ACTA ARITHMETICA
X (1964)

# Ein Gitterpunktsproblem

von

E. Krätzel (Jena)

**§ 1. Einleitung.** Es bezeichne $r_{2,2}(n)$ die Anzahl der ganzzahligen Lösungen von

$$a^2+b^2 = n,$$

also die Anzahl der Darstellungen einer natürlichen Zahl als Summe von zwei Quadraten. Mit $R_{2,2}(x)$ soll die Anzahl der Gitterpunkte bezeichnet werden, die in oder auf dem Kreis

$$\xi^2+\eta^2 = x$$

liegen, so daß

$$R_{2,2}(x) = \sum_{n\leqslant x} r_{2,2}(n)$$

gilt. Eine elementare Abschätzung von $R_{2,2}(x)$ besagt, daß in

$$R_{2,2}(x) = \pi x+O(x^{a}) \tag{1}$$

die Konstante $a$ in dem Bereich

$$0 \leqslant a \leqslant \tfrac{1}{2}$$

zu suchen ist. Eine Verkleinerung des für $a$ in Frage kommenden Intervalls $[0, \frac{1}{2}]$ ist möglich über eine transzendente Darstellung von $R_{2,2}(x)$:

$$\int_0^x R_{2,2}(t)\,dt = \frac{\pi}{2}x^2+\frac{x}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_{2,2}(n)}{n}J_2(2\pi\sqrt{nx}). \tag{2}$$

Führt man noch die Funktion

$$R'_{2,2}(x) = \begin{cases} R_{2,2}(x) & \text{für} \quad x \not\equiv 0\ (1), \\ R_{2,2}(x)-\frac{1}{2}r_{2,2}(x) & \text{für} \quad x \equiv 0\ (1) \end{cases}$$

ein, so besteht für diese die *Hardysche Identität*

$$R'_{2,2}(x) = \pi x+\sqrt{x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r_{2,2}(n)}{\sqrt{n}}J_1(2\pi\sqrt{nx}). \tag{3}$$

Die Abschätzung der absolut-konvergenten Reihe in (2) erlaubt eine Verbesserung der Abschätzung (1) zu

$$R_{2,2}(x) = \pi x + O(x^{1/3}),$$

ein Ergebnis, welches schon Sierpiński (1906) bekannt war. Hardy und Landau schafften (1915) $a \geqslant \frac{1}{4}$ und van der Corput zeigte (1923), daß $a < \frac{1}{3}$ ist. Diese Ergebnisse sind bei Landau [3] nachzulesen. Übrigens zeigte noch Titchmarsh (1933) $a \leqslant \frac{15}{46}$ und Hua (1942) $a \leqslant \frac{13}{40}$.

In dieser Abhandlung soll das Kreisproblem in einen allgemeineren Zusammenhang eingeordnet werden. Mit $r_{2k,2}(n)$ werde jetzt die Anzahl der ganzzahligen Lösungen von

$$a^{2k} + b^{2k} = n$$

bezeichnet. Mit $R_{2k,2}(x)$ wird die Anzahl der Gitterpunkte angegeben, die auf der Fläche liegen, die von der Kurve

$$\xi^{2k} + \eta^{2k} = x$$

begrenzt wird. Es ist daher

$$R_{2k,2}(x) = \sum_{n \leqslant x} r_{2k,2}(n), \tag{4}$$

und entsprechend wie im Kreisfall wird noch

$$R'_{2k,2}(x) = \begin{cases} R_{2k,2}(x) & \text{für} \quad x \not\equiv 0\ (1), \\ R_{2k,2}(x) - \frac{1}{2} r_{2k,2}(x) & \text{für} \quad x \equiv 0\ (1) \end{cases}$$

gesetzt. Zur Abschätzung bzw. zur Darstellung von $R_{2k,2}(x)$ treten nun zum Kreisfall — der hier für $k = 1$ also Spezialfall enthalten ist — analoge Probleme auf.

