[11] E. Meissel, *Ueber die Bestimmung der Primzahlenmenge innerhalb gegebener Grenzen*, Math. Ann. 2 (1870), pp. 636 - 642.

[12] J. B. Rosser and L. Schoenfeld, *Approximate formulas for some functions of prime numbers*, Illinois J. Math. 6 (1962), pp. 64 - 94.

[13] A. Selberg, *On an elementary method in the theory of primes*, Norske Vid. Selsk. Forh., Trondhjem 19 (18), (1947), pp. 64 - 67.

[14] — *On elementary methods in prime number theory and their limitations*, 11. Skand. Mat. Kongr., Trondhjem 1949, pp. 13-22.

[15] — *The general sieve-method and its place in prime number theory*, Proc. Int. Congr. Math., Cambridge, Mass. 1 (1950), pp. 286-292.

[16] S. Uchiyama, *On the distribution of almost primes in an arithmetic progression*, J. Fac. Sci., Hokkaidô Univ., Ser. I, 18 (1964), pp. 1-22.

[17] А. И. Виноградов, *О числах с малыми простыми делителями*, ДАНСССР 109 (1956), pp. 683-686.

[18] Y. Wang, *On sieve methods and some of their applications*, Science Record (N. S.) 1 (3) (1957), pp. 1-5.

[19] — *On sieve methods and some of their applications*, Acta Math. Sinica 9 (1959), pp. 87-100 (Chinese) = Scientia Sinica 11 (1962), pp. 1607-1624.

Reçu par la Rédaction le 16. 12. 1964

ACTA ARITHMETICA
XI (1965)

Sur un théorème de Rényi

par

H. Delange (Paris)

1. Introduction. Désignons par $\omega(n)$ le nombre des diviseurs premiers de l'entier positif n et par $\Omega(n)$ le nombre total des facteurs dans la décomposition de n en facteurs premiers. Autrement dit, soient ω et Ω les fonctions de l'entier positif n définies de la façon suivante:

$$\omega(1) = \Omega(1) = 0$$

et, si $n = p_1^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_k^{a_k}$, où $p_1, p_2, \dots, p_k$ sont des nombres premiers distincts et $a_1, a_2, \dots, a_k$ des entiers >0,

$$\omega(n) = k \quad \text{et} \quad \Omega(n) = a_1+a_2+\dots+a_k.$$

Il est clair que l'on a toujours $\Omega(n) \geqslant \omega(n)$, l'égalité ayant lieu pour les entiers "quadratfrei".

Rényi a montré ([4]) que, pour chaque entier $q \geqslant 0$, l'ensemble des n pour lesquels on a $\Omega(n)-\omega(n) = q$ possède une densité d_q, la suite des nombres d_q étant déterminеé par le fait que, pour $|z| < 2$,

$$\sum_{q=0}^{+\infty} d_q z^q = \prod \left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{1}{p-z}\right) = \frac{6}{\pi^2}\prod \frac{1-z/(p+1)}{1-z/p},$$

où p parcourt la suite des nombres premiers(¹).

Pour $q = 0$, on retrouve le fait bien connu que l'ensemble des entiers positif "quadratfrei" possède une densité égale à $6/\pi^2$.

En ce qui concerne les entiers "quadratfrei", Landau a montré ([3]) que le théorème des nombres premiers, sous la forme $\overline{\omega}(x) \sim x/\log x$, entraîne le résultat suivant:

Si $Q(x)$ est le nombre de ces entiers au plus égaux à x, on a pour x infini:

$$Q(x) = \frac{6}{\pi^2}x + o[x^{1/2}].$$

(¹) Tout au long de cet article, dans toute somme ou tout produit portant sur une expression où figure p, il est entendu que p parcourt la suite des nombres premiers.

