If we now have a set X such that $T(X) = X$, we can, in view of the Lemmas 5 and 6, apply Lemma 1 to get the finiteness of X. The theorem is thus proved.

References

[1] W. Narkiewicz, *On polynomial transformations*, Acta Arith. 7 (1962), pp. 241 - 249.

[2] — *On polynomial transformations II*, Acta Arith. 8 (1962), pp. 11 - 19.

[3] — *On transformations by polynomials in two variables*, Colloq. Math. 12 (1964), pp. 53 - 58.

[4] — *On transformations by polynomials in two variables II*, Colloq. Math. 13 (1964), pp. 101-106.

[5] — *Remark on rational transformations*, Colloq. Math. 10 (1963), pp .139 - 142.

[6] B. L. van der Waerden, *Moderne Algebra*, Berlin-Göttingen-Heidelberg.

INSTITUTE OF MATHEMATICS OF THE POLISH ACADEMY OF SCIENCES
INSTITUTE OF MATHEMATICS, WROCŁAW UNIVERSITY
UNIVERSITY COLLEGE, LONDON

Reçu par la Rédaction le 8. 9. 1964

ACTA ARITHMETICA
XI (1965)

Grenzkreisgruppen und kettenbruchartige Algorithmen

von

M. Eichler (Basel)

§ 1. Einleitung. Eine reelle Zahl ϱ läßt sich auf mannigfache Weise in einen Kettenbruch

(1) $$\varrho = m_0 + 1/m_1 + \ldots + 1/m_{i-1} + \varrho_i^{-1}$$

mit ganzen rationalen m_i entwickeln. U. a. gibt es genau einen *regelmäßigen* Kettenbruch mit

(2) $$0 \leqslant \varrho_i - m_i < 1.$$

Will man speziell einen gekürzten Bruch $\varrho = a/c$ in einen Kettenbruch entwickeln, so kann man auch wie folgt verfahren. Man bestimmt ganze rationale b, d so, daß $ad - bc = 1$ ist und stellt die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

ein Element der elliptischen Modulgruppe Γ, durch die beiden Erzeugenden

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

in der Weise

(3) $$A = T^{n_0} J T^{n_1} J \ldots T^{n_l} J$$

dar. Dann ist

(4) $$\frac{a}{c} = \begin{cases} n_0 - 1/n_1 + \ldots + (-1)^l / n_l & \text{für} \quad n_l \neq 0, \\ n_0 - 1/n_1 + \ldots + (-1)^{l-2} / n_{l-2} & \text{für} \quad n_l = 0. \end{cases}$$

Die Kettenbrüche (1) und (4) stimmen überein, wenn

(5) $$-n_1, n_2, \ldots, (-1)^{l-1} n_{l-1} > 0, \quad (-1)^l n_l \geqslant 0$$

ist. Durch (5) ist die Darstellung (3) von A eindeutig festgelegt.

Sei F ein Fundamentalbereich von Γ. Dann ist unter der Voraussetzung (3) und $n_0 < 0$

$$F, \; T^{-1}(F), \ldots, \; T^{n_0}(F), \; T^{n_0} J(F), \ldots, A(F)$$

eine Kette benachbarter Bereiche. Jede mit F beginnende und mit $A(F)$ endende Kette von Nachbarbereichen liefert eine Zerlegung (3), und diese hängt von der Regel ab, nach welcher die jeweiligen Nachbarbereiche ausgewählt werden. Wir werden in § 5 zeigen, daß die Regel (5) im Prinzip so formuliert werden kann, daß man der kürzesten Verbindung zwischen F und $A(F)$ folgt.

Es stellt sich nun die Frage nach der *Länge* l der Zerlegung (3) bzw. des Kettenbruchs (4). Sie wird in den beiden Sätzen 3 und 4 beantwortet. Das Resultat gestattet eine Anwendung auf die Länge der Periode für eine reelle quadratische Irrationalität.

Das Problem läßt sich in naheliegender Weise auf eine beliebige Grenzkreisgruppe Γ von 1. Art übertragen (§ 3). Man stelle ein Element $A \epsilon \Gamma$ durch ein Erzeugendensystem der Gruppe dar und schätze die Anzahl der dabei auftretenden Faktoren ab. Wie im Spezialfall der Modulgruppe muß man dabei auf einander folgende übereinstimmende parabolische Substitutionen zusammenfassen (Satz 1). Das Resultat ist nützlich, um die Existenz von (verallgemeinerten) Abelschen Integralen mit vorgeschriebenen Perioden zu beweisen (§ 4).

