Finally, if $\zeta(t)$ is not identically 0, we take

$$x(t) = \frac{C(t)}{D(t)}\cdot\frac{\xi(t)}{\zeta(t)}, \qquad y(t) = \frac{C(t)}{D(t)}\cdot\frac{\eta(t)}{\zeta(t)}$$

and obtain the same identity.

References

[1] H. Davenport, *The Higher Arithmetic*, London 1952.
[2] H. Davenport, D. J. Lewis and A. Schinzel, *Polynomials of certain special types*, Acta Arith. 9 (1964), pp. 107-116.
[3] E. Hecke, *Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen*, Leipzig 1923.
[4] A. Schinzel, *Some unsolved problems on polynomials*, Matematicka Biblioteka 25 (1963), pp. 67-70.
[5] — *On Hilbert's irreducibility theorem*, Ann. Polon. Math. 16 (1965), pp. 333-340.

Reçu par la Rédaction le 19. 3. 1965

ACTA ARITHMETICA
XI (1966)

Sur un résultat de Jarník

par

J. Lesca (Grenoble)

Dans cet article, tous les nombres considérés sont réels. Dans l'article suivant, nous étudierons des problèmes analogues p-adiques.

I. Introduction. Dans un article [1] paru en 1959, V. Jarník démontre l'existence, dans certains cas, de systèmes libres(¹) admettant une approximation continuelle donnée; il obtient:

„Etant donnés deux entiers m et $n \geqslant 1$, $m+n > 2$ et une fonction d'approximation $\varphi(t)$, soit M_{mn} l'ensemble des (n, m)-systèmes Θ tels que:

Θ est libre,

Θ admet l'approximation continuelle $\varphi(t)$.

Alors M_{mn} n'est pas vide dans les cas suivants:

$m \geqslant 2$,

$m = 1$ et $\lim\limits_{t\to\infty} \{t\varphi(t)\} = +\infty$.

Plus précisément, dans chacun des cas précédents, si G est un ouvert non vide de $\mathscr{R}^{mn}$, la projection sur chacun des axes de $G \cap M_{mn}$ a la puissance du continu".

Dans le cas d'une signature $(m, 1)$ $(m \geqslant 2)$, nous démontrons un résultat qui complète le précédent.

Théorème. *Etant donnés un entier $n > 1$ et une fonction d'approximation $\varphi(t)$ telle que $\limsup\limits_{t\to\infty}\{t\varphi(t)\} = +\infty$, soit M_n l'ensemble des $(1, n)$-systèmes Θ tels que:*

Θ est libre,

Θ admet l'approximation continuelle $\varphi(t)$.

Alors M_n n'est pas vide; plus précisément si G est un ouvert non vide de $\mathscr{R}^n$ la projection sur chacun des axes de $M_n \cap G$ a la puissance du continu.

(¹) Pour les définitions et notations, se reporter au § II.

D'après un résultat ancien de Jarník (voir [1]) la condition $\limsup_{t\to\infty}\{t\varphi(t)\} = +\infty$ est une condition nécessaire pour qu'il existe des $(1, n)$-systèmes linéairement libres(²) ($n \geqslant 2$), admettant une approximation continuelle donnée $\varphi(t)$.

Compte tenu du théorème, cette condition est nécessaire et suffisante pour l'existence de systèmes „libres".

II. Definitions et notations. Un *(m, n)-système Θ* ou système de *signature* (m, n) est un ensemble de mn nombres réels θ_{ij} $(i = 1, \dots, n;$ $j = 1, \dots, m)$. Pour $m = 1$ nous poserons $\theta_{i_1} = \theta_i$ et $\Theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$.

Nous représenterons les $(1, n)$-systèmes par des points de $\mathscr{R}^n$, nous utiliserons dans cet espace la distance:

$$|\Theta', \Theta''| = \operatorname*{Max}_{1\leqslant i\leqslant n}\{|\theta_i' - \theta_i''|\}.$$

Nous dirons qu'un (m, n)-système Θ est *libre* si les nombres θ_{ij} ne satisfont à aucune équation de la forme $F(y) = F(y_1, \dots, y_{mn}) = 0$ où F désigne un polynôme à mn indéterminées, à coefficients entiers, non identiquement nul.