Nous nous proposons ici de montrer que le fait que la fonction $\zeta(s)$ de Riemann n'a aucun zéro de partie réelle égale à 1 entraîne le résultat suivant, qui précise celui de Rényi et généralise celui de Landau:

THÉORÈME. *Soit $\nu_q(x)$ le nombres des $n \leqslant x$ pour lesquels on a*

$$\Omega(n) - \omega(n) = q \qquad (q \text{ entier } \geqslant 0).$$

On a pour x infini:

$$\nu_q(x) = d_q x + o[x^{1/2}(\log\log x)^q].$$

Le cas particulier de ce théorème correspondant à $q = 1$ a été établi récemment par E. Cohen ([1]).

2. Préliminaires.

2.1. Nous aurons besoin de deux lemmes.

2.1.1. LEMME 1. *Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ une suite de nombres réels ou complexes.*

Supposons que, lorsque x tend vers $+\infty$,

$$\sum_{n\leqslant x} |a_n| = O[\Phi(x)] \quad \text{et} \quad \sum_{n\leqslant x} a_n = o[\Phi(x)],$$

où Φ est une fonction réelle définie pour x positif assez grand, croissante pour x positif assez grand, tendant vers $+\infty$ avec x, et telle que

$$\lim_{\lambda\to+0}\left\{\overline{\lim_{x\to+\infty}}\frac{\Phi(\lambda x)}{\Phi(x)}\right\} = 0.$$

Alors, si φ est une fonction réelle ou complexe définie pour $t \geqslant 1$, bornée pour $t \geqslant 1$ et à variation bornée sur tout intervalle fini, on a lorsque x tend vers $+\infty$

$$\sum_{n\leqslant x} a_n \varphi\left(\frac{x}{n}\right) = o[\Phi(x)].$$

Nous supposerons que Φ est croissante pour $x \geqslant x_0$ et $\Phi(x_0) > 0$, avec $x_0 > 0$.

Nous supposerons par ailleurs que

$$|\varphi(t)| \leqslant M \quad \text{pour tout} \quad t \geqslant 1,$$

et nous désignerons par $V(t)$ la variation de la fonction φ sur l'intervalle $[1, t]$.

Nous poserons, pour $x \geqslant 1$,

$$A(x) = \sum_{n\leqslant x} a_n, \qquad A^*(x) = \sum_{n\leqslant x} |a_n|,$$

et

$$\mathscr{A}(x) = \sup_{1\leqslant t\leqslant x} |A(t)|.$$

Ainsi, il existe une constante positive K telle que

$$A^*(x) \leqslant K\Phi(x) \quad \text{pour} \quad x \geqslant x_0,$$

$\mathscr{A}$ est positive ou nulle et croissante pour $x \geqslant 1$, et, quand x tend vers $+\infty$,

$$\mathscr{A}(x) = o[\Phi(x)].$$

Ceci dit, fixons un $\lambda > 0$ et < 1 et supposons

$$x \geqslant \operatorname{Max}\left[\frac{x_0}{\lambda}, \frac{2}{1-\lambda}\right].$$

On peut écrire

$$\sum_{n\leqslant x} a_n \varphi\left(\frac{x}{n}\right) = \sum_{n\leqslant \lambda x} a_n \varphi\left(\frac{x}{n}\right) + \sum_{\lambda x < n \leqslant x} a_n \varphi\left(\frac{x}{n}\right).$$

On a évidemment

$$\left|\sum_{n\leqslant \lambda x} a_n \varphi\left(\frac{x}{n}\right)\right| \leqslant MA^*(\lambda x) \leqslant MK\Phi(\lambda x).$$

Par ailleurs, en désignant par n_1 et n_2 les parties entiéres de λx et x, on a $n_2 \geqslant n_1 + 2$ et on peut écrire

$$\sum_{\lambda x < n \leqslant x} a_n \varphi\left(\frac{x}{n}\right) = \sum_{n_1+1}^{n_2} [A(n) - A(n-1)]\varphi\left(\frac{x}{n}\right)$$

$$= A(n_2)\varphi\left(\frac{x}{n_2}\right) - A(n_1)\varphi\left(\frac{x}{n_1+1}\right) + \sum_{n_1+1}^{n_2-1} A(n)\left[\varphi\left(\frac{x}{n}\right) - \varphi\left(\frac{x}{n+1}\right)\right],$$

d'où

$$\left|\sum_{\lambda x < n \leqslant x} a_n \varphi\left(\frac{x}{n}\right)\right| \leqslant \mathscr{A}(x)\left[\left|\varphi\left(\frac{x}{n_2}\right)\right| + \left|\varphi\left(\frac{x}{n_1+1}\right)\right| + \sum_{n_1+1}^{n_2-1}\left|\varphi\left(\frac{x}{n}\right) - \varphi\left(\frac{x}{n+1}\right)\right|\right].$$