Übrigens dürfte man hier für Γ eine diskontinuierliche Gruppe von Isometrien eines Riemannschen Raumes beliebiger Dimension nehmen, in welchem die Dreiecksungleichung für geodätische Abstände global gültig ist, sofern man noch voraussetzt, daß Γ einen "normalen" Fundamentalbereich (§ 2) mit höchstens nulldimensionalen Spitzen besitzt. Gruppen dieser Art sind z. B. die Hilbertsche und die Picardsche Modulgruppe. Wir haben den Satz 1 in dieser allgemeinen Formulierung ausgesprochen.

§ 2. Vorbereitungen. Zu einer reellen Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ der Determinante 1 gibt es zwei orthogonale Matrizen Q_1, Q_2 so, daß

$$(6) \qquad A' = Q_1 A Q_2 = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}$$

ist. Dann ist

$$(7) \qquad \left(i, A(i)\right) = \left(i, \frac{ai+b}{ci+d}\right) = |\log \alpha^2|$$

der hyperbolische Abstand zwischen den Punkten i und $A(i)$, wenn man die obere Halbebene als das Poincarésche Modell der hyperbolischen Ebene nimmt. (6) zieht die Ungleichungen

(8)

$$\tfrac{1}{2}(a^2+\ldots+d^2) = \tfrac{1}{2}(\alpha^2+\alpha^{-2}) \leqslant \mathrm{Max}(\alpha^2, \alpha^{-2}) < \alpha^2+\alpha^{-2} = a^2+\ldots+d^2$$

nach sich. Verzichtet man auf $|A| = 1$, so gilt mit der Abkürzung

$$(9) \qquad \mu(A) = \frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{ad-bc}$$

wegen (7) und (8)

$$(10) \qquad \tfrac{1}{2}\mu(A) \leqslant e^{(i, A(i))} < \mu(A).$$

Γ bezeichne fortan bis zum Schluß von § 3 eine Gruppe gebrochen linearer Substitutionen

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; \qquad A(\tau) = \frac{a\tau+b}{c\tau+d}$$

der oberen Halbebene. Die Koeffizienten werden als reell und die Determinante als 1 vorausgesetzt. Γ möge einen Fundamentalbereich besitzen, dessen hyperbolischer Flächeninhalt endlich ist. Unter diesen Voraussetzungen existiert stets zu einem Punkt ζ der oberen Halbebene ein *normaler Fundamentalbereich* F, welcher folgendermaßen definiert ist: F besteht aus allen Punkten τ, für welche die hyperbolischen Abstände sämtlichen Ungleichungen

$$(\tau, \zeta) \leqslant \left(\tau, A(\zeta)\right), \qquad A \epsilon \Gamma$$

genügen. Man kann in bekannten Weise einen Teil der Randpunkte ausschließen, sodaß jeder Punkt der Halbebene mit genau einem Punkt von F äquivalent ist. F ist ein konvexes Polygon mit endlich vielen Seiten. Für einen Existenzbeweis unter diesen allgemeinen Bedingungen s. [4].

F hat endlich viele Nachbarn $A_i(F)$, und die A_i bilden ein *normales Erzeugendensystem* von Γ. (Man beachte, daß unter den A_i auch die inversen Elemente vorkommen.) Unter den A_i werden die parabolischen Elemente eine besondere Rolle spielen; sie lassen jewils eine Spitze von F fest.

§ 3. Die Erzeugung der Gruppe. Ein Element $A \epsilon \Gamma$ werde in der Weise

$$(11) \qquad A = B_1 B_2 \ldots$$

dargestellt, wobei die B_i (selbstverständlich bis auf die Reihenfolge) mit den A_i eines normalen Erzeugendensystems übereinstimmen. Eine solche Darstellung soll *normal* heißen, wenn die B_i auf folgende Weise ausgewählt werden: Man zeichne außer ζ noch einen weiteren Punkt $\vartheta \epsilon F$ aus. Sind $B_1, \ldots, B_{i-1}$ schon bestimmt, so verbinde man

$$B_1 \ldots B_{i-1}(\zeta) = \zeta_{i-1}$$

mit $A(\vartheta)$ durch die hyperbolische Gerade. Diese trete nach Verlassen des Bereichs $B_1\ldots B_{i-1}(F)$ in den Nachbarbereich $B_1\ldots B_i(F)$ ein. Dann bezeichnet B_i den nächsten Faktor in (11). (Bei der Definition von B_1 hat man $B_0 = E =$ Einheitsmatrix zu nehmen.)

