further, by (5.17) and (4.2),

$$e^{-kb^2}|I_k| \geqslant T^{1/2}e^{-610\log^{2/3}T} - c_8,$$

whence (2.15) follows at once.

References

[1] S. Knapowski, *On oscillations of certain means formed from the Möbius series I*, Acta Arithm. 8 (1963), pp. 311-320.

[2] — *Mean-value estimations for the Möbius function II*, Acta Arithm. 7 (1962), pp. 337-343.

[3] — and P. Turán, *Comparative prime number theory III*, Acta Math. Ac. Sc. Hung. 13 (1962), pp. 343-364.

[4] — and P. Turán, *Further developments in the comparative prime number theory II*, Acta Arithm. 10(1964),pp.293-313.

[5] E. C. Titchmarsh, *The theory of the zeta-function of Riemann*, Oxford 1951.

Reçu par la Rédaction le 4. 4. 1964

ACTA ARITHMETICA
X (1965)

Одномерное решето

Б. В. Левин (Ташкент)

1. В вопросе об оценке числа почти простых чисел в довольно широком классе последовательностей важную роль играет метод эратосфенова решета.

Класс последовательностей к которым успешно применяется метод решета можно охарактеризовать следующим образом. Он состоит из последовательностей a_n „в среднем'' равномерно распределенных в прогрессиях. Точнее, для этой последовательности должны существовать мультипликативная функция $\psi(D)$ и число γ такие, что для всех $\alpha \leqslant \gamma - \varepsilon$ и любых A и $\varepsilon > 0$

$$\sum_{D\leqslant N^\alpha} \mu^2(D) \max_{\substack{l \bmod D\\ l\in U(D)}} \Bigg| \sum_{\substack{n=1\\ a_n\equiv l(\bmod D)}}^{N} 1 - \frac{N\psi(D)}{D}\Bigg| = O\left(\frac{N}{\log^A N}\right), \tag{1}$$

где $\mu(D)$ — функция Мёбиуса, $U(D)$ — множество тех l для которых сравнению $a_n \equiv l(\bmod D)$ удовлетворяет бесконечно много n. Кроме того должно выполняться равенство

$$\sum_{p\leqslant x} \psi(p)\log p = rx + O(xe^{-a\sqrt{\log x}}), \tag{2}$$

где r — натуральное число, $a = \mathrm{Const} > 0$. $\psi(D)$ может зависить от N, но эта зависимость должна быть такой чтобы равенство (2) было равномерным по N при $x \leqslant N^B$, где $B = \mathrm{Const}$. Схема применения решета и характер оценок при этом не зависят от тонкой арифметической природы последовательности a_n и вполне определяются числом r. В связи с этим условимся называть решето *r-мерным*, если оно применяется к последовательности a_n для которой выполнены условия (1) и (2).

Другим важным вопросом в применениях решета является вопрос об определении почти простоты. Условимся называть число *k-почти простым* и обозначать его P_k, если оно содержит не более k простых множителей в том числе и одинаковых.

Основной задачей метода решета для оценок снизу является доказательство бесконечности k-почти простых чисел в последовательностях с, как это только возможно, малым k. При этом оказывается, что число k также не зависит от тонких арифметических свойств последовательности, а определяется числом r и обобщенной степенью последовательности a_n под которой будем понимать отношение $\tau = t/\gamma$, где t — наименьшее число, удовлетворяющее неравенству

$$\max_{1 \leqslant n \leqslant N} a_n \leqslant N^{t+\varepsilon},$$

ε — сколь-угодно малая положительная величина.

Известно, что результаты А. Сельберга по методу решета были опубликованы им в виде коротких сообщений [1], [2], содержащих только основную идею нового решета для оценок сверху.

Первый полный вариант решета А. Сельберга для оценок снизу был дан А. И. Виноградовым ([3]). Несколько позже Ван Юань ([4]) предложил другую схему, являющуюся комбинацией решета А. Сельберга и решета Вигго Бруна. Схема Ван Юаня связана с громоздкими вычислениями и не осуществима для произвольных r, в отличие от схемы А. И. Виноградова (см. [5]).

В работе [6] к общей задаче решета применялся аппарат дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, что позволило упростить метод решета и сократить численные расчеты.

В этой статье усиливаются результаты работы [6] для случая одномерного решета. При доказательстве основных теорем вообще удается избежать каких-либо численных расчетов.

Отметим, что аналогичные упрощения и усиления по сравнению с [6] можно провести и в общем случае r-мерного решета.

В теореме 1 этой работы дается зависимость k от τ при $r = 1$ лучшая, чем все известные до сих пор ([6], [15]). Ценой проведения незначительного численного расчета эту зависимость можно еще улучшить.

2. Ввиду необычайной для метода решета простоты оценок снизу в одномерном случае особую роль начинают играть результаты, позволяющие сводить двумерные задачи к одномерным. Осуществляется это следующим образом.

Для изучения вопроса об одновременной почти простоте двух выражений $a(x)$ и $b(x)$ нужно, вообще говоря, применить двумерное решето к последовательности $a(x)\cdot b(x)$. Однако, если известно, что последовательность чисел a_n, таких, что $b(a_n)$ — почти простое число, равномерно „в среднем" распределена по прогрессиям, то для решения первоначально поставленной задачи достаточно применить одномерное решето к последовательности $a(a_n)$.

Вопрос о равномерном распределении в прогрессиях даже „в среднем" очень сложен. Однако в последние годы благодаря удачной комбинации методов Ю. В. Линника, А. Реньи, М. Барбану ([7], [8]) и Пан Чэн Дуну ([9]) удалось получить необходимые для применений к решету результаты относительно некоторых последовательностей a_n. М. Барбан ([7]) и Пан Чэн Дун ([9]) доказали, что для последовательности $a_n = p_n$, где p_n — n-ое простое число, равенство (1) имеет место при $\alpha \leqslant \frac{3}{8} - \varepsilon$. М. Барбан ([8]) доказал, что для последовательности pq, где p и q простые числа, $p \leqslant x^{\alpha}$, $q \leqslant x^{1-\alpha}$, $\alpha \leqslant \frac{1}{2}$

$$(3) \qquad \sum_{D \leqslant \frac{x^{\alpha}}{\log^{5A} x}} \mu^2(D) \max_{\substack{l \bmod D \\ (l,D)=1}} \Bigg| \sum_{\substack{p \leqslant x^{\alpha} \\ q \leqslant x^{1-\alpha} \\ pq \equiv l (\bmod D)}} 1 - \frac{\operatorname{li} x^{\alpha} \cdot \operatorname{li} x^{1-\alpha}}{\varphi(D)} \Bigg| = O\left(\frac{x}{\log^{A} x}\right).$$

В сочетании с одномерным решетом это позволило решить некоторые бинарные задачи, ибо определение почти простоты зависит от характера зависимости k от τ, который определяется с помощью решета (теорема 1) и от самого τ, которое в свою очередь зависит от γ.

3. В дальнейшем мы опираемся на следующую лемму, являющуюся частным случаем, доказанной в [6] теоремы, справедливой при любом r.

Лемма 1. *Пусть $I_Q(N, N^{1/\beta}, N^{1/\delta})$ — число членов последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_N$, не делящихся ни на какое простое число меньшее чем $N^{1/\beta}$ и имеющих $\leqslant Q$ простых делителей в интервале $(N^{1/\beta}, N^{1/\delta})$. Тогда применение одномерного решета к последовательности a_n дает*

$$(4) \qquad I_Q(N, N^{\gamma/\beta}, N^{\gamma/\delta}) \geqslant \frac{N}{\gamma \log N} \prod_p \frac{1 - (\psi(p)/p)}{1 - 1/p} \times$$

$$\times \left\{ e^{-C} \log\log N - 2 \int\limits_{(\beta-1)/2}^{(\log\log N - 1)/2} \frac{du}{z(u)} - \frac{\beta}{Q+1} \int\limits_{\beta(1-1/\delta)}^{\beta-1} \frac{du}{(\beta-u) z(u)} \right\} +$$

$$+ O\Bigg(\sum_{D \leqslant N^{\gamma}} \mu^2(D) \tau_3(D) \Bigg| \sum_{\substack{n=1 \\ a_n \equiv 0 (\bmod D)}}^{N} 1 - \frac{N\psi(D)}{D} \Bigg| \Bigg).$$

Здесь C — постоянная Эйлера-Маскерони, $\psi(n)$ — произвольная мультипликативная функция, удовлетворяющая условию (2) с $r = 1$ (это влечет за собой сходимость произведения $\prod_p \left(1 - \frac{\psi(p)}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1}$ рас-

смотренного по всем простым числам) и $\psi(p) < p$ для всех p; $z(u)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению с запаздывающим аргументом

$$uz'(u) - z(u) + z(u-1) = 0 \tag{5}$$

с начальным условием $z(u) = u$ при $0 \leqslant u \leqslant 1$; $\tau_3(n)$ число представлений n в виде $n = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$; β, δ и γ произвольные вещественные числа, удовлетворяющие условию $0 < \gamma < 1 < \delta \leqslant \beta$, Q — целое число.

Так как $z(u)$ уже при $u > 2$ неэлементарная функция и интегралы в (4) не удается вычислить, то для оценки I_Q обычно применялись численные методы. Использование того, что $z(u)$ удовлетворяет уравнению (5) значительно сокращает расчеты, а иногда, вообще, позволяет избежать их. Для этой цели служит

Лемма 2. *Пусть w — произвольное вещественное число, удовлетворяющее неравенству $\beta \leqslant w \leqslant (\log\log N - 1)/2$, A — произвольная положительная постоянная. Тогда*

$$e^{-C}\log\log N - 2\int_{(\beta-1)/2}^{(\log\log N-1)/2} \frac{du}{z(u)} \tag{6}$$

$$\geqslant e^{-C} + \frac{w-3}{z\big((w-1)/2\big)} + \frac{2e^{-C}}{z\big((w-1)/2\big)}\int_{(w-3)/2}^{(w-1)/2} z(u)\,du - 2\int_{(\beta-1)/2}^{(w-1)/2}\frac{du}{z(u)} + O\left(\frac{1}{\log^A N}\right).$$

Доказательство. Из уравнения (5) и начальных условий вытекает, что

$$z'(u) = \frac{z(u)-z(u-1)}{u} > 0$$

при любом u. Следовательно, для любого w, удовлетворяющего условию леммы, можно записать неравенство

$$e^{-C}\log\log N - 2\int_{(\beta-1)/2}^{(\log\log N-1)/2}\frac{du}{z(u)} \tag{7}$$

$$= e^{-C}w - 2\int_{(\beta-1)/2}^{(w-1)/2}\frac{du}{z(u)} - 2e^{-C}\int_{(w-1)/2}^{(\log\log N-1)/2}\frac{e^C - z(u)}{z(u)}\,du$$

$$\geqslant e^{-C}w - 2\int_{(\beta-1)/2}^{(w-1)/2}\frac{du}{z(u)} - \frac{2e^{-C}}{z\big((w-1)/2\big)}\int_{(w-1)/2}^{(\log\log N-1)/2}\big(e^C - z(u)\big)\,du.$$

Воспользовавшись уравнением (5) в форме

$$u\big(e^C - z(u)\big)' = \big(e^C - z(u)\big) - \big(e^C - z(u-1)\big)$$

и интегрируя по частям, получаем

$$\int_{(w-1)/2}^{(\log\log N-1)/2}\big(e^C - z(u)\big)\,du \tag{8}$$

$$= -\frac{w-1}{2}\left(e^C - z\left(\frac{w-1}{2}\right)\right) + \frac{\log\log N-1}{2}\left(e^C - z\left(\frac{\log\log N-1}{2}\right)\right) +$$

$$+\int_{(w-1)/2}^{(\log\log N-1)/2}\Big\{\big(e^C - z(u)\big) - \big(e^C - z(u-1)\big)\Big\}\,du.$$

В [10] показано, что при растущем u

$$z(u) = e^C + O(e^{-u\log u}). \tag{9}$$

Из (7)-(9) после несложных преобразований получаем (6). Лемма 2 полезна тем, что для оценки правой части (6) достаточно знать $z(u)$ в коротком интервале $\big(0, (w-1)/2\big)$. Так как $z(u)$ очень быстро стремится к (e^C ср. (9)), то уже при малых u оно практически мало отличается от e^C и ошибка даже при $w = 3$ достаточно мала. С увеличением w точность оценки (6) возрастает, но при этом вычисления становятся более громоздкими. Выбор $w = 3$ обеспечивает элементарность правой части неравенства (4), ибо в этом случае $0 \leqslant u \leqslant 1$ и, следовательно, $z(u) = u$. Неравенство (4) можно тогда записать так

$$I_Q(N, N^{\gamma/\beta}, N^{\gamma/\delta}) \tag{10}$$

$$\geqslant \frac{2N}{\gamma\log N}\prod_p \frac{1-\big(\psi(p)/p\big)}{1-1/p}\left\{e^{-C} + \log\frac{\beta-1}{2} - \frac{1}{Q+1}\log\frac{\beta-1}{\delta-1}\right\} +$$

$$+ O\left(\frac{N}{\log^A N}\right) + O\left(\sum_{D\leqslant N^\gamma}\mu^2(D)\tau_3(D)\left|\sum_{\substack{n=1\\ a_n\equiv 0 (\mathrm{mod}\, D)}}^{N} 1 - \frac{N\psi(D)}{D}\right|\right),$$

где $0 < \gamma < 1 < \delta \leqslant \beta \leqslant 3$.

Выбирая γ, β, δ и Q так чтобы величина

$$k = [\tau\delta + Q(1-\delta/\beta) - \varepsilon]$$

достигала минимума при условиях, что

$$e^{-C} + \log\frac{\beta-1}{2} - \frac{1}{Q+1}\log\frac{\beta-1}{\delta-1} = 0{,}051$$

и

$$\sum_{D\leqslant N^\gamma}\mu^2(D)\tau_3(D)\left|\sum_{\substack{n=1\\ a_n\equiv 0 (\mathrm{mod}\, D)}}^{N} 1 - \frac{N\psi(D)}{D}\right| = o\left(\frac{N}{\log N}\right),$$

получаем, что в последовательности $a_1, a_2, \ldots, a_N$ имеется больше чем

$$0{,}05\frac{N}{\gamma\log N}\prod_p\frac{1-(\psi(p)/p)}{1-1/p}$$

k-почти простых чисел.

Целесообразный выбор чисел β, δ и Q дает следующие значения k в зависимости от τ: $k=2$ при $\tau\leqslant 1{,}6$; $k=3$ при $1{,}6<\tau\leqslant 2{,}23$; $k=4$ при $2{,}23<\tau\leqslant 2{,}96$; $k=5$ при $2{,}96<\tau\leqslant 3{,}7$ и так далее. Такая зависимость k от τ позволяет доказать сформулированные выше теоремы 4-7 и, следовательно обойтись при их доказательстве без каких-либо численных расчетов. Теоремы 1-3 сформулированы в несколько более сильном виде и их доказательство связано с выбором $w>3$.

Теорема 1. *Пусть a_n — произвольная последовательность, удовлетворяющая условиям* (1) *и* (2) *с* $r=1$. *Тогда среди чисел* $a_1, a_2, \ldots, a_N$ *имеется больше чем*

$$0{,}05\frac{N}{\gamma\log N}\prod_p\frac{1-(\psi(p)/p)}{1-1/p}$$

k-почти простых чисел. k следующим образом зависит от τ:

$k=2$, *если* $\tau\leqslant 1{,}73$; $k=7$, *если* $5{,}098<\tau\leqslant 6{,}06$;

$k=3$, *если* $1{,}73<\tau\leqslant 2{,}495$; $k=8$, *если* $6{,}06<\tau\leqslant 7{,}02$;

$k=4$, *если* $2{,}495<\tau\leqslant 3{,}276$; $k=[\tau]+2$, *если* $7{,}02<\tau\leqslant 336$;

$k=5$, *если* $3{,}276<\tau\leqslant 4{,}135$; $k=[\tau]+3+\left[\dfrac{\tau-336}{1450}\right]$, *если* $\tau>336$.

$k=6$, *если* $4{,}135<\tau\leqslant 5{,}098$;

Выбор достаточно большого w позволяет улучшить и эти результаты.

Из теоремы 1 получаем справедливость следующей теоремы:

Теорема 2. *Пусть $f(m)$ — неприводимый, целозначный, примитивный полином степени n. Тогда имеется больше чем*

$$0{,}05\frac{N}{\log N}\prod_p\frac{1-(\varrho(p)/p)}{1-1/p}$$

таких $1\leqslant m\leqslant N$ для которых $f(m)$ имеет не более k простых множителей, где $k=n+1$, если $1\leqslant n\leqslant 7$; $k=n+2$, если $8\leqslant n\leqslant 336$ и $k=n+3+\left[\dfrac{n-336}{1450}\right]$, если $n>336$.

Доказательство. Пусть $a_m=f(m)$. Тогда $\gamma=1-\varepsilon$, $\tau=n$, где n — степень полинома. Положив $\psi(n)=\varrho(n)$, где $\varrho(n)$ равно числу решений сравнения $f(x)\equiv 0(\operatorname{mod} n)$, если для всех p делящих n число решений сравнения меньше p и $\varrho(n)=0$ в противном случае, получаем (см. [10]) на основании теоремы о распределении простых идеалов

$$\sum_{p\leqslant x}\varrho(p)\log p=x+O(xe^{-a\sqrt{\log x}}).$$

Таким образом, теорема 1 применима, а, следовательно, теорема 2 доказана.

4. Для получения других приложений докажем, что если оценка (1) имеет место для последовательности a_n при каком-либо γ, то при том же γ оценка аналогичная (1) имеет место и для последовательности $f(a_n)$, где $f(x)$ — произвольный, целозначный, примитивный (не обязательно неприводимый) полином.

Лемма 3. *Пусть для всех $\alpha\leqslant\gamma-\varepsilon$ при любых положительных A и ε выполняется неравенство*

$$\sum_{D\leqslant N^\alpha}\mu^2(D)\max_{\substack{l\bmod D\\ l\in U(D)}}\Bigg|\sum_{\substack{n=1\\ a_n\equiv l(\operatorname{mod} D)}}^{N}1-\frac{N\psi(D)}{D}\Bigg|=O\left(\frac{N}{\log^A N}\right).$$

Пусть далее последовательность a_n такова, что

$$\Bigg|\sum_{\substack{n=1\\ a_n\equiv l(\operatorname{mod} D)}}^{N}1-\frac{N\psi(D)}{D}\Bigg|\leqslant\frac{N}{D}\tag{11}$$

и $f(x)$ — примитивный, целозначный полином. Тогда для всех $\alpha\leqslant\gamma-\varepsilon$

$$\sum_{D\leqslant N^\alpha}\mu^2(D)\tau_3(D)\Bigg|\sum_{\substack{n=1\\ f(a_n)\equiv 0(\operatorname{mod} D)}}^{N}1-\frac{N\varrho(D)\psi(D)}{D}\Bigg|=O\left(\frac{N}{\log^{A_1}N}\right),$$

где $A_1\geqslant A/3$ и $\varrho(D)$ определяется так же как при доказательстве теоремы 2.

Доказательство. Пусть $n_i\equiv b_i(\operatorname{mod} D)$ $(i=\overline{1,\varrho(D)})$ — решения сравнения $f(n)\equiv 0(\operatorname{mod} D)$, содержащиеся в $U(D)$. Тогда

$$\sum_{\substack{n=1\\ f(a_n)\equiv 0(\operatorname{mod} D)}}^{N}1=\sum_{i=1}^{\varrho(D)}\sum_{\substack{n=1\\ a_n\equiv b_i(\operatorname{mod} D)}}^{N}1=\sum_{i=1}^{\varrho(D)}\Bigg(\sum_{\substack{n=1\\ a_n\equiv b_i(\operatorname{mod} D)}}^{N}1-\frac{N\psi(D)}{D}\Bigg)+\frac{\varrho(D)\psi(D)}{D}N.$$

Отсюда следует, что

$$\Bigg|\sum_{\substack{n=1\\ f(a_n)\equiv 0(\operatorname{mod} D)}}^{N}1-\frac{N\psi(D)\varrho(D)}{D}\Bigg|\leqslant\max_{\substack{l\bmod D\\ l\in U(D)}}\Bigg|\sum_{\substack{n=1\\ a_n\equiv l(\operatorname{mod} D)}}^{N}1-\frac{N\psi(D)}{D}\Bigg|\varrho(D).$$

Таким образом, доказательство леммы 3 сводится к установлению справедливости оценки

$$\sum_{D\leqslant N^{\gamma}} \mu^2(D)\varrho(D)\tau_3(D)\max_{\substack{l \bmod D\\ l\in U(D)}}\Bigg|\sum_{\substack{n=1\\ a_n\equiv l(\bmod D)}}^{N} 1-\frac{N\psi(D)}{D}\Bigg| = O\left(\frac{N}{\log^{A_1}N}\right). \tag{12}$$

Разобьем сумму (12) на две части, отнеся в первую часть (которую обозначим Σ^1) те D, у которых число простых делителей $\nu(D)$ не превосходит $\dfrac{A_1+9a^2}{\log 3a}\log\log N$, где a степень полинома $f(x)$, $A=2A_1+9a^2$ и во вторую (Σ^2) все остальные D На основании (11) получаем

$$\sum\nolimits^2 = O\Bigg(\sum_{\substack{D\leqslant N^{\gamma}\\ \nu(D)>\frac{A_1+9a^2}{\log 3a}\log\log N}} \mu^2(D)(3a)^{\nu(D)}\frac{N}{D}\Bigg)$$

$$= O\left(\frac{N}{(\log N)^{A_1+9a^2}}\sum_{D\leqslant N^{\gamma}}\frac{(9a^2)^{\nu(D)}}{D}\right) = O\left(\frac{N}{\log^{A_1}N}\right).$$

Из условий леммы получаем также

$$\sum\nolimits^1 = O\Bigg((\log N)^{A_1+9a^2}\sum_{D\leqslant N^{\gamma}}\mu^2(D)\max_{\substack{l \bmod D\\ l\in U(D)}}\Bigg|\sum_{\substack{n=1\\ a_n= l(\bmod D)}}^{N} 1-\frac{N\psi(D)}{D}\Bigg|\Bigg) = O\left(\frac{N}{\log^{A_1}N}\right).$$

Выбирая $A>27a^2$, получаем доказательство леммы.

Лемма 3 показывает, что при переходе от последовательности a_n к $f(a_n)$ условие (1) сохраняется с заменой $\psi(D)$ на $\psi(D)\varrho(D)$. Условие (2) также сохраняется, если предположить, что $\psi(p)=1+O(1/p^{\varepsilon})$ при $\varepsilon>0$.

Таким образом, доказана следующая

Теорема 3. *Пусть a_n — произвольная целозначная последовательность, удовлетворяющая условиям* (1), (2) *и* (11) *с* $\psi(p)=1+O(1/p^{\varepsilon})$ *и $f(x)$ — примитивный, неприводимый полином. Тогда имеется больше чем*

$$0{,}05\frac{N}{\gamma\log N}\prod_{p}\frac{1-\big(\varrho(p)\psi(p)/p\big)}{1-1/p}$$

значений $m\leqslant N$ для которых $f(a_m)$ k-почти просты. $\varrho(p)$ определено как в лемме 3. *Характер зависимости k от τ такой же как в теореме* 1, *$\tau=n/\gamma$, где n — степень полинома $f(x)$.*

5. В приложениях особенно важны случаи $a_n=p_n$ и $a_n=pq$. Из общей теоремы 3 вытекает

Теорема 4. *Всякое достаточно большое четное число N более чем*

$$0{,}1\frac{N}{\log N}\prod_{p/N}\left(1-\frac{1}{(p-1)^2}\right)\prod_{p/N}\left(1+\frac{1}{p-1}\right)$$

способами представимо в виде

$$N=p+P_4,$$

где p — простое число.

Эта теорема была доказана ранее в [12], [13], [14], [9], однако ее доказательство опиралось на довольно громоздкие численные расчеты. Теорема 4 получается из теоремы 3 на основании того, что $\gamma=\frac{3}{8}-\varepsilon$. Однако для ее доказательства достаточно было бы получить оценку $\gamma\geqslant 1/3{,}276$. Из теоремы 3 вытекает, что P_4 в теореме 4 можно заменить на P_3, если показать, что для случая $a_n=p_n$ в (1) можно выбрать $\gamma\geqslant 1/2{,}495$ вместо известного $\gamma\geqslant 3/8\approx 1/2{,}667$. Однако такого увеличения γ провести не удается.

А. Сельберг ([2]) в 1952 г. опубликовал без доказательства теорему о представимости каждого достаточно большого четного числа в виде суммы двух слагаемых одно из которых имеет не более двух, а другое не более трех простых множителей в том числе и одинаковых. В 1959 г. Ван Юань ([15]), опираясь на метод решета А. Сельберга и результаты А. А. Бухштаба по решету Бруна, дал новое доказательство этой теоремы. Однако его доказательство связано с громоздкими вычислениями и процедурой улучшения решета по А. А. Бухштабу.

В работе [6] эта теорема была доказана без применения решета Бруна при сравнительно небольшом объёме вычислений.

Использование (3) и теорема 3 позволяет доказать теорему Сельберга-Юаня без каких-либо численных расчетов. Отметим, что решаемая здесь бинарная задача связана со сложением довольно редких последовательностей (число представлений N имеет в доказываемой ниже теореме 5 порядок

$$\frac{N}{\log^3 N}\prod_{p/N}\left(1+\frac{1}{p}\right)$$

тогда как в теореме Сельберга-Юаня соответственно

$$\frac{N}{\log^2 N}\prod_{p/N}\left(1+\frac{1}{p}\right)).$$

Теорема 5. *Всякое достаточно большое четное число представимо в виде*

$$N = pq + P_3$$

где $p \leqslant N^{a}$, $q \leqslant N^{1-a}$ *и* a *любое число под условием*

$$\frac{1}{2,4956} < a \leqslant \frac{1}{2}.$$

В работе [14] Ван Юань доказал, что существует бесконечно много таких P, что $P(P+2) = P_5$. Из теоремы 3 и равенства (3) с $a = \frac{1}{2}$ вытекает более сильная

Теорема 6. *Существует бесконечно много таких* P, *что* P *имеет два простых множителя, а* $P+2 = P_3$. *Существует бесконечно много таких* P_3, *что* P_3+2 *имеет два простых множителя.*

В заключении отметим еще одно интересное приложение теоремы 3, усиливающее один результат из [6].

Теорема 7. *Всякое достаточно большое четное число, не являющееся квадратом представимо в виде*

$$N = p^2 + P_7,$$

где p — *простое.*

В случае справедливости расширенной гипотезы Римана P_7 можно заменить на P_5.

Литература

[1] A. Selberg, Det. Kongelige Norske Vidensk. Selk. Farh. Trondh. 19 (18) (1947).

[2] — Det. 11-te Scand. Math. Congr., Trondh., 1952, стр. 13-22.

[3] А. И. Виноградов, *Применение* $\zeta(s)$ *к решету Эратосфена*, Мат. сб. 41 (1) (1957), стр. 49-80.

[4] Wang Yuan, Acta Math. Sinica 6 (3) (1956), стр. 500-513.

[5] Б. В. Левин, *Оценки снизу числа почти простых чисел в некоторых последовательностях общего вида*, Вестник ЛГУ, 7, сер. мат., вып. 2, (1960), стр. 48-65.

[6] — *Распределение простых чисел в полиномиальных последовательностях*, Мат. сб. 61 (103), (4) (1963), стр. 401-409.

[7] М. Б. Барбан, *Плотность нулей L-рядов Дирихле и задача о сложении простых и почти простых*, Мат. сб. 61 (103), (4) (1963).

[8] — *Об аналогах проблемы делителей Титчмарша*, Вестник ЛГУ, сер. мат., 4, (19) (1963), стр. 1-13.

[9] Pan Cheng Tong, *О представлении четных чисел в виде суммы простого и не превосходящего 4 простых произведения*, Scientia Sinica 12 (4) (1963), стр. 455-473.

[10] Б. В. Левин, *Об одном классе задач теории чисел, сводящихся к дифференциальным уравнениям с запаздывающим аргументом*, Труды ТашГУ 228 (1963), стр. 56-58.

[11] — *Оценка специальных сумм и произведений, связанных с методом решета*, Труды ТашГУ 228 (1963), стр. 69-80.

[12] — *Распределение почти простых чисел в целозначных полиномиальных последовательностях*, ДАН Уз. ССР 11 (1962).

[13] М. Б. Барбан, *Плотность нулей L-рядов Дирихле и задача о сложении простых и почти простых чисел*, ДАН Уз. ССР 1 (1963).

[14] Wang Yuan, Scien. Sinica 11 (8) (1962).

[15] — Acta Math. Sinica 8 (4) (1959), стр. 357-381.

Reçu par la Rédaction le 14. 2. 1964