Le $\sum$ du second membre étant au plus égal à la variation de la fonction φ sur l'intervalle $[x/n_2, x/(n_1+1)]$, contenu dans l'intervalle $[1, 1/\lambda]$, on a

$$\left|\sum_{\lambda x < n \leqslant x} a_n \varphi\left(\frac{x}{n}\right)\right| \leqslant \left[2M + V\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]\mathscr{A}(x).$$

Finalement, on voit que, si $0 < \lambda < 1$, on a pour $x \geqslant \operatorname{Max}\left[\frac{x_0}{\lambda}, \frac{2}{1-\lambda}\right]$

$$\left|\sum_{n\leqslant x} a_n \varphi\left(\frac{x}{n}\right)\right| \leqslant MK\Phi(\lambda x) + \left[2M + V\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right]\mathscr{A}(x),$$

et par suite on a

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{1}{\Phi(x)} \left| \sum_{n\leqslant x} a_n \varphi\left(\frac{x}{n}\right) \right| \leqslant MK \overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{\Phi(\lambda x)}{\Phi(x)}.$$

On obtient le résultat annoncé en faisant tendre λ vers zéro.

2.1.2. Lemme 2. *Soit la série de Dirichlet $\sum_1^{+\infty}(u_n/n^s)$, où les u_n sont réels $\geqslant 0$.*

Supposons qu'elle soit convergente pour $\Re s > a$, où $a > 0$, avec pour somme $h(s)$.

Supposons en outre que la fonction h soit holomorphe en tous les points de la droite $\Re s = a$ autres que a et que, lorsque s tend vers a dans la demi-plan $\Re s > a$,

$$h(s) = (s-a)^{-1} \sum_{j=0}^{q} \lambda_j \left(\log\frac{1}{s-a}\right)^j + O\left[\left(\log\frac{1}{r}\right)^q\right],$$

avec $r = |s-a|$, λ_q étant $\neq 0$ et $\log(1/(s-a))$ étant pris avec sa valeur principale.

Alors on a pour x infini

$$\sum_{n\leqslant x} u_n \sim \frac{\lambda_q}{a} x^a (\log\log x)^q.$$

Ce lemme se déduit immédiatement du théorème 1 de notre mémoire *Généralisation du théorème de Ikehara* ([2]) compte-tenu des lemmes 3 et 5 de ce mémoire.

Remarquons d'abord que $\lambda_q > 0$ car $h(s) > 0$ pour s réel $> a$, et, quand s tend vers a par valeur supérieures,

$$h(s) \sim \lambda_q (s-a)^{-1}\left(\log\frac{1}{s-a}\right)^q.$$

Par ailleurs, on a pour $\Re s > a$

$$h(s) = s\int_0^{+\infty} e^{-st}\alpha(t)\,dt, \qquad \text{où} \qquad \alpha(t) = \sum_{\log n\leqslant t} u_n.$$

Si l'on pose

$$f(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}\alpha(t)\,dt = \frac{1}{s}h(s),$$

on voit que f est holomorphe en tous les points de la droite $\Re s = a$ autres que a, et que l'on a quand s tend vers a dans le demi-plan $\Re s > a$

$$f(s) = \frac{1}{a}(s-a)^{-1} \sum_{j=0}^{q} \lambda_j \left(\log\frac{1}{s-a}\right)^j + O\left[\left(\log\frac{1}{r}\right)^q\right].$$

