En effet, d'après $(2)^{(i+1)}$ et $(\mathrm{V})^{(i)}$ on a:

$$(8)+ \qquad |\Theta, \Theta_{+}^{(i+1)}| < 1/2q^{(i+1)},$$

$$(8)- \qquad |\Theta', \Theta_{-}^{(i+1)}| < 1/2q^{(i+1)}$$

la propriété se déduit alors aisément de (7).

L'ensemble des suites $(X^{(i)})$ qu'on construit par le procédé du § IV à partir d'un premier élément $X^{(1)}$ a la puissance du continu; et comme à deux suites distinctes correspondent deux systèmes dont les projections sur chaque axe sont distinctes, le théorème est complètement démontre.

Travaux cités

[1] V. Jarník, *Eine Bemerkung über diophantische Approximationen*, Math. Zeitschr. 72 (1959), p. 187-191, où on trouvera un historique du problème et des références.

Reçu par la Rédaction le 28. 4. 1965

ACTA ARITHMETICA
XI (1966)

Existence de systèmes p-adiques admettant une approximation donnée

par

J. Lesca (Grenoble)

Le but de cet article est de démontrer l'analogue p-adique d'un théorème démontré par V. Jarník dans le cas réel [1].

I. Introduction.

Définitions et notations. Soit Q_p un corps de nombres p-adiques. Dans l'espace vectoriel $Q_p r$ de dimension r sur Q_p, nous prendrons comme *distance de deux points* $y = (y_1, \ldots, y_r)$, $y' = (y'_1, \ldots, y'_r)$:

$$|y, y'| = \operatorname*{Max}_{1\leqslant i\leqslant r}\{|y_i - y'_i|_p\}.$$

Un (m, n)-*système* Θ est un ensemble de mn nombres p-adiques θ_{ji} $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$. Un (m, n)-système est identifié à un point de Q_p^{mn}. Un (m, n)-système Θ est dit *libre* si les θ_{ji} ne satisfont à aucune relation de la forme

$$F(y) = F(y_1, \ldots, y_{mn}) = 0$$

où F désigne un polynôme à mn indéterminées, à coefficients entiers rationnels, non identiquement nul.

Soit $X = (u_1, \ldots, u_m, w_1, \ldots, w_n) \in \mathcal{Z}^{m+n}$ (1) une suite de $m+n$ entiers rationnels, on pose:

$$h(X) = \operatorname*{Max}_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}}\{|u_i|, |w_j|\},$$

$$L_\Theta(X) = \operatorname*{Max}_{1\leqslant j\leqslant n}\left\{\Big|\sum_{i=1}^{m}\theta_{ji}u_i - w_j\Big|_p\right\}$$

et pour $t \in \mathcal{N}$ (2):

$$\psi_\Theta(t) = \operatorname*{Min}_{0<h(X)\leqslant t}\{L_\Theta(X)\}.$$

---

(1) Ensemble de tous les entiers.
(2) $\mathcal{N}$ ensemble des entiers naturels: 1, 2, ...

Une *fonction d'approximation* $\varphi(t)$ est une fonction à valeurs réelles positives, définie sur $\mathcal{N}$; nous la supposerons de plus décroissante; cette dernière condition n'est pas essentielle car on peut toujours s'y ramener.

In (m, n)-système Θ *admet l'approximation* $\varphi(t)$ si $\psi_\Theta(t) \leqslant \varphi(t)$.

Nous nous proposons de démontrer:

THÉORÈME. *Soient m et n deux entiers rationnels $m \geqslant 2$, $n \geqslant 1$, $\varphi(t)$ une fonction d'approximation et G un ouvert non vide de Q_p^{mn}. Alors l'ensemble des (m, n)-systèmes libres admettant l'approximation $\varphi(t)$ et appartenant à G a la puissance du continu.*

Remarques. Le problème de l'existence de (m, n)-systèmes admettant une approximation donnée a été posé par Mlle Lutz dans [3]. Mlle Lutz a résolu le problème dans le cas $m > n$ par une méthode géométrique. Nous utilisons ici une méthode différente inspirée par le travail de Jarník [1] dans le cas des nombres réels.

