{(\nu)}$ annehmen. Der Beweis dieses Satzes und der Abschätzung (1.5) ist in einer früheren Arbeit [6] erbracht worden.

2. Verallgemeinerung des Satzes von Knopp. Bezeichnen wir mit

$$a = [a_i', a_i'', a_i^{(3)}, \ldots]$$

kurz die 1-1-deutige Entwicklung eines reellen Punktes

$$a = (a_i) \in B^{(0)} = \{(x_i) \mid 0 \leqslant x_i < 1\},$$

so definieren wir eine Abbildung von $B^{(0)}$ in sich gemäß

$$\delta[a_i', a_i'', a_i^{(3)}, \ldots] = [a_i'', a_i^{(3)}, \ldots].$$

Dies bedeudet

$$\delta(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \left(\frac{x_2}{x_1} - \left[\frac{x_2}{x_1}\right], \frac{x_3}{x_1} - \left[\frac{x_3}{x_1}\right], \ldots, \frac{1}{x_1} - \left[\frac{1}{x_1}\right]\right).$$

Es ist leicht zu sehen, daß δ meßbar ist. Sei nämlich Q ein beliebiger Würfel, $Q \subset B^{(0)}$, so wird Q in höchstens abzählbar viele Teile $Q \cap B'$ zerlegt, deren Urbilder ersichtlich meßbar sind, denn das Urbild jedes B' ist eine abzählbare Vereinigung von Bereichen B''.

Wir beweisen

Satz 1. *Die Abbildung δ ist bezüglich des n-dimensionalen Lebesgueschen Maßes unzerlegbar.*

Beweis. Wir folgen der Methode von Ryll-Nardzewski ([4]). Wegen der Terminologie sei im übrigen auf den Artikel [1] verwiesen. Sei E invariant bezüglich δ, d.h. $x \in E$ genau dann, wenn $\delta(x) \in E$ und sei $\mathfrak{M}E = d < 1$, so zeigen wir $d = 0$. Mit $\chi(x)$ sei die charakteristische Funktion von E bezeichnet. Ist nun nach (1.2a) und (1.3)

$$(2.1) \qquad (y_i) = [a_1', a_1'', \ldots, a_i^{(\nu)} + x_i] = \frac{\omega_{i0}^{(\nu)} + \sum \omega_{ij}^{(\nu)}(a_j^{(\nu)} + x_j)}{\omega_{00}^{(\nu)} + \sum \omega_{0j}^{(\nu)}(a_j^{(\nu)} + x_j)}$$

$$= \frac{\omega_{in}^{(\nu+1)} + \sum \omega_{ij}^{(\nu)} x_j}{\omega_{0n}^{(\nu+1)} \sum \omega_{0j}^{(\nu)} x_j},$$

so ist $\delta^\nu(y_i) = (x_i)$. Daher ist

$$\chi(x_i) = \chi\left(\frac{\omega_{in}^{(\nu+1)} + \sum_{j=1}^{n} \omega_{ij}^{(\nu)} x_j}{\omega_{0n}^{(\nu+1)} + \sum_{j=1}^{n} \omega_{0j}^{(\nu)} x_j}\right)$$

für $(x_i) \in E$. Wir schätzen als erstes die Dichte von E in einem Bereich $B^{(\nu)}$ ab:

$$(2.2) \qquad \frac{\mathfrak{M}(E \frown B^{(\nu)})}{\mathfrak{M}B^{(\nu)}}$$

$$= \frac{\int\limits_{B^{(\nu)}} \chi(y)\,dy}{\int\limits_{B^{(\nu)}} dy} = \frac{\int\limits_{\delta^\nu B^{(\nu)}} \chi\left(\frac{\omega_{in}^{(\nu+1)} + \sum \omega_{ij}^{(\nu)} x_j}{\omega_{0n}^{(\nu+1)} + \sum \omega_{0j}^{(\nu)} x_j}\right) \Delta\, dx}{\int\limits_{\delta^\nu B^{(\nu)}} \Delta dx} = \frac{\int\limits_{\delta^\nu B^{(\nu)}} \chi(x_i)\, \Delta dx}{\int\limits_{\delta^\nu B^{(\nu)}} \Delta dx}.$$

Dabei ist $dx = dx_1 dx_2 \ldots dx_n$ und $\Delta = \dfrac{1}{(\omega_{0n}^{(\nu+1)} + \sum \omega_{0j}^{(\nu)} x_j)^{n+1}}$.