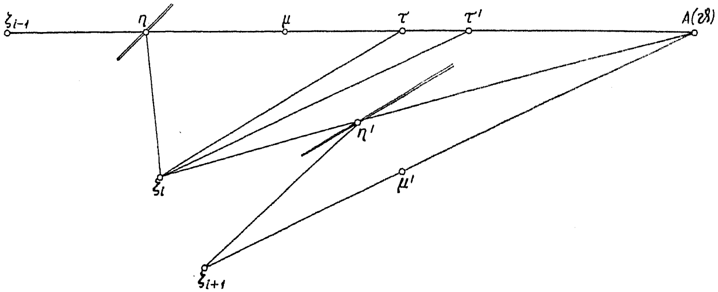

Fig. 1

$F_{i-1} = B_1\ldots B_{i-1}(F)$ ist der normale Fundamentalbereich bzgl. ζ_{i-1}. Es bezeichne η den Grenzpunkt, wo die genannte Gerade den Bereich F_{i-1} verläßt. Dann ist nach der Definition

$$(\zeta_{i-1}, \eta) = (\zeta_i, \eta)$$

und wegen der Dreiecksungleichung

$$\big(\zeta_i, A(\vartheta)\big) \leqslant (\zeta_i, \eta) + \big(\eta, A(\vartheta)\big) = \big(\zeta_{i-1}, A(\vartheta)\big). \tag{12}$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur dann, wenn $\zeta_i = \zeta_{i-1}$ ist, aber das ist nicht möglich.

Hilfssatz 1. *Es gibt eine von A und ϑ unabhängige positive Konstante c_1 derart, daß anstelle von* (12) *sogar*

$$\big(\zeta_i, A(\vartheta)\big) \leqslant \big(\zeta_{i-1}, A(\vartheta)\big) - c_1 \tag{13}$$

gilt, sofern nicht B_i eine Spitze von F fest läßt.

Der folgende Beweis enthält einen Schluß, der später noch mehrmals wiederholt wird. Wir markieren auf der Geraden durch ζ_{i-1} und $A(\vartheta)$ zunächst den Punkt μ auf den anderen Seite von η, wobei der Abstand

$$(\eta, \mu) = (\zeta_{i-1}, \eta) \tag{14}$$

ist. Ein variabler Punkt laufe ferner auf dieser Geraden von μ bis $A(\vartheta)$; τ und τ' bezeichnen in der Figur zwei verschiedene Positionen. Dann ist nach der Dreiecksungleichung

$$(\zeta_i, \tau') \leqslant (\zeta_i, \tau) + (\tau, \tau').$$

Das läßt sich so schreiben:

$$(\zeta_i, \tau') - (\zeta_{i-1}, \tau') \leqslant (\zeta_i, \tau) - (\zeta_{i-1}, \tau).$$

Hiernach gilt

$$\big(\zeta_{i-1}, A(\vartheta)\big) - \big(\zeta_i, A(\vartheta)\big) \geqslant (\zeta_{i-1}, \mu) - (\zeta_i, \mu). \tag{15}$$

Die rechte Seite von (15) ist nach (14) und der Dreiecksungleichung $\geqslant 0$, und das Gleichheitszeichen trifft nur dann zu, wenn ζ_i, η, μ auf einer Geraden und η zweischen den beiden anderen Punkten liegt. Aber das ist nicht der Fall.

Die Ungleichung (13) ergibt sich aus (15) und

$$(\zeta_{i-1}, \mu) - (\zeta_i, \mu) = 2(\eta, \mu) - (\zeta_i, \mu) \geqslant c_1. \tag{16}$$

Es ist also eine positive Konstante c_1 dieser Art zu finden, sofern B_1 nicht eine Spitze von F fest läßt. Zur Vereinfachung der Schreibweise darf man $\zeta_{i-1} = \zeta$ und $B_1\ldots B_{i-1} = E$ annehmen. Der links in (16) stehende Ausdruck ändert sich mit $A(\vartheta)$. Aber man kann ihn ebensogut als eine Funktion des Punktes η ansehen, und zwar handelt es sich um eine stetige Funktion. Der Punkt η variiert auf der Grenze zwischen den Bereichen F und $B_i(F)$, und diese ist nach der Voraussetzung über B_i eine endliche Strecke, also eine kompakte Punktmenge. Folglich nimmt diese Funktion hier ein von 0 verschiedenes Minimum an. Bezeichnet man es mit c_1, so sind hiermit (16) und (13) bewiesen.

Hilfssatz 2. *Es gibt eine von A und ϑ unabhängige positive Konstante c_2 so, daß*

$$\big(\zeta_{i+1}, A(\vartheta)\big) \leqslant \big(\zeta_{i-1}, A(\vartheta)\big) - c_2 \tag{17}$$

gilt, sofern B_i und B_{i+1} nicht dieselbe Spitze von F fest lassen. (*Dann sind B_i und B_{i+1} identisch.*)

Beweis. Lassen B_i oder B_{i+1} keine Spitze fest, so folgt (17) aus (12) und (13) mit $c_2 = c_1$. Dieser Fall wird fortan ausgeschlossen.