Mettons à part le cas $m = n = 1$ où la technique des fractions continues de Mahler [4] donne, comme dans le cas réel, des renseignements précis mais pas une condition nécessaire et suffisante d'existence de tels systèmes; il ne reste que le cas $m = 1$, $n \geqslant 2$ où le problème de l'existence de $(1, n)$-systèmes admettant une approximation donnée n'a pas été résolu. Mlle Lutz [3] a établi, dans ce cas, des conditions suffisantes que doit remplir $\varphi(t)$ pour que la conclusion du théorème reste vraie. Il existe une analogie frappante entre les résultats connus dans le cas p-adique et ceux du cas réel (voir [1] et [2]); si cette analogie était vraie dans tous les cas, une condition nécessaire et suffisante pour l'existence de $(1, n)$-systèmes $(n \geqslant 2)$ libres admettant l'approximation $\varphi(t)$ serait

$$\limsup_{t\to\infty}\{t^2\varphi(t)\} = \infty.$$

II. Préliminaires a la démonstration. Remarquons d'abord que si le théorème est vrai pour $m = 2$ il l'est aussi pour $m > 2$ (aux coefficients d'un $(2, n)$-système libre, on peut adjoindre des coefficients de façon à obtenir un (m, n)-système libre; si le premier admet l'approximation $\varphi(t)$, il en est de même du second).

Nous nous contenterons donc de faire la démonstration pour $m = 2$, nous omettrons $(2, n)$ nous dirons système pour $(2, n)$-système et nous poserons:

$$\Theta = (\alpha, \beta) \in Q_p^{2n},$$
$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in Q_p^n,$$
$$\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in Q_p^n,$$
$$X = (u, v, w_1, \ldots, w_n) \in \mathcal{Z}^{n+2}.$$

Nous utiliserons les deux lemmes suivants:

LEMME 1. *Soient $f(\Theta) = f(\alpha, \beta) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n)$ un polynôme à $2n$ indéterminées, à coefficients p-adiques, non identiquement nul, S l'hypersurface définie dans Q_p^{2n} par $f = 0$ et V un ouvert non vide de la variété linéaire $\{(\alpha, \beta) \mid \beta = 0\}$. Alors dans V il existe une infinité de points à coordonnées rationnelles tels que, si α_0 est l'un de ces points, la variété linéaire*

$$K = \{(\alpha, \beta) \mid \alpha = \alpha_0\}$$

n'est pas inclue dans S. En outre, dans tout ouvert non vide de K, il existe des systèmes qui n'appartiennent pas à S.

Ce lemme se déduit facilement du résultat suivant (déjà utilisé dans [1] et [2]) et qu'on démontre aisément par récurrence: „Si le degré de $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_n)$ par rapport à chacune des variables est inférieur à $r \in \mathcal{N}$, et si on se donne un choix de r valeurs distinctes pour chacune des variables; alors les r^{2n} points de Q_p^{2n} dont chaque coordonnée est égale à une des r valeurs données ne sont pas tous dans S".

LEMME 2. *Soient $(X^{(k)}) = (u^{(k)}, v^{(k)}, w_1^{(k)}, \ldots, w_n^{(k)})$ $(k = 1, 2, \ldots)$ une suite de points de $\mathcal{Z}^{n+2}$ et Θ un système tel que:*

$$h(X^{(k+1)}) > h(X^{(k)}) \quad (k = 1, 2, \ldots),$$
$$L_\Theta(X^{(k)}) \leqslant \varphi\big(h(X^{(k+1)})\big) \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Alors:

$$\psi_\Theta(t) = O\big(\varphi(t)\big).$$

Démonstration. Pour tout $t \geqslant h(X^{(1)})$ il existe un indice $k \in \mathcal{N}$ tel que

$$h(X^{(k)}) \leqslant t < h(X^{(k+1)})$$

alors:

$$\psi_\Theta(t) \leqslant L_\Theta(X^{(k)}) \leqslant \varphi\big(h(X^{(k+1)})\big) \leqslant \varphi(t)$$

c.q.f.d.