In § 2 werde ich die triviale Abschätzung

$$R_{2k,2}(x) = \frac{1}{k} \cdot \frac{\Gamma^2(1/2k)}{\Gamma(1/k)} x^{1/k} + O(x^{a_k}), \qquad \frac{1}{k} - 1 \leqslant a_k \leqslant \frac{1}{2k} \tag{5}$$

beweisen, die keine transzendenten Hilfsmittel benötigt.

In § 3 geht es um die Übertragung von (2) und (3). Das dies in entsprechender Gestalt — Reihe über Bessel-Funktionen — nicht möglich sein wird, dürfte von vornherein klar sein. Ich werde die rechte Seite in Form einer *Faltung* darstellen. Wie üblich werde ich

$$F(t) * G(t) = \int_0^t F(\tau) G(t - \tau)\, d\tau$$



schreiben. Ich setze

$$S(x) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2\pi n x}{n}.$$

In der Reihe hat $n = 0$ einen Sinn, indem man hierfür die Potenzreihenentwicklung der Sinus-Funktion aufschreibt. Ich werde

$$\int_0^x R_{2k,2}(t)\, dt = S(x^{1/2k}) * S(x^{1/2k}) \tag{6}$$

beweisen. In der Formel (6) ist für $k = 1$ tatsächlich (2) enthalten, da nach Doetsch [1]

$$\frac{1}{\pi^2 nm} \int_0^x \sin 2\pi n \sqrt{\tau} \sin 2\pi m \sqrt{x - \tau}\, d\tau = \frac{x}{\pi(n^2 + m^2)} J_2\left(2\pi \sqrt{(n^2 + m^2) x}\right)$$

gilt. An Stelle von (3) wird dann

$$R'_{2k,2}(x) = \frac{d}{dx} S(x^{1/2k}) * S(x^{1/2k}) \tag{7}$$

erscheinen.

In § 4 wird

$$R_{2k,2}(x) = \frac{1}{k} \cdot \frac{\Gamma^2(1/2k)}{\Gamma(1/k)} x^{1/k} + O(x^{(2k-1)/k(4k-1)}) \tag{8}$$

gezeigt. Für $k = 1$ ist hierin das Ergebnis von Sierpiński enthalten.

## § 2. Triviale Abschätzung.

$$\begin{aligned} R_{2k,2}(x) &= \sum_{\nu \leqslant x} r_{2k,2}(\nu) = \sum_{n^{2k} + m^{2k} \leqslant x} 1 = \sum_{|n| \leqslant x^{1/2k}} \sum_{|m| \leqslant (x - n^{2k})^{1/2k}} 1 \\ &= \sum_{|n| \leqslant x^{1/2k}} \left(1 + 2\left[(x - n^{2k})^{1/2k}\right]\right) = 2 \sum_{|n| \leqslant x^{1/2k}} (x - n^{2k})^{1/2k} + O(x^{1/2k}) \\ &= 4 \sum_{n=0}^{[x^{1/2k}]} (x - n^{2k})^{1/2k} + O(x^{1/2k}) = 4 \int_0^{x^{1/2k}} (x - t^{2k})^{1/2k}\, dt + O(x^{1/2k}) \\ &= \frac{2}{k} \int_0^1 t^{1/2k - 1} (1 - t)^{1/2k}\, dt + O(x^{1/2k}) = \frac{1}{k} \cdot \frac{\Gamma^2(1/2k)}{\Gamma(1/k)} x^{1/k} + O(x^{1/2k}). \end{aligned}$$

Damit ist $a_k \leqslant 1/2k$ gezeigt. Nun ist noch $a_k \geqslant 1/k - 1$ nachzuweisen Annahme, es gilt

$$R_{2k,2}(x) = \frac{1}{k} \cdot \frac{\Gamma^2(1/2k)}{\Gamma(1/k)} x^{1/k} + o(x^{1/k - 1}).$$

Es sei $n$ eine ganze Zahl, dann ist

$$R_{2k,2}\left(n+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{k}\cdot\frac{\Gamma^2(1/2k)}{\Gamma(1/k)}\left(n+\frac{1}{2}\right)^{1/k}-R_{2k,2}(n)+\frac{1}{k}\cdot\frac{\Gamma^2(1/2k)}{\Gamma(1/k)}\,n^{1/k}$$

$$=\frac{1}{k}\cdot\frac{\Gamma^2(1/2k)}{\Gamma(1/k)}\,n^{1/k}\left\{1-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{1/k}\right\}=\frac{-1}{2k^2}\cdot\frac{\Gamma^2(1/2k)}{\Gamma(1/k)}\,n^{1/k-1}+O(n^{1/k-2})$$

im Widerspruch zu obiger Annahme.