Es ist nämlich

$$\frac{\partial y_i}{\partial x_j} = \frac{(\omega_{0n}^{(\nu+1)} + \sum \omega_{0j}^{(\nu)} x_j)\,\omega_{ij}^{(\nu)} - (\omega_{in}^{(\nu+1)} + \sum \omega_{ij} x_j)\,\omega_{0j}^{(\nu)}}{(\omega_{0n}^{(\nu+1)} + \omega_{0j}^{(\nu)} x_j)^2} = \frac{\omega_{ij}^{(\nu)} - y_i\, \omega_{0j}^{(\nu)}}{\omega_{0n}^{(\nu+1)} + \sum \omega_{0j}^{(\nu)} x_j}.$$

Mit Hilfe von (1.4) folgt das Ergebnis. Liegen keine Einschränkungen vor, wie sie in der Einleitung bezüglich der Entwicklung erwähnt wurden, so ist $\delta^\nu B^{(\nu)} = B^{(0)}$; ein $B^{(\nu)}$ dieser Eigenschaft nennen wir ein gutes $B^{(\nu)}$. Liegen einige Einschränkungen vor, so nennen wir das $B^{(\nu)}$ schlecht. Es ist dann nämlich $\delta^\nu B^{(\nu)}$ nur ein Teilbereich von $B^{(0)}$.

Wir betrachten zuerst den Fall guter $B^{(\nu)}$. Es ist dann

$$\frac{\mathfrak{M}(E \frown B^{(\nu)})}{\mathfrak{M}B^{(\nu)}} = \frac{\int_0^1 \cdots \int_0^1 \chi(x_i)\, \Delta dx}{\int_0^1 \cdots \int_0^1 dx}.$$

Da $\partial \Delta / \partial x_i < 0$ auf ganz $B^{(0)}$, d.h. Δ dort für jedes x_i monoton abnimmt, wird das Integral im Zähler bei festem $\mathfrak{M}E = d < 1$ maximal, wenn E modulo einer Nullmenge ein einfach zusammenhängender Bereich ist, der den Nullpunkt enthält, etwa der Bereich G. Da dann bestimmt $\mathfrak{M}(B^{(0)} - G) = 1 - d > 0$ ist

$$\frac{\mathfrak{M}(E \frown B^{(\nu)})}{\mathfrak{M}B^{(\nu)}} \leqslant k < 1$$

mit einer festen Zahl k. Für ein beliebiges $B^{(\nu)}$ geht dieser Schluß nicht, da $\mathfrak{M}\delta^\nu B^{(\nu)} = (n!)^{-1}$ werden kann. Wir benötigen daher

Hilfssatz 1. *Zu jedem $B^{(\nu)}$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein ν_0 sodaß*

$$(2.3) \qquad \mathfrak{M}B^{(\nu)} = \sum \mathfrak{M}B^{(\nu+1)} + \ldots + \sum \mathfrak{M}B^{(\nu+\nu_0)} + \varepsilon,$$

wobei alle $B^{(\mu)}$ disjunkt und gut sind, d.h.

$$\delta^\mu B^{(\mu)} = B^{(0)}, \qquad \mu = \nu+1, \ldots, \nu+\nu_0.$$

Da wir uns nur für kleine ε interessieren, können wir verlangen

a) $\sqrt{\varepsilon} < \mathfrak{M}B^{(\nu)}$,

b) $k + \sqrt{\varepsilon} \leqslant k' < 1$.

Der Hilfssatz besagt, wir können jedes $B^{(\nu)}$ durch abzählbar viele gute $B^{(\mu)}$ approximieren.

Beweis. Sei $B^{(\nu)}$ vorgegeben. Es gibt offenbar ein $B^{(\nu+1)} \subset B^{(\nu)}$ mit den beiden Eigenschaften

$$(1) \qquad k_n^{(\nu+1)} > (n!)^{1/(n+1)}(2n+1),$$

$$(2) \qquad \delta^{\nu+1} B^{(\nu+1)} = B^{(0)}.$$

Man wähle etwa ein $\gamma > (n!)^{1/(n+1)}(2n+1)$ und nehme als definierendes n-tupel

$$(k_1^{(\nu+1)}, k_2^{(\nu+1)}, \ldots, k_n^{(\nu+1)}) = (\gamma - n + 1, \gamma - n + 2, \ldots, \gamma).$$

Tatsächlich gibt es natürlich unendlich viele $B^{(\nu+1)} \subset B^{(\nu)}$, die (1) und (2) erfüllen. Es ist nach (1.5)

$$\frac{\mathfrak{M}B^{(\nu+1)}}{\mathfrak{M}B^{(\nu)}} < \frac{n!(2n+1)^{n+1}}{(k_n^{(\nu+1)})^{n+1}} = \frac{n!(2n+1)^{n+1}}{\gamma^{n+1}} = q < 1.$$

Bezeichnen wir mit $\Theta^{(\nu+1)}$ die Vereinigung aller schlechten $B^{(\nu+1)} \subset B^{(\nu)}$, so gilt sicher

$$\mathfrak{M}\Theta^{(\nu+1)} < (1-q)\,\mathfrak{M}B^{(\nu)}.$$

Fassen wir in $B^{(\nu)}$ alle guten $B^{(\nu+1)}$ zusammen, so ist

$$\mathfrak{M}B^{(\nu)} = \sum \mathfrak{M}B^{(\nu+1)} + \mathfrak{M}\Theta^{(\nu+1)}.$$

Wir betrachten nun die guten $B^{(\nu+1)} \subset \Theta^{(\nu+1)}$ und fassen den Rest zu $\Theta^{(\nu+1)}$ zusammen:

$$\mathfrak{M}B^{(\nu)} = \sum \mathfrak{M}B^{(\nu+1)} + \sum \mathfrak{M}B^{(\nu+2)} + \mathfrak{M}\Theta^{(\nu+2)}$$

und es ist dann

$$\mathfrak{M}\Theta^{(\nu+2)} < (1-q)^2\,\mathfrak{M}B^{(\nu)}.$$

So fortfahrend schließt man leicht: Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$, so daß $(1-q)^{\nu_0} < \varepsilon$ und (2.3) erfüllt ist.

Sind nun a) und b) erfüllt, so folgt

$$\frac{\mathfrak{M}(E\cap B^{(\nu)})}{\mathfrak{M}B^{(\nu)}} \leqslant \frac{\sum\mathfrak{M}(E\cap B^{(s+1)})+\ldots+\sum\mathfrak{M}(E\cap B^{(\nu+\nu_0)})+\varepsilon}{\mathfrak{M}B^{(\nu)}}$$

$$= k + \frac{\varepsilon}{\mathfrak{M}B^{(\nu)}} \leqslant k+\sqrt{\varepsilon} \leqslant k' < 1.$$

Bezeichnen wir mit $\operatorname{diam} B^{(\nu)}$ den Durchmesser eines $B^{(\nu)}$, so beweisen wir nun:

HILFSSATZ 2. *Zu jedem $B^{(\nu)}$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine abzählbare Menge von $B^{(\mu)} \subset B^{(\nu)}$, so daß*

(2.4) a) $\mathfrak{M}B^{(\nu)} = \sum\mathfrak{M}B^{(\mu)} + \varepsilon$,

b) $\operatorname{diam} B^{(\mu)} < \varepsilon$.