III. Construction d'un système Θ. Notre première opération consiste à ranger tous les polynômes à $2n$ indéterminées, à coefficients entiers rationnels, non identiquement nuls, en une suite: $f^{(1)}, f^{(2)}, \ldots$ Au polynôme $f^{(i)}$ nous faisons correspondre dans Q_p^{2n}, l'hypersurface $S^{(i)}$ définie par $f^{(i)} = 0$.

a) *Suites* $(X^{(k)})$, $(\Theta^{(k)})$, $(l^{(k)})$, $(l'^{(k)})$. Nous obtiendrons un système Θ satisfaisant aux conditions du théorème (c'est-à-dire libre, appartenant à G, admettant l'approximation $\varphi(t)$) comme limite d'une suite

$$\Theta^{(k)} = (\alpha^{(k)}, \beta^{(k)}) \in Q_p^{2n} \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

La suite $(\Theta^{(k)})$ est rattachée à une suite $(X^{(k)})$ de points de $\mathfrak{X}^{n+2}$ de la façon suivante.

$$
\text{(I)}\quad
\begin{cases}
\text{Pour } k \text{ impair:} \\
\qquad X^{(k)} \text{ est de la forme } (0, v^{(k)}, w_1^{(k)}, \ldots, w_n^{(k)}), \\
\Theta^{(k)} = (a_1^{(k)}, \ldots, a_n^{(k)}, w_1^{(k)}/v^{(k)}, \ldots, w_n^{(k)}/v^{(k)}) \quad (k = 1, 3, 5, \ldots). \\
\text{Pour } k \text{ pair:} \\
\qquad X^{(k)} \text{ est de la forme } (u^{(k)}, 0, w_1^{(k)}, \ldots, w_n^{(k)}), \\
\Theta^{(k)} = (w_1^{(k)}/u^{(k)}, \ldots, w_n^{(k)}/u^{(k)}, \beta_1^{(k)}, \ldots, \beta_n^{(k)}) \quad (k = 2, 4, \ldots).
\end{cases}
$$

On a trivialement:

$$\text{(1)}\qquad L_{\Theta^{(k)}}(X^{(k)}) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Nous déterminerons, en outre, deux suites de nombres réels $(l^{(k)})$ et $(l'^{(k)})$ telles que:

$$\text{(II)}\qquad 0 < l^{(k)} \leqslant 1/k \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

$$\text{(III)}\qquad 0 < l'^{(k)} \leqslant l^{(k)} \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

$$\text{(IV)}\qquad l^{(k)} \leqslant l'^{(k-1)} \qquad (k = 2, 3, \ldots),$$

$$\text{(V)}\qquad \begin{cases} |\alpha^{(k)}, \alpha^{(k+1)}| \leqslant l^{(k)} & (k = 1, 3, \ldots), \\ |\beta^{(k)}, \beta^{(k+1)}| \leqslant l^{(k)} & (k = 2, 4, \ldots), \end{cases}$$

$$\text{(VI)}\qquad \begin{cases} |\beta^{(k)}, \beta^{(k+1)}| \leqslant l'^{(k)} & (k = 1, 3, \ldots), \\ |\alpha^{(k)}, \alpha^{(k+1)}| \leqslant l'^{(k)} & (k = 2, 4, \ldots). \end{cases}$$