On voit ensuite que les hypothèses du théorème cité sont satisfaites en prenant

$$p = 0, \qquad \beta(t) = \frac{1}{a}\sum_{j=0}^{q} \lambda_j \beta_{1,j}(t),$$

où les fonctions $\beta_{1,j}$ sont celles définies dans le lemme 5,

$$A = 1, \qquad \gamma(u) = \frac{a}{\lambda_q}\left(\log\frac{1}{u}\right)^{-q} \qquad \text{et} \qquad \psi(t) = 1.$$

En effet, d'abord $\alpha(t)$ est $\geqslant 0$ et croissante pour $t \geqslant 0$. Ensuite, on a d'après le lemme 5

$$G(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}\beta(t)\,dt = \frac{1}{a}s^{-1}\sum_{j=0}^{q}\lambda_j\left(\log\frac{1}{s}\right)^j + \textit{fonction entière de } s.$$

De plus, quand t tend vers $+\infty$,

$$\beta(t) \sim \frac{\lambda_q}{a}(\log t)^q$$

et, d'après le lemme 3,

$$\int_0^{+\infty} e^{-tu}\gamma(u)\,du \sim \frac{a}{\lambda_q}t^{-1}(\log t)^{-q}.$$

On peut donc conclure que, quand t tend vers $+\infty$

$$\alpha(t) \sim e^{at}\beta(t) \sim \frac{\lambda_q}{a}e^{at}(\log t)^q,$$

ce qui est évidemment équivalent au résultat annoncé.

2.2. Considérons maintenant le produit infini

$$\prod\left(1+\frac{u}{p^s(p^s-v)}\right),$$

où s, u et v sont trois variables complexes.

2.2.1. Tout d'abord, on voit aisément que, pour $\Re s > \frac{1}{2}$ et $|v| < 2^{\Re s}$ ce produit est absolument convergent et sa valeur, que nous désignerons par $G(s, u, v)$, est égale à la somme de la série absolument convergente

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{g_n(u, v)}{n^s},$$

où $g_n(u, v)$ est defini de la façon suivante:

1. $g_0(u, v) = 1$

2. Si n est >1 et est un produit de puissances de nombres premiers d'exposants $\geqslant 2$,

$$g_n(u, v) = u^{\omega(n)} v^{\Omega(n)-2\omega(n)};$$

3. Si n est >1 et n'est pas de cette forme

$$g_n(u, v) = 0.$$

2.2.2. On voit que $g_n(z-1, z)$ et $g_n(z+1, z)$ sont toujours des polynomes en z à coefficients réels, de degré $\leqslant \Omega(n)-\omega(n)$.

On peut écrire

$$g_n(z-1, z) = \sum_{q=0}^{+\infty} a_{n,q} z^q,$$

où les $a_{n,q}$ sont réels et $a_{n,q} = 0$ pour $q > \Omega(n)-\omega(n)$.

On voit alors que

$$g_n(z+1, z) = \sum_{q=0}^{+\infty} |a_{n,q}| z^q.$$

2.2.3. Soit maintenant Δ un domaine simplement connexe contenant le demi-plan fermé $\Re s \geqslant \frac{1}{2}$, contenu dans le demi-plan ouvert $\Re s > \frac{1}{3}$, et tel que $\zeta(2s) \neq 0$ pour $s \in \Delta$.

L'existence d'un tel domaine est assurée par le seul fait que $\zeta(s) \neq 0$ pour $\Re s \geqslant 1$.

Nous allons voir qu'il existe une fonction $\mathscr{G}(s, u, v)$ holomorphe en s, u et v pour $s \in \Delta$ et $|v| < 2^{\Re s}$ telle que, pour $\Re s > \frac{1}{2}$ et $|v| < 2^{\Re s}$,

$$G(s, u, v) = \mathscr{G}(s, u, v) \exp\left[u \log \frac{1}{s-\frac{1}{2}}\right], \tag{1}$$

où $\log\left(1/(s-\frac{1}{2})\right)$ est pris avec sa valeur principale.