Wir behaupten zunächst: für jede positive Konstante C gibt es unter der Voraussetzung

$$(\zeta_{i-1}, \eta) \leqslant C$$

eine Konstante $c_1(C)$ derart, daß (13) mit $c_1(C)$ anstelle von c_1 gilt. In der Tat bilden dann die Richtungen der Geraden durch ζ_{i-1}, welche den Rand von F_{i-1} in einer Entfernung $(\zeta_{i-1}, \eta) \leqslant C$ treffen, ein Kompaktum und ebenso die von ihnen getroffenen Grenzpunkte η. Man kann auf dieses Kompaktum die Schlußweise des Hilfssatzes 1 anwenden. Aus dem Grunde genügt es, den Beweis unter der Voraussetzung

$$(\zeta_{i-1}, \eta) > C \tag{18}$$

zu führen, wobei man über die Konstante C noch verfügen kann.

Man definiert die Punkte η' und μ' auf der Geraden durch ζ_i und $A(\vartheta)$ analog zu η und μ (Figur 1). Es folgt dann durch zweimalige Anwendung von (15)

$$\big(\zeta_{i-1}, A(\vartheta)\big)-\big(\zeta_{i+1}, A(\vartheta)\big) \geqslant (\zeta_{i-1}, \mu)-(\zeta_i, \mu)+(\zeta_i, \mu')-(\zeta_{i+1}, \mu').$$

Hiermit läßt sich (17) aus der Ungleichung

$$f(\eta') = (\zeta_i, \mu')-(\zeta_{i+1}, \mu') \geqslant c_2 \tag{19}$$

herleiten, die es nun mit einer positiven Konstanten c_2 zu beweisen gilt. Nach der Voraussetzung haben F und $B_i(F)$, sowie F und $B_{i+1}(F)$ je eine Spitze s bzw. $s' \neq s$ gemeinsam, und die Grenzen laufen in die Spitzen hinein.

Zum Beweis von (19) betrachten wir die Mannigfaltigkeit R der Richtungen durch den Punkt $\zeta_{i-1} = \zeta$. In R zeichnen wir zwei offene Teilmengen U_s und $U_{s'}$ aus, welche die Richtungen der Geraden durch s und s' enthalten; dabei sei

$$U_s \frown U_{s'} = \text{die leere Menge}. \tag{20}$$

Wenn man $A(\vartheta)$ derart variiert, daß der Grenzpunkt η auf der Grenze von $F_{i-1} = F$ und $B_i(F)$ liegt, und daß der Abstand (18) gegen ∞ strebt, so strebt η gegen s. Für hinreichend großes C liegt also die Richtung dieser Geraden in U_s.

Aus (18) folgt ferner

$$\big(\zeta_{i-1}, A(\vartheta)\big) > (\zeta_{i-1}, \eta) > C$$

und aus der Dreiecksungleichung

$$\big(\zeta_i, A(\vartheta)\big) > \big(\zeta_{i-1}, A(\vartheta)\big) - (\zeta_i, \zeta_{i-1}) > C-(\zeta_i, \zeta_{i-1}), \tag{21}$$

und (ζ_i, ζ_{i-1}) ist unabhängig von A und ϑ beschränkt. Würde man nun bei jeder Variation von $A(\vartheta)$, welche die Gruppenelemente B_i und B_{i+1} nicht ändert, der Grenzpunkt η' einer kompakten Punktmenge angehören, so könnte man wie bei dem Hilfssatz 1 schließen, daß (19) mit einer positiven Konstanten gilt. Wir müssen also noch den Fall behandeln, wo η' bei Variation von $A(\vartheta)$ in die Spitze $B_i(s')$ von F_i wandern kann, während die Ungleichung (21) gilt.

Da die Punkte ζ_{i-1} und ζ_i in Vergleich zu dem gegen ∞ strebenden Abstand nach $A(\vartheta)$ relativ benachbart sind, ist die Richtung durch ζ_{i-1} und $A(\vartheta)$ bei hinreichend großem Abstand (21) beliebig wenig von derjenigen durch ζ_{i-1} und s' verschieden und dann in $U_{s'}$ enthalten. Andererseits hatten wir oben gesehen, daß sie in U_s liegt. Das widerspricht der Tatsache (20), und der Beweis ist fertig.

Satz 1. *Man fasse die Faktoren B_i in der normalen Darstellung* (11) *wie folgt zusammen:* (a) *Ein B_i, welches keine Spitze fest läßt, bildet einen*

Abschnitt für sich, (b) *alle B_i, welche jeweils dieselbe Spitze fest lassen (sie sind dann einander gleich), bilden einen Abschnitt. Dann ist die Anzahl der Abschnitte*

$$l \leqslant c_3 \log\mu(A)+c_4 \tag{22}$$

mit zwei von A unabhängigen Konstanten c_3, c_4.