**§ 3. Transzendente Darstellungen.** Ausgangspunkt ist die *Thetafunktion*

$$\theta_{2k}(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{\pi}{k}n^{2k}t},\qquad \mathrm{Re}(t)>0.$$

Sie besitzt auf Grund der *Poissonschen Summenformel* eine zweite Darstellung der Gestalt

$$\theta_{2k}(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{2\pi i\left(n\tau+\frac{it}{2k}\tau^{2k}\right)\right\}d\tau. \tag{9}$$

Näheres über solche „Höheren Thetafunktionen" findet sich in [2]. Nun wird mit $c>0$ (Integral über die vertikale Gerade mit der Abszisse $c$) gebildet:

$$\int_{(c)}s^{-2}e^{sx}\theta_{2k}^2\left(\frac{ks}{\pi}\right)ds=\sum_{n,m=-\infty}^{+\infty}\int_{(c)}s^{-2}\exp\{s(x-n^{2k}-m^{2k})\}ds$$

$$=\sum_{n^{2k}+m^{2k}\leqslant x}(x-n^{2k}-m^{2k})=\int_0^x R_{2k,2}(t)\,dt.$$

Das ist die linke Seite von (6). Um die rechte Seite von (6) zu erhalten, wird die zweite Darstellung (9) der Thetafunktion benötigt. Hierzu ist zu bemerken, daß die verwendete Integralbildung gerade die Umkehrformel der *Laplace-Transformation* darstellt. Es ist also zu untersuchen, welche Funktion durch Laplace-Transformation auf

$$\frac{1}{s}\,\theta_{2k}\left(\frac{ks}{\pi}\right)$$

in der Darstellung (9) abgebildet wird. Diese Funktion wird $S(t^{1/2k})$ sein. Weiter wird dann ausgenutzt, daß die Faltung zweier Funktionen durch Laplace-Transformation auf das Produkt ihrer Laplace-Transformierten



abgebildet wird. Es ist

$$\mathscr{L}\left\{\frac{1}{\pi n}\sin 2\pi n t^{1/2k}\right\}=\frac{1}{\pi n}\int_0^\infty e^{-st}\sin 2\pi n t^{1/2k}\,dt$$

$$=\frac{2k}{\pi n}\int_0^\infty t^{2k-1}e^{-st^{2k}}\sin 2\pi n t\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{2\pi i(nt+\frac{1}{2}ist^{2k})}\,dt.$$

Das gilt auch für $n=0$, also

$$\mathscr{L}\{S(t^{1/2k})\}=\frac{1}{s}\,\theta_{2k}\left(\frac{ks}{\pi}\right)$$

und

$$\mathscr{L}\{S(t^{1/2k})*S(t^{1/2k})\}=s^{-2}\theta_{2k}^2\left(\frac{ks}{\pi}\right).$$

Damit gilt

$$\int_0^x R_{2k,2}(t)\,dt=S(x^{1/2k})*S(x^{1/2k}),$$

und die Formel (6) ist bewiesen.

Formel (7) ergibt sich nun leicht:

$$\int_{(c)}\frac{1}{s}e^{xs}\theta_{2k}^2\left(\frac{ks}{\pi}\right)ds=\sum_{n,m=-\infty}^{+\infty}\int_{(c)}\frac{1}{s}\exp\{s(x-n^{2k}-m^{2k})\}ds=R'_{2k,2}(x).$$

$$\mathscr{L}\left\{\frac{d}{dt}S(t^{1/2k})*S(t^{1/2k})\right\}=\int_0^\infty e^{-st}\frac{d}{dt}S(t^{1/2k})*S(t^{1/2k})\,dt$$

$$=s\int_0^\infty e^{-st}S(t^{1/2k})*S(t^{1/2k})\,dt=\frac{1}{s}\,\theta_{2k}^2\left(\frac{ks}{\pi}\right).$$

Also gilt die Formel (7)

$$R'_{2k,2}(x)=\frac{d}{dx}S(x^{1/2k})*S(x^{1/2k}).$$

**§ 4. Verbesserung der Abschätzung.** Die Formel (6) besagt

$$\int_0^x R_{2k,2}(t)\,dt$$

$$=\frac{1}{k+1}\cdot\frac{\Gamma^2(1/2k)}{\Gamma(1/k)}\,x^{1+1/k}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{\substack{n,m=0\\ n^2+m^2>0}}^{\infty}\frac{1}{nm}\int_0^x\sin 2\pi n t^{1/2k}\sin 2\pi m(x-t)^{1/2k}\,dt\ (^1).$$

(1) Bildet man das Quadrat der Thetafunktionen in der Darstellung (9), und transformiert die entstehende Doppelreihe nach der Laplaceschen Umkehrformel, so entsteht die rechte Seite dieser Darstellung gliedweise. Daß diese Reihe absolut konvergiert, kommt bei der Abschätzung automatisch mit heraus.

Es wird gebildet (später wird $\beta = (4k-3)/(4k-1)$, $\alpha = 1/2k(4k-1)$ gesetzt):

$$\int\limits_x^{x\pm x^\beta} \left\{ R_{2k,2}(t) - \frac{1}{k}\cdot\frac{\Gamma^2(1/2k)}{\Gamma(1/k)}\, t^{1/k} \right\} dt$$

$$= \frac{4}{\pi^2} \sum_{nm > x^{2\alpha}} \frac{1}{nm} \left[ \int\limits_0^y \sin 2\pi n t^{1/2k} \sin 2\pi m (y-t)^{1/2k} dt \right]_{y=x}^{y=x\pm x^\beta} +$$

$$+ \frac{4}{\pi k} \sum_{\substack{nm \leqslant x^{2\alpha} \\ n^2+m^2>0}} \frac{1}{n} \int\limits_x^{x\pm x^\beta} \int\limits_0^y (y-t)^{1/2k-1} \sin 2\pi n t^{1/2k} \cos 2\pi m (y-t)^{1/2k} dt\, dy .$$

Es sind nun die beiden Summen abzuschätzen. Zunächst ist

$$H_1(y) = \frac{1}{nm} \int\limits_0^y \sin 2\pi n t^{1/2k} \sin 2\pi m (y-t)^{1/2k} dt$$

$$= \frac{4\pi k}{n} y^{1+1/2k} \int\limits_0^1 (1-t)^{1/2k-1} \cos 2\pi m [y(1-t)]^{1/2k} \sum_{\nu=0}^{2k-1} \frac{\nu! \binom{2k-1}{\nu}}{(2\pi)^{\nu+1}} A_\nu(n, y, t)\, dt,$$

$$A_\nu(n, y, t) = t^{1-(\nu+1)/2k} (yn)^{-(\nu+1)/2k} \cos\left[ 2\pi n (yt)^{1/2k} + \frac{\pi\nu}{2} \right].$$

Für jedes einzelne Integral gilt

$$\left| \frac{1}{n} y^{1+1/2k} \int\limits_0^1 (1-t)^{1/2k-1} \cos 2\pi m [y(1-t)]^{1/2k} A_\nu(n, y, t)\, dt \right|$$

$$\leqslant \frac{2k}{n^{\nu+2}} y^{1-\nu/2k} \int\limits_0^1 t^{4k-(\nu+2)} (1-t^{2k})^{1/2k-1} \left| \cos\left( 2\pi n y^{1/2k} t + \frac{\pi\nu}{2} \right) \right| dt$$

$$\leqslant c_\nu \frac{y^{1-1/4k^2-\nu/2k}}{n^{2+1/2k+\nu}} \leqslant b_1 \frac{y^{1-1/4k^2}}{n^{2+1/2k}}.$$

Die vorletzte Abschätzung muß noch gerechtfertigt werden. Es werde für einen Moment $z = ny^{1/2k}$ gesetzt. Für große $z$ gilt

$$\int\limits_{1-1/z}^1 \leqslant \int\limits_{1-1/z}^1 (1-t^{2k})^{1/2k-1} dt < \int\limits_{1-1/z}^1 (1-t)^{1/2k-1} dt = 2kz^{-1/2k},$$



und nach dem zweiten Mittelwertsatz ist

$$\int\limits_0^{1-1/z} \leqslant \left[ 1 - \left( 1 - \frac{1}{z} \right)^{2k} \right]^{1/2k-1} \frac{1}{\pi z} < z^{-1/2k}.$$

Folglich ist

$$|H_1(y)| < b_2 \frac{y^{1-1/4k^2}}{n^{2+1/2k}}.$$

Wegen der Symmetrie der Faltung gilt auch

$$|H_1(y)| < b_3 \frac{y^{1-1/4k^2}}{m^{2+1/2k}},$$

so daß schließlich

$$\left| \sum_{nm > x^{2\alpha}} \right| < b_4 x^{1-1/4k^2} \sum_{nm > x^{2\alpha}} \mathrm{Min}\left( \frac{1}{n^{2+1/2k}}, \frac{1}{m^{2+1/2k}} \right)$$

wird. Hier folgt weiter:

$$\left| \sum_{nm > x^{2\alpha}} \right| < b_5 x^{1-1/4k^2} \left\{ \sum_{n > x^\alpha} \sum_{m \leqslant n} \frac{1}{n^{2+1/2k}} + \sum_{m > x^\alpha} \sum_{n \leqslant m} \frac{1}{m^{2+1/2k}} \right\}$$

$$= 2b_5 x^{1-1/4k^2} \sum_{n > x^\alpha} \frac{1}{n^{1+1/2k}} < b_6 x^{1-1/4k^2-\alpha/2k}.$$

Nun ist noch die Abschätzung von

$$H_2(y) = \frac{1}{n} \int\limits_0^y (y-t)^{1/2k-1} \sin 2\pi n t^{1/2k} \cos 2\pi m (y-t)^{1/2k} dt$$

vorzunehmen. Es ist

$$|H_2(y)| \leqslant \frac{2k}{n} y^{1/2k} \int\limits_0^1 t^{2k-1} (1-t^{2k})^{1/2k-1} |\sin 2\pi n (yt)^{1/2k}|\, dt \leqslant D_1 \frac{y^{1/2k-1/4k^2}}{n^{1+1/2k}}.$$

Diese letzte Abschätzung folgt genau wie bei $H_1(y)$. Sie gilt auch für $m = 0$ (²). Entsprechend ist (auch für $n = 0$)

$$|H_2(y)| \leqslant D_2 \frac{y^{1/2k-1/4k^2}}{m^{1+1/2k}}.$$

(²) In diesem Fall kann später über $n$ durchsummiert werden!

Damit erhält man

$$\Big|\sum_{\substack{nm\leqslant x^{2a}\\ n^2+m^2>0}}\int_x^{x\pm x^\beta} H_2(y)\,dy\Big|$$

$$\leqslant D_3 x^{1/2k-1/4k^2+\beta}+D_4 x^{1/2k-1/4k^2+\beta}\sum_{1\leqslant nm\leqslant x^{2a}}\operatorname{Min}\left(\frac{1}{n^{1+1/2k}},\frac{1}{m^{1+1/2k}}\right)$$

$$< D_3 x^{1/2k-1/4k^2+\beta}+2D_4 x^{1/2k-1/4k^2+\beta}\sum_{1\leqslant n\leqslant x^{2a}}\ \sum_{1\leqslant m\leqslant \operatorname{Min}(n,x^a)}\frac{1}{n^{1+1/2k}}$$

$$= D_3 x^{1/2k-1/4k^2+\beta}+2D_4 x^{1/2k-1/4k^2+\beta}\sum_{1\leqslant n\leqslant x^{2a}}\frac{\operatorname{Min}(n,x^a)}{n^{1+1/2k}}$$

$$< D_3 x^{1/2k-1/4k^2+\beta}+2D_4 x^{1/2k-1/4k^2+\beta}(ax^{a(1-1/2k)}+bx^{a(1-1/k)})$$

$$< D_5 x^{1/2k-1/4k^2+\beta+a(1-1/2k)}.$$

Damit folgt nun endlich

(10)

$$\int_x^{x\pm x^\beta}\left\{R_{2k,2}(t)-\frac{1}{k}\cdot\frac{\Gamma^2(1/2k)}{\Gamma(1/k)}t^{1/k}\right\}dt = O(x^{1-1/4k^2-a/2k})+O(x^{1/2k-1/4k^2+\beta+a(1-1/2k)}).$$

Andererseits ist

$$\int_x^{x+x^\beta}\left\{R_{2k,2}(t)-\frac{1}{k}\cdot\frac{\Gamma^2(1/2k)}{\Gamma(1/k)}t^{1/k}\right\}dt \geqslant x^\beta\left\{R_{2k,2}(x)-\frac{1}{k}\cdot\frac{\Gamma^2(1/2k)}{\Gamma(1/k)}(x+x^\beta)^{1/k}\right\}$$

$$= x^\beta\left\{R_{2k,2}(x)-\frac{1}{k}\cdot\frac{\Gamma^2(1/2k)}{\Gamma(1/k)}x^{1/k}\right\}+O(x^{2\beta-1+1/k}),$$

also

(11) $$R_{2k,2}(x)-\frac{1}{k}\cdot\frac{\Gamma^2(1/2k)}{\Gamma(1/k)}x^{1/k}$$

$$\leqslant O(x^{\beta-1+1/k})+O(x^{1-1/4k^2-a/2k-\beta})+O(x^{1/2k-1/4k^2+a(1-1/2k)}).$$

Nimmt man in (10) das Minuszeichen, so erhält man auf entsprechendem Wege in (11) das $>$-Zeichen, also besteht Gleichheit. Setzt man

$$a=\frac{1}{2k(4k-1)},\qquad \beta=\frac{4k-3}{4k-1},$$



so werden die drei Exponenten in (11) gleich, und es ergibt sich

$$R_{2k,2}(x)=\frac{1}{k}\cdot\frac{\Gamma^2(1/2k)}{\Gamma(1/k)}x^{1/k}+O(x^{(2k-1)/k(4k-1)}).$$

In

$$R_{2k,2}(x)=\frac{1}{k}\cdot\frac{\Gamma^2(1/2k)}{\Gamma(1/k)}x^{1/k}+O(x^{a_k})$$

gilt also sicher

$$a_k\leqslant\frac{2k-1}{k(4k-1)}=\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k(4k-1)}.$$

Die Abschätzung von $H_2(y)$ legt es nahe,

$$a_k\geqslant\frac{1}{2k}-\frac{1}{4k^2}$$

zu vermuten. Damit entsteht das Problem, die wahre Konstante in den Grenzen

$$\frac{1}{2k}-\frac{1}{4k^2}\leqslant a_k\leqslant\frac{1}{2k}-\frac{1}{2k(4k-1)}$$

zu bestimmen, aber diese ist noch nicht einmal im Fall des Kreises ($k=1$) bekannt.

### Literaturverzeichnis


[1] G. Doetsch, *Handbuch der Laplace-Transformation*, Bd. III, Basel und Stuttgart 1956.

[2] E. Krätzel, *Höhere Thetafunktionen*, Teil I und II, Math. Nachrichten, im Druck.

[3] E. Landau, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, Bd. II, Leipzig 1927.


*Reçu par la Rédaction le 26. 10. 1963*