En effet, pour $\Re s > \frac{1}{2}$ et $|v| < 2^{\Re s}$,

$$G(s, u, v) = \left\{\prod \left[1+\frac{u}{p^s(p^s-v)}\right] \exp\left[-\frac{u}{p^s(p^s-v)}\right]\right\} \times$$
$$\times \exp\left[uv \sum \frac{1}{p^{2s}(p^s-v)}\right] \exp\left[u \sum \frac{1}{p^{2s}}\right].$$

On voit que le produit infini

$$\prod \left[1+\frac{u}{p^s(p^s-v)}\right] \exp\left[-\frac{u}{p^s(p^s-v)}\right]$$

est absolument convergent sur l'ensemble des points (s, u, v) tels que $\Re s > \frac{1}{4}$ et $|v| < 2^{\Re s}$, la convergence étant uniforme sur tout ensemble compact contenu dans celui-ci, donc représente une fonction de s, u et v holomorphe pour $\Re s > \frac{1}{4}$ et $|v| < 2^{\Re s}$.

De même, la série $\sum \left(1/p^{2s}(p^s-v)\right)$ représente une fonction de s et v holomorphe pour $\Re s > \frac{1}{3}$ et $|v| < 2^{\Re s}$.

Enfin, la fonction égale à $(s-\frac{1}{2})\zeta(2s)$ étant holomorphe et non nulle dans Δ, et réelle >0 pour s réel $>\frac{1}{2}$, il existe une fonction l holomorphe dans Δ, réelle pour s réel $>\frac{1}{2}$ et telle que, pour $s \in \Delta$,

$$(s-\tfrac{1}{2})\zeta(2s) = \exp[l(s)].$$

Comme, pour $\Re s > \frac{1}{2}$,

$$\zeta(2s) = \prod \frac{1}{1-1/p^{2s}} = \exp\left\{\sum_p \left(\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{jp^{2js}}\right)\right\},$$

on voit que, pour $\Re s > \frac{1}{2}$,

$$l(s) = -\log \frac{1}{s-\frac{1}{2}} + \sum_p \left(\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{jp^{2js}}\right),$$

d'où

$$\sum \frac{1}{p^{2s}} = \log \frac{1}{s-\frac{1}{2}} + l(s) - \sum_{j>1} \frac{1}{jp^{2js}}.$$

La série double $\sum_{j>1} (1/jp^{2js})$ représente une fonction holomorphe pour $\Re s > \frac{1}{4}$.

On a donc pour $\Re s > \frac{1}{2}$

$$\sum \frac{1}{p^{2s}} = \log \frac{1}{s-\frac{1}{2}} + \delta(s),$$

où δ est une fonction holomorphe dans Δ.

3. Démonstration du théorème.

3.1. On voit immédiatement que, pour $\Re s > 1$ et $|z| < 1$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{\Omega(n)-\omega(n)}}{n^s} = \prod \left(1+\frac{1}{p^s-z}\right),$$

la série et le produit infini étant absolument convergents.

Par suite, pour $\Re s > 1$ et $|z| < 1$,

$$\frac{1}{\zeta(s)} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{\Omega(n)-\omega(n)}}{n^s} = \prod \left(1-\frac{1}{p^s}\right)\left(1+\frac{1}{p^s-z}\right) = \prod \left[1+\frac{z-1}{p^s(p^s-z)}\right],$$

d'où

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{\Omega(n)-\omega(n)}}{n^s} = \zeta(s)G(s, z-1, z)\,(^2),$$

c'est à dire

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^{\Omega(n)-\omega(n)}}{n^s} = \Big[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}\Big]\Big[\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{g_n(z-1, z)}{n^s}\Big].$$

Il résulte de là que, si $|z| < 1$, on a pour tout $x \geqslant 1$

$$\sum_{n\leqslant x} z^{\Omega(n)-\omega(n)} = \sum_{n\leqslant x} g_n(z-1, z) E\Big[\frac{x}{n}\Big],$$

où $E[u]$ désigne le plus grand entier $\leqslant u$.

En égalant les coefficients de z^q dans les deux membres, on obtient

(2) $$\nu_q(x) = \sum_{n\leqslant x} a_{n,q} E\Big[\frac{x}{n}\Big].$$

3.2. Si $\Re s > \frac{1}{2}$ et $|z| < 2^{\Re s}$, les séries doubles

$$\sum_{n\geqslant 1, q\geqslant 0} \frac{a_{n,q} z^q}{n^s} \quad \text{et} \quad \sum_{n\geqslant 1, q\geqslant 0} \frac{|a_{n,q}| z^q}{n^s}$$

sont absolument convergentes puisque, d'une part, pour chaque n, la série

$$\sum_{q=0}^{+\infty} \frac{|a_{n,q}|\,|z|^q}{n^{\Re s}}$$

est convergente et a pour somme $g_n(|z|+1, |z|)/n^{\Re s}$, d'autre part, la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{g_n(|z|+1, |z|)}{n^{\Re s}}$$

est convergente.

On a donc

$$\sum_{q=0}^{+\infty}\Big\{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n,q} z^q}{n^s}\Big\} = \sum_{n=1}^{+\infty}\Big\{\sum_{q=0}^{+\infty} \frac{a_{n,q} z^q}{n^s}\Big\} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{g_n(z-1, z)}{n^s},$$

ou

(3) $$\sum_{q=0}^{+\infty}\Big\{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n,q}}{n^s}\Big\} z^q = G(s, z-1, z),$$

et

$$\sum_{q=0}^{+\infty}\Big\{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_{n,q}| z^q}{n^s}\Big\} = \sum_{n=1}^{+\infty}\Big\{\sum_{q=0}^{+\infty} \frac{|a_{n,q}| z^q}{n^s}\Big\} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{g_n(z+1, z)}{n^s},$$

ou

(4) $$\sum_{q=0}^{+\infty}\Big\{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_{n,q}|}{n^s}\Big\} z^q = G(s, z+1, z),$$

toutes les séries qui interviennent étant absolument convergentes.

3.2.1. (3) donne en particulier pour $s = 1$ et $|z| < 2$

$$\sum_{q=0}^{+\infty}\Big\{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n,q}}{n}\Big\} z^q = G(1, z-1, z) = \prod \Big[1 + \frac{z-1}{p(p-z)}\Big]$$

$$= \prod \Big(1-\frac{1}{p}\Big)\Big(1+\frac{1}{p-z}\Big),$$

d'où il résulte que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n,q}}{n} = d_q$.

(2) s'écrit alors

(5) $$\nu_q(x) = d_q x - x\sum_{n>x} \frac{a_{n,q}}{n} - \sum_{n\leqslant x} a_{n,q}\Big\{\frac{x}{n} - E\Big[\frac{x}{n}\Big]\Big\}.$$

3.2.2. En tenant compte de (1), (3) et (4) s'écrivent

(6) $$\sum_{q=0}^{+\infty}\Big\{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n,q}}{n^s}\Big\} z^q = (s-\tfrac{1}{2})\mathcal{G}(s, z-1, z)\exp\Big[z\log\frac{1}{s-\frac{1}{2}}\Big]$$

et

(7) $$\sum_{q=0}^{+\infty}\Big\{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_{n,q}|}{n^s}\Big\} z^q = (s-\tfrac{1}{2})^{-1}\mathcal{G}(s, z+1, z)\exp\Big[z\log\frac{1}{s-\frac{1}{2}}\Big].$$

Les fonctions égales à $\mathcal{G}(s, z-1, z)$ et $\mathcal{G}(s, z+1, z)$ étant holomorphes en s et z pour $s\in\Delta$ et $|z| < 2^{\Re s}$, il existe des fonctions $A_0(s)$, $A_1(s), \ldots, A_q(s), \ldots$ et $B_0(s), B_1(s), \ldots, B_q(s), \ldots$ holomorphes dans Δ, telles que, pour $s\in\Delta$ et $|z| < 2^{\Re s}$,

$$\mathcal{G}(s, z-1, z) = \sum_{q=0}^{+\infty} A_q(s) z^q$$

(²) Remarquons en passant que cette formule permet d'établir immédiatement le résultat de Rényi en égalant les coefficients de z^q dans les deux membres et appliquant le théorème de Ikehara.