Beweis. Man nenne die Abschnitte C_i und schreibe (11) so:

$$A = C_1 \ldots C_l. \tag{23}$$

Aus den Hilfssätzen 1 und 2 folgt dann

$$\big(\ldots C_{i-1}(\zeta), A(\vartheta)\big) \geqslant \big(\ldots C_{i+1}(\zeta), A(\vartheta)\big)+c_2,$$

was

$$\big(\zeta, A(\vartheta)\big) \geqslant \frac{c_2 l}{2}+\big(A(\zeta), A(\vartheta)\big) = \frac{c_2 l}{2}+(\zeta, \vartheta)$$

nach sich zieht. Die linke Seite ist nach der Dreiecksungleichung

$$\big(\zeta, A(\vartheta)\big) \leqslant \big(i, A(i)\big)+(i, \zeta)+\big(A(i), A(\vartheta)\big) = \big(i, A(i)\big)+(i, \zeta)+(i, \vartheta).$$

Mithin gilt

$$l \leqslant \frac{2}{c_2}\Big(\big(i, A(i)\big)+(i, \zeta)+(i, \vartheta)-(\zeta, \vartheta)\Big).$$

Das kann man wegen (10) in der Weise (22) schreiben.

Satz 2. *Für die in Satz 1 definierten Abschnitte C_t des Produkts* (11) *bzw.* (23) *gilt mit von A unabhängigen Konstanten*

$$\mu(C_t) \leqslant c_5^2\mu(A)^2 \quad (t = 1, \ldots, l) \tag{24}$$

und

$$\mu(C_t \ldots C_l) \leqslant c_5\mu(A). \tag{25}$$

Beweis. Nach (12) gilt für $r > s$

$$\begin{aligned}\big(B_1 \ldots B_r(i), A(i)\big) &- (\zeta, i)-(\vartheta, i)\\ &= \big(B_1 \ldots B_r(\zeta), A(i)\big) -\big(B_1 \ldots B_r(\zeta), B_1 \ldots B_r(i)\big)-\big(A(\zeta), A(\vartheta)\big)\\ &\leqslant \big(B_1 \ldots B_r(\zeta), A(\vartheta)\big) \leqslant \big(B_1 \ldots B_s(\zeta), A(\vartheta)\big)\\ &\leqslant \big(B_1 \ldots B_s(i), A(i)\big)+(\zeta, i)+(\vartheta, i).\end{aligned}$$

Das ist

$$\big(i, B_r^{-1} \ldots B_1^{-1}A(i)\big) \leqslant \big(i, B_s^{-1} \ldots B_1^{-1}A(i)\big)+c_6,$$

wo c_6 von A nicht abhängt. Hieraus folgt weiter nach (10)

$$\mu(B_r^{-1} \ldots B_1^{-1}A) \leqslant c_5\mu(B_s^{-1} \ldots B_1^{-1}A). \tag{26}$$

Für $s = 0$ ist das (25).

Andererseits verifiziert man leicht für zwei Matrizen A, B der Determinanten 1:

$$\mu(AB) \leqslant \mu(A)\mu(B). \tag{27}$$

Die Ungleichung bleibt richtig, wenn man die Koeffizienten von A und B mit je einem reellen Faktor multipliziert. Daher gilt (27) allgemein für reelle Matrizen. Es sei $C_l = B_{r+1}\dots B_s$ ein Abschnitt in (11). Dann rechnet man unter Benutzung von (26) und (27)

$$\mu(C_l) = \mu\big((B_{r+1}\dots)(B_{s+1}\dots)^{-1}\big) \leqslant \mu(B_{r+1}\dots)\mu(B_{s+1}\dots) \leqslant c_5^2\mu(A)^2,$$

wie zu beweisen war.

§ 4. Abelsche Integrale mit vorgeschriebenen Perioden. Zu einer meromorphen Modulform $\varphi(\tau)$ vom Grad $-2n$ werden die Abelschen Integrale

$$\Phi(\tau) = \int_{\tau_0}^{\tau} \varphi(\tau')(\tau'-\tau)^{2n-2}d\tau'$$

gebildet [2]. Es wird hier vorausgesetzt, daß sie von 1. oder 2. Gattung seien, d. h. daß auch stets $\Phi(\tau)$ meromorph sei. Es gilt dann mit der Abkürzung

$$\Phi(\tau)[A]^{2n-2} = \Phi\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)(c\tau+d)^{2n-2}$$

für alle $A \epsilon \Gamma$:

$$\Phi(\tau)[A]^{2n-2} = \Phi(\tau)+\omega_A(\tau), \tag{28}$$

wobei $\omega_A(\tau)$ ein Polynom vom Grad $2n-2$ in τ ist. Man nennt es die zu A gehörige Periode von $\Phi(\tau)$. Das System der Perioden genügt den Funktionalgleichungen

