which implies $x_j^{(m)} - x_k^{(m)} \neq 0$. In other words

$$x_j - x_k = \sum_{s=1}^{m} (x_j^{(s)} - x_k^{(s)})\,\eta_s, \qquad x_j^{(m)} - x_k^{(m)} \neq 0$$

contrary to the hypothesis that $x_j - x_k$ is a linear combination with rational coefficients of $\eta_1, \ldots, \eta_{m'}$ alone.

We remark that the assumption that the x_i are real numbers was purely for convenience of the argument and we might just as well have said that they are elements of a vector space over an arbitrary field of characteristic 0 and then let m and m' be the corresponding dimensions over that field.

References

[1] J. Mikusiński and A. Schinzel, *Sur la réductibilité de certains trinômes*, Acta Arith. 9 (1964), pp. 91 - 95.

[2] A. Schinzel, *On the reducibility of polynomials and in particular of trinomials*, Acta Arith. 11 (1965), pp. 1 - 34.

UNIVERSITY OF CALIFORNIA, LOS ANGELES

Reçu par la Rédaction le 11. 11. 1964

ACTA ARITHMETICA
XI (1965)

Über ein Problem von Erdös und Moser

von

A. Sárközy und E. Szemerédi (Budapest)

Es seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ beliebige reelle Zahlen, für die $0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Bezeichnen wir die Lösungszahl von

$$(1) \qquad \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i a_i = t; \qquad \varepsilon_i = 0, \text{ oder } 1$$

mit $f(t)$. Erdös und Moser bewiesen (s. [1]), daß

$$\max_{0 \leqslant t < +\infty} f(t) < c_1 \frac{2^n}{n^{3/2}} \log^{3/2} n$$

($c_1, c_2, \ldots$ werden positive Konstanten bedeuten), und vermuteten, daß

$$\max_{0 \leqslant t < +\infty} f(t) < c_2 \frac{2^n}{n^{3/2}}$$

(es ist leicht zu sehen, daß für $a_1 = 1, a_2 = 2, \ldots, a_n = n$ wir haben $\max\limits_{t=0,1,2,\ldots,n^2} f(t) > c_3(2^n/n^{3/2})$). In dieser Arbeit werden wir diese Vermutung bewiesen.

Satz. *Es sei $\varepsilon > 0$ eine beliebige Zahl. Dann ist für $n > n_0(\varepsilon)$*

$$\max_{0 \leqslant t < +\infty} f(t) < (1+\varepsilon) \frac{8}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{2^n}{n^{3/2}}.$$

Beweis. Wir brauchen das folgende Lemma, das eine modifizierte und schwähere Gestalt eines Satzes von Katona (s. [1]) ist:

Lemma. *Es sei A eine beliebige Menge, und $A = B \cup C$, $B \cap C = 0$. Bezeichnen wir die Anzahl der Elemente von B, bzw. C mit b, bzw. c. Es seien $M_1, M_2, \ldots, M_l$ Teilmengen von A, und $l \geqslant 2^b \binom{c}{[c/2]} + 1$. Dann existieren Teilmengen M_u und M_v, für die*

$$(2) \qquad M_u \cap B = M_v \cap B$$

und

(3) $$M_u \cap C \subset M_v \cap C.$$

Beweis. Offensichtlich gibt es eine Teilmenge B^* von B, daß für mindestens $\binom{c}{[c/2]}+1$ Teilmengen M_{j_i}

$$B \cap M_{j_i} = B^* \quad (i = 1, 2, \ldots, k;\ k \geqslant \binom{c}{[c/2]}+1).$$

Jetzt werden wir den Satz von Sperner (s. [2]) für die Mengen $M_{j_1} \cap C$, $M_{j_2} \cap C, \ldots, M_{j_k} \cap C$ anwenden, und erhalten, daß Mengen M_{j_r} und M_{j_s} existieren, für die $M_{j_r} \cap C \subset M_{j_s} \cap C$. Wählen wir M_{j_r} als M_u, M_{j_s} als M_v, so sind (2) und (3) offensichtlich erfüllt, und damit ist das Lemma bewiesen.

Jetzt können wir unseren Satz beweisen.

Unser Beweis ist indirekt. Nehmen wir an, daß für ein t

(4) $$f(t) \geqslant (1+\varepsilon)\frac{8}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{2^n}{n^{3/2}}.$$

Bezeichnen wir jene Menge, deren Elemente $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sind, mit A. Bedeute B jene Menge, deren Elemente $a_1, a_2, \ldots, a_{[n/2]}$ sind, C jene, deren Elemente $a_{[n/2]+1}, a_{[n/2]+2}, \ldots, a_n$ sind.