et

$$\mathscr{G}(s, z+1, z) = \sum_{q=0}^{+\infty} B_q(s) z^q.$$

On a d'ailleurs $B_0(s) = \mathscr{G}(s, 1, 0)$ et, en tenant compte de (1), on voit que, pour $\Re s > \frac{1}{2}$,

$$B_0(s) = (s-\tfrac{1}{2}) G(s, 1, 0) = (s-\tfrac{1}{2}) \prod \left(1+\frac{1}{p^{2s}}\right)$$

$$= (s-\tfrac{1}{2}) \frac{\zeta(2s)}{\zeta(4s)} = \frac{1}{2\zeta(4s)} (2s-1)\zeta(2s).$$

En faisant tendre s vers $\frac{1}{2}$, on obtient

$$B_0\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2\zeta(2)} = \frac{3}{\pi^2} \neq 0.$$

En égalant les coefficients de z^q dans les deux membres de (6) et (7), on voit que, pour $\Re s > \frac{1}{2}$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n,q}}{n^s} = \left(s-\tfrac{1}{2}\right) \sum_{j=0}^{q} \frac{A_{q-j}(s)}{j!} \left(\log \frac{1}{s-\frac{1}{2}}\right)^j$$

et

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_{n,q}|}{n^s} = (s-\tfrac{1}{2})^{-1} \sum_{j=0}^{q} \frac{B_{q-j}(s)}{j!} \left(\log \frac{1}{s-\frac{1}{2}}\right)^j.$$

3.3 Fixons donc un $q \geqslant 0$ et posons

$$u_n = |a_{n,q}| + \varepsilon a_{n,q}, \quad \text{avec} \quad \varepsilon = \pm 1.$$

On voit que la série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{+\infty} (u_n/n^s)$ est convergente pour $\Re s > \frac{1}{2}$, avec pour somme

$$h(s) = (s-\tfrac{1}{2})^{-1} \sum_{j=0}^{q} \frac{B_{q-j}(s)}{j!} \left(\log \frac{1}{s-\frac{1}{2}}\right)^j + \varepsilon (s-\tfrac{1}{2}) \sum_{j=0}^{q} \frac{A_{q-j}(s)}{j!} \left(\log \frac{1}{s-\frac{1}{2}}\right)^j.$$

Les u_n sont réels $\geqslant 0$, la fonction h est holomorphe en tous les points de la droite $\Re s = \frac{1}{2}$ autres que $\frac{1}{2}$ et, lorsque s tend vers $\frac{1}{2}$ dans le demi-plan $\Re s > \frac{1}{2}$, on a

$$h(s) = \left(s-\frac{1}{2}\right)^{-1} \sum_{j=0}^{q} \frac{B_{q-1}(\frac{1}{2})}{j!} \left(\log \frac{1}{s-\frac{1}{2}}\right)^j + o\left[\left(\log \frac{1}{r}\right)^q\right],$$

avec $r = |s-\frac{1}{2}|$.

Comme $B_0(\frac{1}{2}) \neq 0$, le lemme 2 permet de conclure que, quand x tend vers $+\infty$,

$$\sum_{n \leqslant x} u_n \sim 2 \frac{B_0(\frac{1}{2})}{q!} x^{1/2} (\log\log x)^q.$$

3.3.1. Ceci étant vrai pour $\varepsilon = +1$ et $\varepsilon = -1$, on voit que, quand x tend vers $+\infty$,

$$\sum_{n \leqslant x} |a_{n,q}| \sim 2 \frac{B_0(\frac{1}{2})}{q!} x^{1/2} (\log\log x)^q$$

et

$$\sum_{n \leqslant x} a_{n,q} = o[x^{1/2} (\log\log x)^q].$$

Le lemme 1 permet alors de conclure que

(8) $$\sum_{n \leqslant x} a_{n,q} \left\{\frac{x}{n} - E\left[\frac{x}{n}\right]\right\} = o[x^{1/2} (\log\log x)^q].$$