$$\omega_A(\tau)[B]^{2n-2} = \omega_{AB}(\tau)-\omega_B(\tau). \tag{29}$$

Durch Abzählung der Anzahlen der linear unabhängigen Modulformen $\varphi(\tau)$ von 1. oder 2. Gattung auf der einen Seite und der linear unabhängigen Lösungen von (29) auf der anderen läßt sich zeigen, daß zu jedem Periodensystem ein Abelsches Integral von 1. oder 2. Gattung gehört. Für den Fall der elliptischen Modulgruppe oder einer Untergruppe von endlichem Index können wir jetzt dasselbe auch aus den Sätzen 1 und 2 schließen. Die Möglichkeit wurde übrigens schon früher kurz angedeutet [3], allerdings unter Auslassung des Konvergenzbeweises.

Wie in [2] gezeigt wurde, genügt es den Nachweis unter der Voraussetzung $\omega_A(\tau) = 0$ für alle diejenigen A zu führen, welche eine Spitze des Fundamentalbereichs F fest lassen. Ist mit minimalem positivem m

$\begin{pmatrix}1 & m\\ 0 & 1\end{pmatrix} \epsilon \Gamma$, so ist speziell $\omega_{T^m}(\tau) = 0$. Zwei Elemente A_1, A_2 mit der gleichen zweiten Zeile (c, d) unterscheiden sich um eine Potenz von T^m auf der rechten Seite. Aus (29) folgt nun $\omega_{A_1}(\tau) = \omega_{A_2}(\tau)$. Die $\omega_A(\tau)$ hängen also unter diesen Umständen nur von der zweiten Zeile von A ab.

Wir behaupten nun die Existenz einer nur von τ, aber nicht von A abhängigen positiven Konstanten $C(\tau)$ derart, daß

$$|\omega_A(\tau)| \leqslant C(\tau)(c^2+d^2)^{n-1}\big(\log(c^2+d^2)+c_6\big) \tag{30}$$

ist. Zum Beweis stellen wir zunächst fest: zu $A' = \begin{pmatrix}a' & b'\\ c & d\end{pmatrix} \epsilon \Gamma$ gibt es eine Potenz von T^m, sodaß für $A = A'T^{mk} = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$:

$$\mu(A) \leqslant C'(c^2+d^2) \tag{31}$$

mit einer passenden nur von Γ abhängigen Konstanten C' gilt. Ein solches A sei nun gegeben und in der Weise (23) zerlegt. Entsprechend findet man nach (29)

$$\omega_A(\tau) = \omega_{C_1}(\tau)[C_2\dots C_l]^{2n-2}+\omega_{C_2}(\tau)[C_3\dots C_l]^{2n-2}+\dots+\omega_{C_l}(\tau).$$

Das führt auf eine Abschätzung

$$|\omega_A(\tau)| \leqslant C_1(\tau)[\mu(C_2\dots C_l)^{n-1}+\mu(C_3\dots C_l)^{n-1}+\dots+\mu(C_l)^{n-1}]$$

und weiter nach (22) und (25)

$$|\omega_A(\tau)| \leqslant C_2(\tau)\mu(A)^{n-1}\log\mu(A),$$

endlich nach (27) die behauptete Ungleichung (30).

Wegen (30) konvergiert die Reihe, wo A jeweils ein (beliebiges) Element aus Γ mit der 2. Zeile (c, d) ist:

$$\Psi(\tau) = -\sum_{(c,d)}\frac{\omega_A(\tau)}{(c\tau+d)^{2n+2}}$$

absolut und gleichmäßig in jedem Kompaktum der oberen Halbebene. Aus (29) läßt sich die Funktionalgleichung

$$\Psi(\tau)[B]^{-4} = \Psi(\tau)+\omega_B(\tau)\varphi(\tau), \qquad \varphi(\tau) = \sum_{(c,d)}\frac{1}{(c\tau+d)^{2n+2}}$$

für ein $B \epsilon \Gamma$ herleiten. Mit

$$\Phi(\tau) = \frac{\Psi(\tau)}{\varphi(\tau)}$$

gilt dann, da $\varphi(\tau)$ eine Modulform vom Grad $-2n-2$ ist,

$$\Phi(\tau)[B]^{2n-2} = \Phi(\tau)+\omega_B(\tau).$$

Damit ist das Ziel erreicht.

§ 5. Die elliptische Modulgruppe. Von jetzt ab bedeutet Γ die elliptische Modulgruppe. Das bekannte Moduldreieck

$$-\tfrac{1}{2} \leqslant \operatorname{Re}(\tau) < \tfrac{1}{2}, \qquad |\tau| \geqslant 1$$

ist ein normaler Fundamentalbereich bzgl. jedes Punktes ζ, der auf der imaginären Achse zwischen i und $i\infty$ liegt. Um die Zerlegung (3) mit den Bedingungen (5) zu erhalten, muß manindessen ζ gegen i und ϑ gegen $i\infty$ streben lassen; ferner muß man n_0 so wählen, daß

$$0 \leqslant \frac{a}{c} - n_0 < 1$$

ist. In der Tat, schreibt man A anstelle von $(T^{n_0})^{-1}A$, so tritt die Gerade durch $\zeta = i$ und $A(\vartheta) = a/c - n_0$ in das Gebiet $J(F)$ über. Man hat also nach der Regel von § 3 $B_1 = J$ zu nehmen. Hierauf liegt der Punkt

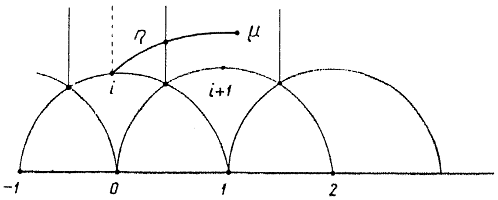

Fig. 2

$B_1^{-1}A(\vartheta)$ zwischen $-\infty$ und -1, und die ihn mit $\zeta = i$ verbindende Gerade gibt $JT^{-1}(F)$ als nächsten Nachbarn an; d. h. es ist $B_2 = T^{-1}$. Ersichtlich erhält man so für a/c den Kettenbruch mit positiven Teilnennern.

Es ist für das Folgende entscheidend, daß bei der Wahl von $\zeta = i$ die Lage von $\vartheta = it$ mit $1 \leqslant t \leqslant \infty$ willkürlich ist. Wenn sich nämlich bei Änderung von t in diesem Intervall die Bestimmung von B_1 änderen würde, so würde das Bild $A(\vartheta)$ dieser Strecke den Einheitskreis schneiden. Aber dieser ist eine Grenze eines mit F äquivalenten Fundamentalbereichs und dringt daher niemals ins Innere eines anderen $A(F)$ ein.

Bei der Wahl von $\zeta = i$ und $\vartheta = i\infty$ versagen die Hilfssätze 1 und 2, weil diese Punkte nicht im Inneren von F liegen. Man kann sie aber ersetzen durch

Hilfssatz 3. *Ist in der Zerlegung* (11) $B_r = T$ (*oder auch* T^{-1}) *und* $B_{r+1} = J$, *so ist*

$$\big(\zeta_{r-1}, A(\vartheta)\big) - \big(\zeta_{r+1}, A(\vartheta)\big) \geqslant c_7.$$

Beweis. Man darf sich auf den Fall $r = 1$, d. h. $\zeta_{r-1} = \zeta = i$ und $B_1 = T$ beschränken. Dann tritt die Gerade durch ζ und $A(\vartheta)$ von F in das Gebiet $T(F)$ über, und die Gerade von $\zeta_1 = i+1$ nach $A(\vartheta)$ in das Gebiet $TJ(F)$. Das bedeutet, die Gerade von i nach $A(\vartheta)$ liegt in dem (rechten) Winkelbereich zwischen dem Einheitskreis durch i und dem Orthogonalkreis durch i und $\frac{1}{2}(3+\sqrt{-3})$. Der Schnittpunkt η der Geraden durch i und $A(\vartheta)$ und der rechten Grenze von F gehört also einer kompakten Punktmenge an, und man kann wie bei Hilfssatz 1 schließen:

$$\big(\zeta_{r-1}, A(\vartheta)\big) - \big(\zeta_r, A(\vartheta)\big) \geqslant (\zeta_{r-1}, \mu) - (\zeta_r, \mu) = 2(i, \eta) - (i+1, \mu) \geqslant c_7$$

wo c_7 das Minimum der Funktion $2(i, \eta) - (i+1, \mu)$ für alle möglichen η ist.

Benutzt man, was nach einer früheren Bemerkung erlaubt ist, $\vartheta = i$, so ergibt dieser Hilfssatz:

Satz 3. *Bei der Darstellung* (3) *eines* $A \in \Gamma$ *mit alternierenden Vorzeichen der* n_i *gilt eine Abschätzung*

$$l \leqslant c_8 \log \mu(A), \qquad c_8 = 1/c_7.$$

Da man zu einem teilerfremden Paar a, c ganzer Zahlen zwei weitere b, d mit $ad - bc = 1$ und

$$b^2 + d^2 \leqslant \frac{a^2+c^2}{4} + \frac{1}{a^2+c^2} \leqslant \frac{a^2+c^2}{2}$$

finden kann, folgt aus Satz 3 und dem oben festgestellten Zusammenhang zwischen (1) und (3):

Satz 4. *Die Länge* l *des Kettenbruchs für eine rationale Zahl* a/c *mit positiven Teilnennern läßt sich durch*

$$l \leqslant c_8 \log \tfrac{3}{2}(a^2+c^2)$$

abschätzen.

Der Satz sttimt im Prinzip mit einem von Lambert überein [5]: $l \leqslant 5\dfrac{\log|c|}{\log 10}$, wenn $|c| = \operatorname{Min}(|a|, |c|)$ ist.

Die Berechnung der Konstanten c_7 in Hilfssatz 3 ist nicht schwierig. Ich habe für sie den ungefähren Wert

$$c_7 \approx 1.59$$

erhalten. Das liefert

$$c_8 = c_7^{-1} \approx 0.69.$$

Der Satz 3 erlaubt eine Anwendung auf die ganzzahligen indefiniten binären quadratischen Formen $f = ax^2 + bxy + cy^2$ der Diskriminante $d = b^2 - 4ac$. Die reduzierten Formen dieser Art ordnen sich bekanntlich in Ketten an, deren jede Form aus der vorhergehenden durch eine Substitution der Form $T^n J$ entsteht (vgl. dazu [1]). Die Vorzeichen der Exponenten n alternieren. Nach endlich vielen Schritten gelangt man zu der ursprünglichen Form zurück, und

$$T^{m_1}J \ldots T^{m_l}J = A$$

ist ein erzeugendes Element der Automorphismengruppe von f. Es ist

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(u-bv) & -cv \\ av & \frac{1}{2}(u+bv) \end{pmatrix},$$

wenn $\varepsilon = \frac{1}{2}(u+v\sqrt{d})$ die Grundeinheit (positiver Norm) des Ringes $[1, \frac{1}{2}(1+\sqrt{d})]$ bzw. $[1, \frac{1}{2}\sqrt{d}]$ ist. Daraus ergibt sich (unter Benutzung der Reduktionsbedingungen)

$$\mu(A) = \tfrac{1}{4}\big(u^2+2(b^2-2a^2-2c^2)v^2\big) < \tfrac{3}{4}\varepsilon^2.$$

Folglich ist die Periodenlänge nach Satz 3

$$l \leqslant c_3 \log \tfrac{3}{4}\varepsilon^2 \approx 0.69 \log \tfrac{3}{4}\varepsilon^2. \tag{32}$$

Übrigens ist die Periodenlänge l von der Klasse der Form unabhängig und daher ihr Produkt mit der Klassenzahl gleich der Anzahl der reduzierten Formen.

Literaturverzeichnis

[1] Dirichlet-Dedekind, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, 4. Aufl. Braunschweig 1894.

[2] M. Eichler, *Eine Verallgemeinerung der Abelschen Integrale*, Math. Zeitschr. 67 (1957), S. 267 - 298.

[3] — *Quadratische Formen und Modulfunktionen*, Acta Arith. 4 (1958), S. 217 - 239.

[4] C. L. Siegel, *Ausgewählte Fragen der Funktionentheorie II*, Göttingen 1954, S. 29 ff.

[5] I. V. Uspensky and M. A Heaslet, *Elementary Number Theory*, New York-London. 1939, S. 43,44.

Reçu par la Rédaction le 23. 9. 1964

ACTA ARITHMETICA
XI (1965)

Irrational power series II*

by

L. J. Mordell (Cambridge)

§ 1. Let a be a real irrational number and denote by $\{a\} = a-[a]$ the fractional part of a and so $0 \leqslant \{a\} < 1$. Some forty years ago, Hecke discussed the behaviour of the function

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \{na\} x^n \tag{1}$$

on its circle of convergence $|x| = 1$. He showed that this is a line of essential singularities of $g(x)$.

Similar questions have been discussed by Salem ([1]), M. Newman ([2]) and myself ([3], [4]).

In a very recent paper ([5]), Wolfgang Schwarz discusses, *inter alia*, a similar question for the function

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(\{na\}) x^n, \tag{2}$$

where $\varphi(y)$ is a function of y.

The proof is based on Hecke's method and uses the theory of uniform distribution. Some of his results are included in my subsequent ([6])

THEOREM. *Let*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(\{an+\beta\}) x^n, \quad |x| < 1, \tag{3}$$

where a is irrational and β is real, and $\varphi(y)$ is continuous for $0 \leqslant y \leqslant 1$. Then $f(x)$ is a rational function of x if and only if $\varphi(y)$ is a finite Fourier series $\varphi(y) = \sum_{r=-L}^{L} a_r e^{2r\pi i x}$, and so

$$f(x) = \sum_{r=-L}^{L} \frac{a_r e^{2r\pi i \beta}}{1-xe^{2r\pi i a}}. \tag{4}$$

* This work was supported in part by the National Science Foundation, Washington, D. C., U.S.A.