Etant donné une suite de $m+n$ entiers $q_1, \dots, q_m, u_1, \dots, u_n$ nous posons:

$$X = (q_1, \dots, q_m, u_1, \dots, u_n),$$

$$h(X) = \operatorname{Max}\{|q_1|, \dots, |q_m|\},$$

$$L_\Theta(X) = \operatorname*{Max}_{1\leqslant i\leqslant n}\Big\{\Big|\sum_{j=1}^{m}\theta_{ij}q_j - u_i\Big|\Big\}$$

et pour $t\in\mathscr{N}$(³):

$$\psi_\Theta(t) = \operatorname*{Min}_{0<h(x)\leqslant t}\{L_\Theta(X)\}.$$

Une *fonction d'approximation* $\varphi(t)$ est une fonction définie sur $\mathscr{N}$, à valeurs réelles positives, non croissante.

Nous dirons qu'un *(m, n)-système Θ admet l'approximation continuelle* $\varphi(t)$ si: $\psi_\Theta(t) \leqslant \varphi(t)$ pour tout t assez grand.

III. Préliminaires à la démonstration. La démonstration qui va suivre est inspirée par celle de Jarník [1]. Comme lui, nous construirons un système appartenant à M_n à partir d'une suite

$$X^{(i)} = (q^{(i)}, u_1^{(i)}, \dots, u_n^{(i)}) \in \mathscr{Z}^{n+1} \qquad (i = 1, 2, \dots)\text{(⁴)}.$$

(²) Pour définir „linéairement libre" on remplace dans la définition de système libre le mot „polynôme" par „polynôme du premier degré".

(³) $\mathscr{N}$ ensemble des entiers naturels: $1, 2, \dots$

(⁴) $\mathscr{Z}$ ensemble de tous les entiers.

Rangeons tous les polynômes à n indéterminées, à coefficients entiers, non identiquement nuls, en une suite $F^{(1)}, F^{(2)}, \dots$ telle que pour tout indice $i\in\mathscr{N}$ le degré de $F^{(i)}$ par rapport à chacune des variables soit égal ou inférieur à i. Soit $S^{(i)}$ l'hypersurface définie dans $\mathscr{R}^n$ par $F^{(i)} = 0$.

Nous utiliserons les deux lemmes suivants dont le premier figure déjà dans [1] et ne sera pas démontré ici.

LEMME 1. *Soit $F(y) = F(y_1, \dots, y_n)$ un polynôme à n indéterminées non identiquement nul et dont le degré par rapport à chacune des variables est égal ou inférieur à r. Considérons $r+1$ valeurs distinctes de chacune des variables: y_{ij} $(i = 1, \dots, n;\ j = 0, \dots, r)$. Alors il existe $y = (y_{1j_1}, \dots, y_{nj_n})$, $j_1, \dots, j_r\in\{0, \dots, r\}$, tel que: $F(y) \neq 0$.*

LEMME 2. *Soient $\varphi(t)$ une fonction d'approximation, Θ un $(1, n)$-système; si $X^{(i)} = (q^{(i)}, u_1^{(i)}, \dots, u_n^{(i)})$ est une suite de points de $\mathscr{Z}^{n+1}$ telle que:*

$$q^{(1)} > 0, \quad q^{(i+1)} > q^{(i)} \quad (i = 1, 2, \dots),$$

$$L_\Theta(X^{(i)}) \leqslant \varphi(q^{(i+1)}) \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Alors:

$$\psi_\Theta(t) \leqslant \varphi(t) \quad \text{pour} \quad t \geqslant q^{(1)}.$$

Démonstration. Pour tout $t \geqslant q^{(1)}$ il existe un indice r tel que:

$$q^{(r)} \leqslant t < q^{(r+1)}.$$

Alors:

$$\psi_\Theta(t) \leqslant L_\Theta(X^{(r)}) \leqslant \varphi(q^{(r+1)}) \leqslant \varphi(t) \qquad \text{c.q.f.d.}$$

IV. Démonstration de l'existence des systèmes.

a) *Suites* $(\Theta^{(i)})$ *et* $(\eta^{(i)})$. A $X^{(i)} = (q^i, u_1^{(i)}, \dots, u_n^{(i)})$ on fait correspondre

$$\text{(I)} \qquad \Theta^{(i)} = (u_1^{(i)}/q^{(i)}, \dots, u_n^{(i)}/q^{(i)}) \quad (i = 1, 2, \dots),$$

$\Theta^{(i)}$ est évidemment tel que $L_{\Theta^{(i)}}(X^{(i)}) = 0$ $(i\in\mathscr{N})$.

Nous obtiendrons le $(1, n)$-système Θ remplissant les conditions de l'énoncé, comme limite de la suite $(\Theta^{(i)})$.

Remarquons la propriété suivante: si une suite de nombres positifs $(\eta^{(i)})$ est telle que:

$$\text{(II)} \qquad |\Theta^{(i)}, \Theta^{(i+1)}| \leqslant \eta(i) \quad (i = 1, 2, \dots),$$

$$\text{(III)} \qquad \eta^{(i)} < \tfrac{1}{2}\eta^{(i-1)} \quad (i = 2, 3, \dots),$$

alors,

(1) la suite $\Theta^{(i)}$ converge vers une limite Θ,

$$\text{(2)} \qquad |\Theta, \Theta^{(i)}| < 2\eta^{(i)} \quad (i = 1, 2, \dots),$$

$$\text{(3)} \qquad L_\Theta(X^{(i)}) < 2q^{(i)}\eta^{(i)} \quad (i = 1, 2, \dots).$$

Pour des raisons qui seront claires plus loin, on prend

(IV) $$\eta^{(i)} = (i+2)/q^{(i+1)} \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

et on impose la condition suivante qui sera utilisée seulement dans le § V

(V) $$\eta^{(i)} < 1/4q^{(i)} \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

b) *Conditions que vérifiera la construction.* Ajoutons les conditions suivantes:

(VI) $$\Theta^{(1)} \epsilon G \qquad (G \text{ ouvert donné, } \epsilon \mathscr{R}^n),$$

$\eta^{(1)}$ assez petit pour que pour tout système Θ:

(VII) $$|\Theta, \Theta^{(1)}| < 2\eta^{(1)} \Rightarrow \Theta \epsilon G.$$

(VIII) $$\Theta^{(i)} \notin S^{(i)} \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

$\eta^{(i)}$ assez petit pour que pour tout système Θ:

(IX) $$|\Theta, \Theta^{(i)}| < 2\eta^{(i)} \Rightarrow \Theta \notin S^{(i)} \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

(X) $$q^{(1)} > 0,$$

(XI) $$q^{(i+1)} > q^{(i)} \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

(XII) $$2q^{(i)}\eta^{(i)} \leqslant \varphi(q^{(i+1)}) \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Si des suites $(X^{(i)})$, $(\Theta^{(i)})$, $(\eta^{(i)})$ vérifient les conditions (I), ..., (XII) alors le système Θ limite de la suite $\Theta^{(i)}$ (qui existe d'après (1)) satisfait aux conditions de l'énoncé. En effet:

$\Theta \epsilon G$ d'après (2) et (VII),

Θ est libre d'après (2) et (IX),

$L_\Theta(t) \leqslant \varphi(t)$ pour $t \geqslant q^{(1)}$ puisque (X), (XI), (3) et (XII) assument les hypothèses du lemme 2.

Nous allons maintenant construire par récurrence les 3 suites $(X^{(i)})$, $(\Theta^{(i)})$, $(\eta^{(i)})$ satisfaisant aux conditions (I), ..., (XII).

c) *Construction.* Nous choisissons dans l'ordre:

$$X^{(1)}, q^{(2)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(i)}, q^{(i+1)}, X^{(i+1)}, \ldots$$

Choix de $X^{(1)}$. Les seules conditions imposées étant $(\mathrm{I})^{(1)}$, (VI), $(\mathrm{VIII})^{(1)}$ et (X)[5], nous choisissons $\Theta^{(1)}$ à coordonnées rationnelles satisfaisant à (VI) et $(\mathrm{VIII})^{(1)}$, nous en déduisons $X^{(1)} = (q^{(1)}, u_1^{(1)}, \ldots, u_n^{(1)})$ en prenant $q^{(1)} > 0$.

[5] Lorsque (u) désigne un ensemble de relations indexées, $(u)^{(i)}$ désigne celle de ces relations dont l'indice est précisément i.

Choix de $q^{(i+1)}$. Supposons $X^{(1)}, \ldots, X^{(i)}$ déterminés; il est immédiat que, compte tenu de $(\mathrm{IV})^{(i)}$ pour satisfaire en même temps à (VII) si $i = 1$, $(\mathrm{III})^{(i)}$ si $i > 1$, $(\mathrm{IX})^{(i)}$ et $(\mathrm{XI})^{(i)}$ il suffit de prendre $q^{(i+1)} \geqslant q_0^{(i+1)}$ pour une certaine constante $q_0^{(i+1)}$, fonction de $X^{(i)}$.

Toutes les conditions imposées seront remplies si nous choisissons $q^{(i+1)} \epsilon \mathscr{Z}$ tel que:

(4) $$q^{(i+1)} \geqslant q_0^{(i+1)},$$

(5) $$q^{(i+1)}\varphi(q^{(i+1)}) \geqslant 2(i+2)q^{(i)}$$

(on remarque que (5) et $(\mathrm{IV})^{(i)}$ entraînent $(\mathrm{XII})^{(i)}$).

A cause de l'hypothèse „$\limsup_{t\to\infty}\{t\varphi(t)\} = \infty$", le système des deux inégalités précédentes admet une infinité de solutions en $q^{(i+1)} \epsilon \mathscr{Z}$; nous en choisissons une arbitraire.

Choix de $X^{(i+1)}$. Supposons $X^{(1)}, \ldots, X^{(i)}$, $q^{(i+1)}$, déterminés. Les seules conditions que doit remplir $X^{(i+1)}$ sont $(\mathrm{II})^{(i)}$ et $(\mathrm{IX})^{(i+1)}$; $(\mathrm{II})^{(i)}$ sera satisfaite si les $u_j^{(i+1)}$ $(j = 1, \ldots, n)$ satisfont à l'un ou l'autre des deux systèmes suivants:

(6)+ $$u_j^{(i)}/q^{(i)} < u_j^{(i+1)}/q^{(i+1)} \leqslant u_j^{(i)}/q^{(i)} + \eta^{(i)} = u_j^{(i)}/q^{(i)} + (i+2)/q^{(i+1)} \qquad (j = 1, \ldots, n),$$

(6)− $$u_j^{(i)}/q^{(i)} - (i+2)/q^{(i+1)} = u_j^{(i)}/q^{(i)} - \eta^{(i)} \leqslant u_j^{(i+1)}/q^{(i+1)} < u_j^{(i)}/q^{(i)} \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

Pour tout $j \epsilon \{1, \ldots, n\}$, $(6)_+^{(j)}$ (resp. $(6)_-^{(j)}$) admet exactement $i+2$ solutions distinctes en entiers $u_j^{(i+1)}$ et d'après le lemme 1, puisque le degré de $F^{(i+1)}$ est inférieur à $i+2$ on peut choisir une solution $(u_{1+}^{(i+1)}, \ldots, u_{n+}^{(i+1)})$ (resp $(u_{1-}^{(i+1)}, \ldots, u_{n-}^{(i+1)})$) satisfaisant au système (6)+ (resp (6)−) à laquelle correspond $\Theta_+^{(i+1)}$ (resp $\Theta_-^{(i+1)}$) n'appartenant pas à $S^{(i+1)}$. (L'intérêt de construire deux systèmes apparaîtra dans le § V). Remarquons que $\Theta_+^{(i+1)}$ et $\Theta_-^{(i+1)}$ sont distincts et même que .

(7) $$|u_{j+}^{(i+1)}/q^{(i+1)} - u_{j-}^{(i+1)}/q^{(i+1)}| \geqslant 1/q^{(i+1)} \qquad (j = 1, \ldots, n).$$

V. Puissance de l'ensemble M_n. Considérons deux suites $(X^{(i)})$ et $(X'^{(i)})$ constitues comme il a été dit plus haut et telles que les i premiers éléments sont les mêmes $(X^{(j)} = X'^{(j)}\ (j = 1, \ldots, i))$ tandis que les termes de rang $i+1$ sont

$$X^{(i+1)} = X_+^{(i+1)} \quad \text{et} \quad X'^{(i+1)} = X_-^{(i+1)}.$$

Soient, respectivement, Θ et Θ' les systèmes obtenus à partir de ces deux suites. Alors Θ et Θ' ont chacune de leurs coordonnées distinctes.

En effet, d'après $(2)^{(i+1)}$ et $(V)^{(i)}$ on a:

$$(8)+ \qquad |\Theta, \Theta_{+}^{(i+1)}| < 1/2q^{(i+1)},$$

$$(8)- \qquad |\Theta', \Theta_{-}^{(i+1)}| < 1/2q^{(i+1)}$$

la propriété se déduit alors aisément de (7).

L'ensemble des suites $(X^{(i)})$ qu'on construit par le procédé du § IV à partir d'un premier élément $X^{(1)}$ a la puissance du continu; et comme à deux suites distinctes correspondent deux systèmes dont les projections sur chaque axe sont distinctes, le théorème est complètement démontre.

Travaux cités

[1] V. Jarník, *Eine Bemerkung über diophantische Approximationen*, Math. Zeitschr. 72 (1959), p. 187-191, où on trouvera un historique du problème et des références.

Reçu par la Rédaction le 28. 4. 1965

ACTA ARITHMETICA
XI (1966)

Existence de systèmes p-adiques admettant une approximation donnée

par

J. Lesca (Grenoble)

Le but de cet article est de démontrer l'analogue p-adique d'un théorème démontré par V. Jarník dans le cas réel [1].

I. Introduction.

Définitions et notations. Soit Q_p un corps de nombres p-adiques. Dans l'espace vectoriel $Q_p r$ de dimension r sur Q_p, nous prendrons comme *distance de deux points* $y = (y_1, \ldots, y_r)$, $y' = (y'_1, \ldots, y'_r)$:

$$|y, y'| = \operatorname*{Max}_{1\leqslant i\leqslant r}\{|y_i - y'_i|_p\}.$$

Un (m, n)-*système* Θ est un ensemble de mn nombres p-adiques θ_{ji} $(i = 1, \ldots, m;\ j = 1, \ldots, n)$. Un (m, n)-système est identifié à un point de Q_p^{mn}. Un (m, n)-système Θ est dit *libre* si les θ_{ji} ne satisfont à aucune relation de la forme

$$F(y) = F(y_1, \ldots, y_{mn}) = 0$$

où F désigne un polynôme à mn indéterminées, à coefficients entiers rationnels, non identiquement nul.

Soit $X = (u_1, \ldots, u_m, w_1, \ldots, w_n) \in \mathcal{Z}^{m+n}$ [1] une suite de $m+n$ entiers rationnels, on pose:

$$h(X) = \operatorname*{Max}_{\substack{1\leqslant i\leqslant m\\ 1\leqslant j\leqslant n}}\{|u_i|, |w_j|\},$$

$$L_\Theta(X) = \operatorname*{Max}_{1\leqslant j\leqslant n}\left\{\left|\sum_{i=1}^{m}\theta_{ji}u_i - w_j\right|_p\right\}$$

et pour $t \in \mathcal{N}$ [2]:

$$\psi_\Theta(t) = \operatorname*{Min}_{0<h(X)\leqslant t}\{L_\Theta(X)\}.$$

[1] Ensemble de tous les entiers.
[2] $\mathcal{N}$ ensemble des entiers naturels: $1, 2, \ldots$