Les propriétés ultramétriques de Q_p^{2n} entraînent que si les conditions (I), ..., (VI) sont remplies:

$$\text{(2)}\qquad \text{la suite } (\Theta^{(k)}) \text{ converge vers un système } \Theta \in Q_p^{2n},$$

$$\text{(3)}\qquad |\Theta, \Theta^{(k)}| \leqslant l^{(k)} \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

$$\text{(4)}\qquad L_\Theta(X^{(k)}) \leqslant l'^{(k)} \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

b) *Conditions supplémentaires imposées aux suites précédentes.* Ces conditions sont:

$$\text{(VII)}\qquad \Theta^{(1)} \in G,$$

$l^{(1)}$ assez petit pour que l'ensemble

$$\text{(VIII)}\qquad \{\Theta \mid |\Theta, \Theta^{(1)}| \leqslant l^{(1)}\} \text{ soit inclus dans } G,$$

$$\text{(IX)}\qquad \begin{cases} \{\alpha, \beta) \mid \beta = \beta^{(k)}\} \not\subset S^{(k)} & (k = 3, 5, \ldots), \\ \{\alpha, \beta) \mid \alpha = \alpha^{(k)}\} \not\subset S^{(k)} & (k = 2, 4, \ldots), \end{cases}$$

$$\text{(X)}\qquad \Theta^{(k)} \notin S^{(k)} \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

$l^{(k)}$ assez petit pour que l'ensemble

$$\text{(XI)}\qquad \{\Theta \mid |\Theta, \Theta^{(k)}| \leqslant l^{(k)}\} \text{ ne rencontre pas } S^{(k)} \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

$$\text{(XII)}\qquad h(X^{(k+1)}) > h(X^{(k)}) \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

$$\text{(XIII)}\qquad l'^{(k)} \leqslant \varphi\big(h(X^{(k+1)})\big) \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Si nous construisons les suites $(X^{(k)})$, $(\Theta^{(k)})$, $(l^{(k)})$, $(l'^{(k)})$ satisfaisant aux conditions (I), ..., (XIII), le système Θ limite de la suite $(\Theta^{(k)})$, qui existe d'après (2), vérifie les conditions de l'énoncé. En effet:

$\Theta \in G$ d'après (VII), (VIII) et (3),

Θ est libre d'après (XI) et (3),

$L_\Theta(t) \leqslant \varphi(t)$ pour $t \geqslant h(X^{(1)})$ d'après (XII), (XIII), (4) et le lemme 2.

Nous allons maintenant construire les quatre suites par récurrence.

c) *Construction des suites.* Nous construisons dans l'ordre: $\Theta^{(1)}$ et $X^{(1)}$, $l^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$, $X^{(2)}$, $l'^{(1)}$, $\beta^{(2)}$, $l^{(2)}$, $\beta^{(3)}$, $X^{(3)}$, $l'^{(2)}$, $\alpha^{(3)}$, $l^{(3)}$, ... (Le terme qui suit $l^{(k)}$ est $\alpha^{(k+1)}$ si k est impair et $\beta^{(k+1)}$ si k est pair; le terme qui suit $l'^{(k)}$ est $\beta^{(k+1)}$ si k est impair et $\alpha^{(k+1)}$ si k est pair).

Choix de $\Theta^{(1)}$ et $X^{(1)}$. On choisit arbitrairement $\Theta^{(1)} = (\alpha_1^{(1)}, \ldots \ldots, \alpha_n^{(1)}, \beta_1^{(1)}, \ldots, \beta_n^{(1)})$ avec les $\beta_j^{(1)}$ rationnels $(j = 1, 2, \ldots, n)$ non tous nuls, de façon à satisfaire (VII) et $(X)^{(1)}$ [3].

On en déduit $X^{(1)} = (0, v^{(1)}, w_1^{(1)}, \ldots, w_n^{(1)})$ tel que

$$\beta_j^{(1)} = w_j^{(1)}/v^{(1)} \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Choix de $l^{(1)}$. Les seules conditions imposées à $l^{(1)}$ étant $(\mathrm{II})^{(1)}$, $(\mathrm{VIII})^{(1)}$ et $(\mathrm{XI})^{(1)}$, choisissons $l^{(1)}$ assez petit pour les vérifier.