Betrachten wir eine Lösung $\varepsilon_1^{(i)}, \varepsilon_2^{(i)}, \ldots, \varepsilon_n^{(i)}$ von (1). Bezeichnen wir jene a_j, für die $\varepsilon_j^{(i)} = 1$, mit $a_{j_1}^{(i)}, a_{j_2}^{(i)}, \ldots, a_{j_m}^{(i)}$. Bezeichnen wir jene Menge, deren Elemente $a_{j_1}^{(i)}, a_{j_2}^{(i)}, \ldots, a_{j_m}^{(i)}$ sind, mit A_i, und bezeichnen für $M \subset A$ die Anzahl der Elemente von $M \cap B$ mit $g(M)$. Bedeute endlich $f_1(t)$ die Anzahl jener Lösungen $\varepsilon_1^{(i)}, \varepsilon_2^{(i)}, \ldots, \varepsilon_n^{(i)}$ von (1), für die

(5) $$g(A_i) > \frac{n}{4}\cdot\frac{1+\varepsilon/3}{1+2\varepsilon/3}$$

ist, und bezeichnen die zu diesen Lösungen gehörenden Mengen A_i mit $A_1^*, A_2^*, \ldots, A_{f_1(t)}^*$. Es ist leicht zu sehen, daß die Anzahl jener Teilmengen M von A, für die

$$g(M) \leqslant \frac{n}{4}\cdot\frac{1+\varepsilon/3}{1+2\varepsilon/3}$$

$\left(\frac{1+\varepsilon/3}{1+2\varepsilon/3} < 1\right.$ ist!), für $n > n_1(\varepsilon)$ kleiner ist, als $\frac{\varepsilon}{3}\cdot\frac{8}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{2^n}{n^{3/2}}$, also auf Grund von (4)

(6) $$f_1(t) > f(t) - \frac{\varepsilon}{3}\cdot\frac{8}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{2^n}{n^{3/2}} \geqslant \left(1+\frac{2\varepsilon}{3}\right)\frac{8}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{2^n}{n^{3/2}}.$$

Bilden wir nun für alle A_i^* $(1 \leqslant i \leqslant f_1(t))$ alle Mengen $D_i^1, D_i^2, \ldots \ldots, D_i^{g(A_i^*)}$, die aus A_i^* durch Weglassung eines Elementes von B entstehen. Wir beweisen nun, daß für $D_{i_1}^{l_1} = D_{i_2}^{l_2}$ $i_1 = i_2$ (und $l_1 = l_2$) ist. Betrachten wir nämlich eine Menge $D_{i_1}^{l_1}$, und bezeichnen die Summe ihrer Elemente mit t_1. Dann erhält man $A_{i_1}^*$ aus $D_{i_1}^{j_1}$ offensichtlich durch Zufügung des Elementes $t - t_1$, also eine Menge D_i^j bestimmt eindeutig die zugehörige Mengen A_i^*, aus der D_i^j entsteht, und damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Die Anzahl der Mengen D_i^j ist wegen (5), (6) und

$$\binom{n-[n/2]}{\left[\frac{n-[n/2]}{2}\right]} \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{2^{n/2-[n/2]}}{\sqrt{n}} \quad \text{für} \quad n > n_2(\varepsilon)$$

mindestens

$$\sum_{i=1}^{f_1(t)} g(A_i^*) > f_1(t)\,\frac{1+\varepsilon/3}{1+2\varepsilon/3}\cdot\frac{n}{4} > \left(1+\frac{2\varepsilon}{3}\right)\frac{8}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{2^n}{n^{3/2}}\cdot\frac{1+\varepsilon/3}{1+2\varepsilon/3}\cdot\frac{n}{4}$$

$$= 2^{[n/2]}\left(1+\frac{\varepsilon}{3}\right)\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{2^{n/2-[n/2]}}{\sqrt{n}} > 2^{[n/2]}\binom{n-[n/2]}{\left[\frac{n-[n/2]}{2}\right]}+1.$$

Wenden wir nun das Lemma für die Mengen A, B, C, und für die Teilmengen $D_1^1, D_1^2, \ldots, D_1^{g(A_1^*)}, D_2^1, \ldots, D_{f_1(t)}^{g(A_{f_1(t)}^*)}$ der Menge A an. Wir erhalten, daß Mengen $D_{i_1}^{l_1}$ und $D_{i_2}^{l_2}$ existieren, für die

(7) $$D_{i_1}^{l_1} \cap B = D_{i_2}^{l_2} \cap B$$

und

$$D_{i_1}^{l_1} \cap C \subset D_{i_2}^{l_2} \cap C$$

gilt. Es seien die in $D_{i_1}^{l_1}$ nicht auftretenden Elemente von $D_{i_2}^{l_2}$ $a_{m_1}^{(i_2)}, a_{m_2}^{(i_2)}, \ldots \ldots, a_{m_z}^{(i_2)}$; wegen (7) ist offensichtlich

(8) $$a_{m_k} \geqslant a_{[n/2]+1} \quad (k = 1, 2, \ldots, z).$$

Es sei ferner A_{i_1} die Vereinigung von $D_{i_1}^{l_1}$ und $a_{p_1}^{(i_1)}$, A_{i_2} von $D_{i_2}^{l_2}$ und $a_{p_2}^{(i_2)}$. Nach der Definition von $D_{i_1}^{l_1}$ ist $a_{p_1}^{(i_1)} \in B$, also

(9) $$a_{p_1}^{(i_1)} \leqslant a_{[n/2]}.$$

Ferner die Summe der Elemente von A_{i_1}, bzw. A_{i_2} ist gleich $(= t)$, also gilt

(10) $$a_{p_1}^{(i_1)} = a_{p_2}^{(i_2)} + a_{m_1}^{(i_2)} + a_{m_2}^{(i_2)} + \ldots + a_{m_z}^{(i_2)}.$$

Wegen (8) besteht

$$a_{p_2}^{(i_2)}+a_{m_1}^{(i_2)}+a_{m_2}^{(i_2)}+\ldots+a_{m_z}^{(i_2)} \geqslant a_{m_1}^{(i_2)} \geqslant a_{[n/2]+1}. \tag{11}$$

Aus (9), (10) und (11) folgt, daß

$$a_{[n/2]} \geqslant a_{[n/2]+1},$$

also sind wir aus (4) zu einem Widerpsruch gelangt, und damit ist der Satz bewiesen.

Literaturverzeichnis

[1] Gy. Katona, *On a conjecture of Erdös, and a stronger form of Sperner's theorem,* Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl., im Druck.

[2] E. Sperner, *Ein Satz über Untermengen einer endlichen Menge,* Math. Zeitschr. 27 (1928), S. 544 - 548.

Reçu par la Rédaction le 26. 11. 1964

ACTA ARITHMETICA
XI (1965)

On primes in arithmetic progressions

by

J. H. VAN LINT (Eindhoven) and H.-E. RICHERT (Marburg)

As usual, for a real number x and coprime positive integers k and l we denote by $\pi(x, k, l)$ the number of primes $p \leqslant x$ for which $p \equiv l \bmod k$ The aim of this paper is to prove the following theorem of the Brun-Titchmarsh type.

THEOREM 1. *If x and y are real numbers, k and l integers satisfying*

$$1 \leqslant k < y \leqslant x, \quad (k, l) = 1,$$

then

$$\pi(x, k, l)-\pi(x-y, k, l) < \frac{y}{\varphi(k)\log\sqrt{y/k}}\left(1+\frac{4}{\log\sqrt{y/k}}\right).$$

The only conditions we impose on the parameters y, k and l are the natural ones. In particular, we do not need the assumption $k = O(x^{\delta})$ with $\delta < 1$ frequently used in this connection, although our estimates contain explicit numerical constants. Note however, that even if we had replaced the term $4/(\log\sqrt{y/k})$ in Theorem 1 by a corresponding O-term the result would have been superior to the best estimate hitherto known in this direction (Klimov [1], p. 182, where $2\log\log y$ occurs instead of the above constant 4). These improvements have been made possible mainly by a more careful treatment of the remainder term in the Selberg sieve. In our proofs we are more concerned with a convenient presentation than obtaining sharp estimates for the constants throughout the paper, for example the constant 4 in the remainder term of Theorem 1 can be replaced by 3 by a more refined argument.

We shall also prove

THEOREM 2. *If x and y are real numbers, k and l integers satisfying*

$$1 \leqslant k < y \leqslant x, \quad (k, l) = 1,$$

then

$$\pi(x, k, l)-\pi(x-y, k, l) < \frac{3y}{\varphi(k)\log(y/k)}.$$