3.3.2. Si maintenant on pose $A(t) = \sum_{n \leqslant t} a_{n,q}$, on a pour $0 < x < y$

$$\sum_{x < n \leqslant y} \frac{a_{n,q}}{n} = \int_x^y \frac{dA(t)}{t} = \frac{A(y)}{y} - \frac{A(x)}{x} + \int_x^y \frac{A(t)}{t^2} dt.$$

En faisant tendre y vers $+\infty$, on obtient à la limite

$$\sum_{n > x} \frac{a_{n,q}}{n} = -\frac{A(x)}{x} + \int_x^{+\infty} \frac{A(t)}{t^2} dt.$$

Quand x tend vers $+\infty$, $A(x)/x = o[x^{-1/2} (\log\log x)^q]$.

On a aussi

$$\int_x^{+\infty} \frac{A(t)}{t^2} dt = o[x^{-1/2} (\log\log x)^q]$$

car la dérivée de $x^{-1/2} (\log\log x)^q$ est équivalente à $-\frac{1}{2} x^{-3/2} (\log\log x)^q$ tandis que $A(x)/x^2 = o[x^{-3/2} (\log\log x)^q]$.

On voit donc que, quand x tend vers $+\infty$,

(9) $$\sum_{n > x} \frac{a_{n,q}}{n} = o[x^{-1/2} (\log\log x)^q].$$

3.4. Finalement, compte tenu de (8) et (9), (5) donne

$$v_q(x) = d_q x + o[x^{\frac{1}{2}} (\log\log x)^q].$$

Travaux cités

[1] E. Cohen, *Arithmetical Notes VIII. An asymptotic formula of Rényi*, Proceedings of the American Mathematical Society 13 (1962), p. 536 - 539.

[2] H. Delange, *Généralisation du théorème de Ikehara*, Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure (3), 71 (1954), p. 231 - 242.

[3] E. Landau, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, Bd. II, XLIV, § 162.

[4] A. Rényi, *On the density of certain sequences of integers*, Publications de 'Institut de Mathématiques de l'Académie Serbe des Sciences 8 (1955), p. 157 - 162.

Reçu par la Rédaction le 21. 12. 1964

ACTA ARITHMETICA
XI (1965)

A theorem on generalized Dedekind sums*

by

L. Carlitz (Durham, North Carolina)

1. Put

$$((x)) = \begin{cases} x-[x]-\frac{1}{2} & (x \neq \text{integer}), \\ 0 & (x \text{ integer}). \end{cases}$$

The Dedekind sum $s(h,k)$ is defined by

$$s(h,k) = \sum_{\mu \,(\mathrm{mod}\, k)} \left(\left(\frac{h\mu}{k}\right)\right)\left(\left(\frac{\mu}{k}\right)\right), \tag{1.1}$$

where the summation is extended over a complete residue system $(\mathrm{mod}\, k)$. It is well known that $s(h,k)$ satisfies

$$12hk\{s(h,k)+s(k,h)\} = h^2-3hk+k^2+1, \tag{1.2}$$

where h and k are relatively prime.

Rademacher, at the 1963 Number Theory Institute in Boulder, proved the following generalization of (1.2). Define

$$s(k,h;x,y) = \sum_{\mu \,(\mathrm{mod}\, k)} \left(\left(h\frac{\mu+y}{k}+x\right)\right)\left(\left(\frac{\mu+y}{k}\right)\right), \tag{1.3}$$

where x, y are arbitrary real numbers. Then

$$\begin{aligned} &s(h,k;x,y)+s(k,h;y,x) \\ &\quad = -\frac{1}{4}\delta(x)\delta(y)+((x))((y))+\frac{1}{2}\left\{\frac{h}{k}\bar{B}_2(y)+\frac{1}{hk}\bar{B}_2(hy+kx)+\frac{k}{h}\bar{B}_2(x)\right\}, \end{aligned} \tag{1.4}$$

where $(h,k)=1$,

$$\delta(x) = \begin{cases} 1 & (x \text{ integral}), \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

* Supported in part by NSF grant GP-1593.