Der Hilfssatz besagt anschaulich, daßman jedes $B^{(\nu)}$ durch höchstens abzählbar viele $B^{(\mu)}$ beliebig gut approximieren kann, wobei $\operatorname{diam} B^{(\mu)} < \varepsilon$ ist. Es ist zu vermerken, daß aus dem Beweis hervorgehen wird, daß die Restmenge, deren Maß nach (2.4) kleiner als ist, eine Vereinigung abzählbar vieler $B^{(\sigma)} \subset B^{(\nu)}$ darstellt.

Beweis. Es ist unter Berücksichtigung von (1.2b) nach (1.3)

$$a_i = \frac{\omega_{in}^{(\nu)} + \sum_{j=1}^{n} \omega_{in}^{(\nu+j)} a_j^{(\nu+n)}}{\omega_{0n}^{(\nu)} \sum_{j=1}^{n} \omega_{0n}^{(\nu+j)} a_j^{(\nu+n)}}.$$

Nach einiger Rechnung folgt daraus:

$$a_i - \frac{\omega_{in}^{(\nu+n)}}{\omega_{0n}^{(\nu+n)}} = -\Bigg[\frac{1}{a_n^{(\nu+n)}}\cdot\frac{\omega_{0n}^{(\nu)}}{\omega_{0n}^{(\nu+n)}}\left(a_i - \frac{\omega_{in}^{(\nu)}}{\omega_{0n}^{(\nu)}}\right) +$$

$$+\frac{a_1^{(\nu+n)}}{a_n^{(\nu+n)}}\cdot\frac{\omega_{0n}^{(\nu+1)}}{\omega_{0n}^{(\nu+n)}}\left(a_i - \frac{\omega_{in}^{(\nu+1)}}{\omega_{0n}^{(\nu+1)}}\right) +$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{a_{n-1}^{(\nu+n)}}{a_n^{(\nu+n)}}\cdot\frac{\omega_{0n}^{(\nu+n-1)}}{\omega_{0n}^{(\nu+n)}}\left(a_i - \frac{\omega_{in}^{(\nu+n-1)}}{\omega_{0n}^{(\nu+n-1)}}\right)\Bigg].$$

Da nun stets $\omega_{0n}^{(\sigma)} k_n^{(\sigma)} < \omega_{0n}^{(\sigma+1)}$ folgt

$$\left|a_i - \frac{\omega_{in}^{(\nu+n)}}{\omega_{0n}^{(\nu+n)}}\right| \leqslant \frac{1}{a_n^{(\nu+n)} k_n^{(\nu+n-1)}\ldots k_n^{(\nu+1)} k_n^{(\nu)}}\left|a_i - \frac{\omega_{in}^{(\nu)}}{\omega_{0n}^{(\nu)}}\right| +$$

$$+\frac{a_1^{(\nu+n)}}{a_n^{(\nu+n)} k_n^{(\nu+n-1)}\ldots k_n^{(\nu+1)}}\left|a_i - \frac{\omega_{in}^{(\nu+1)}}{\omega_{0n}^{(\nu+1)}}\right| +$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\frac{a_{n-1}^{(\nu+n)}}{a_n^{(\nu+n)} k_n^{(\nu+n-1)}}\left|a_i - \frac{\omega_{in}^{(\nu+n-1)}}{\omega_{0n}^{(\nu+n-1)}}\right|.$$

Da nun bestimmt für $(a_i) \in B^{(\sigma)}$

$$\left|a_i - \frac{\omega_{in}^{(\sigma)}}{\omega_{0n}^{(\sigma)}}\right| \leqslant \operatorname{diam} B^{(\sigma)}$$

und stets $a_n^{(\nu+n)} \geqslant 1$, $a_n^{(\nu+n)} \geqslant a_i^{(\nu+n)}$ folgt

$$\left|a_i - \frac{\omega_{in}^{(\nu+n)}}{\omega_{0n}^{(\nu+n)}}\right| \leqslant \frac{\operatorname{diam} B^{(\nu)}}{k_n^{(\nu+n-1)}\ldots k_n^{(\nu)}} + \frac{\operatorname{diam} B^{(\nu+1)}}{k_n^{(\nu+n-1)}\ldots k_n^{(\nu+1)}} + \ldots + \frac{\operatorname{diam} B^{(\nu+n-1)}}{k_n^{(\nu+n-1)}}.$$

Da die Abschätzung für jedes $(a_i) \in B^{(\nu+n)}$ gilt, so folgt aus der Dreiecksungleichung

$$\operatorname{diam} B^{(\nu+n)} \leqslant 2\left(\frac{\operatorname{diam} B^{(\nu)}}{k_n^{(\nu+n-1)}\ldots k_n^{(\nu)}} + \ldots + \frac{\operatorname{diam} B^{(\nu+n-1)}}{k_n^{(\sigma+n-1)}}\right).$$

Ferner ist $\operatorname{diam} B^{(\sigma+1)} \leqslant \operatorname{diam} B^{(\sigma)}$ für $B^{(\sigma+1)} \subset B^{(\sigma)}$ und daher

$$\operatorname{diam} B^{(\nu+n)} \leqslant \frac{2\operatorname{diam} B^{(\nu)}}{k_n^{(\nu+n-1)}}.$$

Sei nun $k_n^{(\nu+n-1)} > 2^{n+1}$, so ist

$$\operatorname{diam} B^{(\nu+n)} \leqslant \frac{\operatorname{diam} B^{(\nu)}}{2^n}.$$

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so gibt es ein $\nu_0 = \nu_0(\varepsilon)$, so daß für ein $B^{(\nu+\nu_0)} \subset B^{(\nu)}$ gilt

$$\operatorname{diam} B^{(\nu+\nu_0)} < \frac{\operatorname{diam} B^{(\nu)}}{2^{\nu_0}} \leqslant \varepsilon.$$

Tatsächlich gibt es sicher unendlich viele $B^{(\nu+\nu_0)} \subset B^{(\nu)}$ mit dieser Eigenschaft. Da nun wegen (1.5)

$$\mathfrak{M}B^{(\nu+\nu_0)} \leqslant \frac{A_2^{\nu_0}}{k_n^{(\nu+1)} \ldots k_n^{(\nu+\nu_0)}} \mathfrak{M}B^{(\nu)},$$

so wählen wir $B^{(\nu+\nu_0)}$ so, daß jedesmal

$$k_n^{(\mu)} > A_2^{1/(n+1)}, \qquad \mu = \nu+1, \ldots, \nu+\nu_0$$

und somit

$$\mathfrak{M}B^{(\nu+\nu_0)} < p\mathfrak{M}B^{(\nu)}$$

mit $p < 1$ wird. Es ist dann $\mathfrak{M}(B^{(\nu)} - B^{(\nu+\nu_0)}) < (1-p)\mathfrak{M}B^{(\nu)}$. Fassen wir daher in $B^{(\nu)}$ alle $B^{(\nu+\nu_0)}$ mit diam $B^{(\nu+\nu_0)} < \varepsilon$ zusammen, so gilt

$$\mathfrak{M}B^{(\nu)} = \sum \mathfrak{M}B^{(\nu+\nu_0)} + \mathfrak{M}\Theta^{(\nu+\nu_0)}$$

wo $\mathfrak{M}\Theta^{(\nu+\nu_0)} < (1-p)\mathfrak{M}B^{(\nu)}$. In jedem $B^{(\nu+\nu_0)} \subset \Theta^{(\nu+\nu_0)}$ fassen wir alle $B^{(\nu+2\nu_0)}$ zusammen, für die diam $B^{(\nu+2\nu_0)} < \varepsilon$ und es ist daher

$$\mathfrak{M}B^{(\nu)} = \sum \mathfrak{M}B^{(\nu+\nu_0)} + \sum \mathfrak{M}B^{(\nu+2\nu_0)} + \mathfrak{M}\Theta^{(\nu+2\nu_0)}$$

mit $\mathfrak{M}\Theta^{(\nu+2\nu_0)} < (1-p)^2\mathfrak{M}B^{(\nu)}$. Wie im Hilfssatz 1 schließt man weiter: zu unserem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $N = N(\varepsilon)$, so daß $(1-p)^N < \varepsilon$ und (2.4) erfüllt ist.

Zuletzt brauchen wir noch

Hilfssatz 3. *Sei Q ein beliebiger Würfel, $Q \subset B^{(0)}$, so gibt es eine abzählbare Menge von $B^{(\mu)}$, so daß*

$$\mathfrak{M}(Q - \bigcup B^{(\mu)}) < \varepsilon$$

mit

a) $\sqrt{\varepsilon} < \mathfrak{M}Q$,

b) $k' + \sqrt{\varepsilon} \leqslant k'' < 1$.

Beweis. Sei Q ein Würfel mit Kantenlänge a. Wir wählen $\varepsilon' > 0$, über das wir noch verfügen werden. Zu diesem $\varepsilon' > 0$ gibt es nach Hilfssatz 2 eine Überdeckung des $B^{(\nu)}$, in welchem $B^{(\nu)}$ liegt (bestimmt in $B^{(0)}$ etwa), durch abzählbar viele elementfremde $B^{(\mu)}$, wo entweder $\operatorname{diam} B^{(\mu)} < \varepsilon'$ oder $\sum \mathfrak{M}B^{(\mu)} < \varepsilon'$. Die Flächen des Würfels werden demnach von abzählbar vielen $B^{(\mu)}$ eingeschlossen, deren Gesamtmaß $\leqslant \varepsilon'(2na^{n-1}+1) < \varepsilon$ ist, wenn nur ε' genügend klein ist. Die Bedingungen a) und b) sind stets erfüllbar.

Es folgt nun sofort

$$\frac{\mathfrak{M}(E \cap Q)}{\mathfrak{M}Q} \leqslant k'' < 1$$

für jeden beliebigen Würfel $Q \subset B^{(0)}$. Da diese Würfel eine Überdeckung im Sinne von Vitali bilden, folgt aus dem Lebesgueschen Dichtesatz $d = 0$ (siehe etwa [5], p. 117).

Man wird vielleicht fragen, warum man diesen Satz nicht schon auf die Abschätzung $\mathfrak{M}(E \cap B^{(\nu)}) \leqslant k'\mathfrak{M}B^{(\nu)}$ anwenden konnte. Dies liegt daran, daß es nicht gelingt zu zeigen, die $B^{(\nu)}$ überdecken im Sinne von Vitali. Die Folge der $B^{(\nu)}$, die ein festes x enthalten, ist nämlich nicht regulär. Regularität der $B^{(\nu)}$ wäre nämlich mit folgender Approximationsaussage gleichwertig:

$$\prod_{i=1}^{n} \left| a_i - \frac{\omega_{in}^{(\nu)}}{\omega_{0n}^{(\nu)}} \right| \leqslant \frac{K}{(\omega_{0n}^{(\nu)})^{n+1}}$$

mit einer Konstanten $K = K(B^{(\nu)})$. Dies ist bestimmt für alle $a \in B^{(0)}$ nicht richtig, wie aus dem Gegenbeispiel in [3], Seite 67, Anmerkung unten, etwa hervorgeht. Ob es für fast alle a richtig wäre, scheint ein sehr schwieriges Problem zu sein.

Aus Satz 1 folgt nun unmittelbar

Satz 2. *Ist A eine Aussage über die Folge der Elemente der Jacobischen Kettenbruchentwicklung eines Punktes $x \in B^{(0)}$ und hat A die Eigenschaft, daß sie bei jedem $x \in B^{(0)}$, dessen Entwicklung im Sinne von Perron störungsfrei ist, entweder für alle $\delta^{\nu}(x)$ richtig ist oder für keines, so hat die Menge Z der x, für die A richtig ist, das Maß 0 oder 1, sofern Z meßbar ist.*

Beispiele zu diesem Satz sind in meinen Arbeiten [6] und [7] enthalten.

Zuletzt danke ich noch Herrn Dr. W. Philipp für nützliche Hinweise.

Literaturverzeichnis

[1] S. Hartman, E. Marczewski et C. Ryll-Nardzewski, *Théorèmes ergodiques et leurs applications*, Coll. Math. 2 (1951), S. 109-123.

[2] K. Knopp, *Mengentheoretische Behandlung einiger Probleme der diophantischen Approximationen und der transfiniten Wahrscheinlichkeiten*, Math. Ann. 95 (1926), S. 409-426.

[3] O. Perron, *Grundlagen für eine Theorie des Jacobischen Kettenbruch algorithmus*, Math. Ann. 64 (1907), S. 1-76.

[4] C. Ryll-Nardzewski, *On the ergodic theorems (II)*, Studia Math. 12 (1951), S. 74-79.

[5] S. Saks and St. Banach, *Theory of the Integral*, Warszawa 1937.

[6] F. Schweiger, *Geometrische und elementare metrische Sätze über den Jacobischen Algorithmus*, Sitzungsber. Öst. Akad. Wiss., Mathem.=naturw. Klasse, Abt. II, 173 (1964), S. 59-92.

[7] — *Metrische Sätze über den Jacobischen Algorithmus*, Monatshefte Math. 69 (1965), S. 243-255.

Reçu par la Rédaction le 27. 10. 1965

ACTA ARITHMETICA
XI (1966)

The expression of a polynomial as a sum of three irreducibles*

by

D. R. Hayes (Tennessee)

1. Introduction. Let k be a finite field of q elements, and let $k[x]$ denote its polynomial ring. The leading coefficient of a polynomial M in $k[x]$ is denoted by sgn M. If sgn $M = 1$, the polynomial is said to be *primary*. The "absolute value" of a polynomial A in $k[x]$ is defined by

$$|A| = q^{\deg A}. \tag{1.1}$$

A polynomial A is *even* if it is divisible by an irreducible P such that $|P| = 2$; otherwise, A is *odd*. It is clear that even polynomials can occur only over the finite field of two elements.

According to a famous theorem of Vinogradov, every sufficiently large odd integer can be epxressed as a sum of three primes. In this paper, we prove the following analog of Vinogradov's theorem for the polynomial domain $k[x]$.

THEOREM 1.1. *Let M be an odd polynomial in $k[x]$ of sufficiently high degree r (i.e., r is greater than a fixed positive constant which depends only on k). Suppose α, β, and γ are any three non-zero elements of k such that $\alpha+\beta+\gamma =$ sgn M. Then there exist primary irreducibles P_1, P_2, and P_3 in $k[x]$, each of degree r, such that*

$$\alpha P_1+\beta P_2+\gamma P_3 = M. \tag{1.2}$$

The restriction that M be odd is necessary. Consider, for example, the even polynomial $M = x^r$ over the finite field of two elements. We must choose $\alpha = \beta = \gamma = 1$ since there is no other non-zero element of the field. If we were to have $x^r = P_1+P_2+P_3$, then we would have $P_1(0)+P_2(0)+P_3(0) = 0$ upon substituting $x = 0$. Now for $r > 1$, $P_1(0) \neq 0$ since otherwise P_1 would not be irreducible. Hence, $P_1(0) = 1$ and $P_1(0)+P_2(0)+P_3(0) = 1+1+1 = 1 \neq 0$, a contradiction. Thus,

* Supported in part by NSF Grant GP-1632.