Dans la construction par récurrence supposons par exemple, k impair, le cas pair se traite de façon analogue.

Choix de $l^{(k)}$. Les seules conditions imposées à $l^{(k)}$ étant $(\mathrm{II})^{(k)}$, $(\mathrm{IV})^{(k)}$ et $(\mathrm{XI})^{(k)}$ choisissons $l^{(k)}$ assez petit pour les vérifier.

Choix de $\alpha^{(k+1)}$. Les seules conditions à satisfaire étant $(\mathrm{V})^{(k)}$ et $(\mathrm{IX})^{(k+1)}$, choisissons $\alpha_1^{(k+1)}, \ldots, \alpha_n^{(k+1)}$ rationnels de façon à les vérifier, ce choix est possible d'après le lemme 1. (Il y a même une infinité de solutions distinctes).

Choix de $X^{(k+1)}$. Choisissons $X^{(k+1)} \in \mathfrak{X}^{n+2}$ de façon à satisfaire à $(\mathrm{I})^{(k+1)}$ et $(\mathrm{XII})^{k}$ qui sont les seules conditions imposées à $X^{(k+1)}$.

Choix de $l'^{(k)}$. Les seules conditions imposées à $l'^{(k)}$ étant $(\mathrm{III})^{k}$ et $(\mathrm{XIII})^{k}$, choisissons $l'^{(k)}$ assez petit pour les vérifier.

Choix de $\beta^{(k+1)}$. Les seules conditions imposées à $\beta^{(k+1)}$ étant $(\mathrm{VI})^{k}$ et $(\mathrm{X})^{(k+1)}$, choisissons $\beta^{(k+1)}$ de façon à les vérifier, ce qui est possible d'après le lemme 1.

[3] Si $(\cdot)$ désigne un ensemble d'inégalités indexées, $(\cdot)^{(k)}$ désigne l'inégalité dont l'indice est k.

IV. Puissance du continu. Supposons que, dans la construction précédente, pour un indice k_0 impair (resp. pair), on choisisse deux solutions distinctes pour $a^{(k_0+1)}$ (resp. $\beta^{(k_0+1)}$), soient $a'^{(k_0+1)}$ et $a''^{(k_0+1)}$ (resp. $\beta'^{(k_0+1)}$, $\beta''^{(k_0+1)}$). Ceci nous permet de construire, comme il a été indiqué plus haut, deux suites distinctes $(\Theta'^{(k)})$ et $(\Theta''^{(k)})$. Si dans le choix de $l^{(k_0+1)}$ nous imposons, en plus, la condition:

$$l^{(k_0+1)} < |a'^{(k_0+1)}, a''^{(k_0+1)}| \qquad (\text{resp. } |\beta'^{(k_0+1)}, \beta''^{(k_0+1)}|)$$

alors d'après (3), les deux systèmes Θ' et Θ'', limites respectives de ces deux suites sont distincts.

Ce double choix pouvant être fait pour chaque valeur de k, un raisonnement classique permet d'affirmer que l'ensemble des systèmes satisfaisant aux conditions de l'énoncé a la puissance du continu.

Travaux cités

[1] V. Jarník, *Eine Bemerkung über diophantische Approximationen*, Math. Zeitschr. 72 (1959), p. 187-191.

[2] J. Lesca, *Sur un résultat de Jarník*, Acta Arith., ce volume, pp. 359-364.

[3] E. Lutz, *Sur les approximations diophantiennes linéaires p-adiques*, Paris 1955.

[4] K. Mahler, *Lectures on diophantine approximations*, University of Notre-Dame (1961).

Reçu par la Rédaction le 28. 4. 1965

INSTYTUT MATEMATYCZNY POLSKIEJ AKADEMII NAUK

ACTA ARITHMETICA

XI. 4

WARSZAWA 1966
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE