Travaux cités

[1] S. Chowla, *There exists an infinity of 3-combinations of primes in A.P.*, Proc. Lahore Philos. Soc. 6 (2) (1944), pp. 15-16.

[2] L. E. Dickson, *A new extension of Dirichlets theorem on prime numbers*, Messenger of Math. 33 (1904), pp. 155-161.

[3] W. Sierpiński, *Remarque sur une hypothèse des Chinois concernant les nombres* $(2^n-2)/n$, Coll. Math. 1 (1947), p. 9.

Reçu par la Rédaction le 18. 1. 1964

ACTA ARITHMETICA
X (1964)

Über die Nichtlinearität einer gewissen Gruppe

von

W. Fluch (Göttingen)

In [1] wurde bewiesen, daß jede beschränkte, endliche Darstellung der Gruppe $G = \{a, b, c, d\}$ mit den Relationen

$$(1) \qquad b^{-1}ab = a^2, \quad c^{-1}bc = b^2, \quad d^{-1}cd = c^2, \quad a^{-1}da = d^2$$

trivial ist. Wir wollen dieses Ergebnis verschärfen und zeigen, daß jede endliche Darstellung von G trivial ist; damit ist dann die Nichtlinearität der Gruppe vollständig bewiesen. Als Korollar hat man folgenden

Satz 1. *Es gibt Gruppen* ($\neq 1$) *mit endlich vielen Erzeugenden und Relationen, deren sämtliche endliche Darstellungen trivial sind* (1).

Ein etwas schwächerer Satz wurde in [1] (Satz 8) bewiesen. Der hier bewiesene Satz stellt auch eine Verschärfung eines bekannten Theorems von Fuchs-Rabinowitsch [2] dar, welches besagt, daß es Gruppen mit endlich vielen Erzeugenden und Relationen gibt, welche nicht isomorph einer Matrixgruppe sind. Zum Beweis benötigen wir eine Verbesserung von Lemma 3 aus [1] in folgender Form

Lemma 1. *Gibt es zu einer endlichen invertierbaren Matrix U eine invertierbare Matrix V, sodaß $V^{-1}UV = U^t$ (mit $|t| \geqslant 2$, ganzrat. Zahl) gilt, so sind alle Eigenwerte von U Einheitswurzeln. Hat U unendliche Ordnung, dann hat V mindestens einen Eigenwert $|\lambda| \neq 1$ (genauer: dann hat V mindestens zwei Eigenwerte λ_1, λ_2 mit $\lambda_2 = \lambda_1 t$).*

Bevor wir dieses Lemma beweisen, zeigen wir wie daraus das behauptete Ergebnis folgt. Sind nämlich $\bar{a} = D(a), \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ die den Erzeugenden a, b, c, d zugeordneten Matrizen bei einer beliebigen endlichen Darstellung D von G, so folgt aus den Relationen (1) und dem ersten Teil des Lemmas das Zwischenresultat

---

(1) Zusatz bei der Korrektur: Die Klasse der endlich-erzeugbaren Gruppen, welche keine nichttriviale endlich-dim. Darstellung besitzen, wird in meiner demnächst erscheinenden Arbeit *Gruppen ohne endlich-dimensionale Darstellungen* angegeben.

Hilfssatz. *Bei jeder endlichen Darstellung von G haben die Matrizen $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ als Eigenwerte nur Einheitswurzeln.*

Hätte nun $\bar{a}$ unendliche Ordnung, so folgt aus dem zweiten Teil des Lemmas und der ersten der Relationen (1), daß $\bar{b}$ mindestens einen Eigenwert $|\lambda| \neq 1$ hätte, im Widerspruch zum Hilfssatz. Somit gibt es eine natürliche Zahl n, sodaß $\bar{a}^n = 1$ gilt und wie in [4] gezeigt, folgt daraus aber $\bar{a} = \bar{b} = \bar{c} = \bar{d} = 1$, d.h. die dargestellte Gruppe ist stets gleich 1. w.z.b.w. Die Existenz einer nichttrivialen unendlichen Darstellung von G ist dadurch gesichert, daß G unendlich ist (reguläre Darstellung!).

Der erste Teil des Lemmas ist in [1] bereits bewiesen worden. Zum zweiten Teil bemerken wir, daß für ein geeignetes natürliches n die Matrix $U^* = U^n$ als Eigenwerte nur 1 besitzt. Da U unendliche Ordnung hat, ist $U^* \neq E$ und es gilt wieder $V^{-1}U^*V = U^{*t}$. Mit U^* an Stelle von U beweisen wir nun die Behauptung für V. Weiters läßt der Übergang $U \to S^{-1}US$, $V \to S^{-1}VS$ die Relation $V^{-1}UV = U^t$ invariant, also können wir uns U in Jordan'scher Normalform gegeben denken ([3], S. 140) d.h. $U = [J_1(\alpha_1), \ldots, J_s(\alpha_s)]$, mit den Eigenwerten $\alpha_1 = \ldots = \alpha_s = 1$, wobei jedes Jordankästchen $J_p(\alpha_p)$ einem Elementarteiler von U entspricht. Wegen $U \neq E$ muß für mindestens ein $\sigma \in \{1, 2, \ldots, s\}$ der Grad $J_\sigma(\alpha_\sigma) \geqslant 2$ sein. Werden die Kästchen in U vertauscht, so bedeutet dies nur einen Übergang $U \to P^{-1}UP$ (Ähnlichkeit). Wir können folglich annehmen, daß die maximalen Kästchen in U an der Spitze stehen. Für $J_\sigma(1_\sigma)$, $1 \leqslant \sigma \leqslant s$, schreiben wir jetzt kürzer I_σ und mit R bezeichnen wir die Restmatrix von U, bestehend aus allen nichtmaximalen Kästchen. Es ist nun zweckmäßig, wenn auch nicht notwendig, einige Fälle zu unterscheiden:

$$1)\ U = [I_m], \qquad 2)\ U = [I_m, R],$$

$$3)\ U = [I_m, \ldots, I_m], \qquad 4)\ U = [I_m, \ldots, I_m, R],$$

wobei I_m ein maximales Kästchen sein soll.

Fall 1. Es wird V_1 eine obere Dreiecksmatrix mit den Diagonalelementen $v_{22} = tv_{11}, \ldots, v_{\mu\mu} = t^{\mu-1}v_{11}$; $\mu = \text{Grad } I_m \geqslant 2$. Also ist das Lemma richtig.

Im Falle 2 unterteilen wir V_2 gemäß U:

$$V_2 = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix}, \qquad U = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix}$$

und setzen wieder in die Relation ein. V_{11} wird die im Falle 1 angegebene Matrix V_1 und in V_{12} ist mindestens die letzte Zeile, in V_{21} mindestens die erste Spalte $= 0$ (weil der Grad der I_σ, welche in R vorkommen

mindestens um 1 kleiner ist als der Grad von I_m!). Weiter sind die Teilmatrizen von V_{12}, V_{21} (Einteilung entsprechend der von R) lauter obere Dreiecksmatrizen. Daraus (und den Eigenschaften von V_{22}) ergibt sich, daß die Eigenwerte von V_{11} auch Eigenwerte von V_2 sind; die Behauptung folgt aus Fall 1.

Fall 3. Sei $n \geqslant 2$ die Vielfachheit von I_m in U. Wir unterteilen V_3 gemäß U in Teilmatrizen: $V_3 = (V_{ik})$, $1 \leqslant i, k \leqslant n$. Jede der n^2 Matrizen V_{ik} hat dann notwendig die Gestalt von V_1 aus Fall 1! Die Determinante von $V_3 - \lambda E$ berechnen wir durch Entwickeln nach den '1,1' — Elementen aller V_{ik}; es folgt ($\mu = \text{Grad } I_m \geqslant 2$).

$$\operatorname{Det}(V_3 - \lambda E) = \operatorname{Det}(V^{(1)} - \lambda E)\operatorname{Det}(V^{(2)} - \lambda E)\ldots\operatorname{Det}(V^{(\mu)} - \lambda E),$$

wobei $V^{(2)}$ aus $V^{(1)}$ durch Erhöhung aller Indizes um 1 hervorgeht und genauso $V^{(3)}$ aus $V^{(2)}$ usw. $V^{(1)}$ selbst ist aber offenbar die Matrix aller $v_{ik} \in V_3$ mit $i, k \equiv 1 \bmod \mu$, in natürlicher Anordnung. Daher ist $V^{(2)} = tV^{(1)}, \ldots, V^{(\mu)} = t^{\mu-1}V^{(1)}$ und wegen $\mu \geqslant 2$ die Behauptung bewiesen.

Der Fall 4 ist analog zu 2! Man wählt wieder die Unterteilung $V_4 = \begin{pmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{pmatrix}$ und erhält jetzt $V_{11} = V_3$. Wegen den Eigenschaften von V_{12} bzw. V_{21} (siehe Fall 2) läßt sich $\operatorname{Det}(V_4 - \lambda E)$ wie im Fall 3 berechnen und es folgt: die Eigenwerte von V_{11} sind Eigenwerte von V_4. Damit ist Fall 4 auf 3 zurückgeführt und das Lemma in allen Fällen bewiesen.

Den ersten Teil des Lemmas können wir wie folgt auch auf lineare Operatoren eines Hilbert-Raumes übertragen.

Lemma 2. *U sei ein unitärer* (2) *Operator und es existiere ein (beidseitig) invertierbarer Operator V, sodaß $V^{-1}UV = U^t$ ($|t| \geqslant 2$, ganzrat.) gilt. Hat dann U nur endlich viele verschiedene Eigenwerte, so sind diese Einheitswurzeln und U hat endliche Ordnung ($U^s = 1$, s = natürl.).*

Dazu bemerkt man: Falls U unendlich viele verschiedene Eigenwerte besitzt, so hat es auch unendliche Ordnung. Also: U hat d.u.n.d. endliche Ordnung, falls es nur endlich viele verschiedene Eigenwerte hat.

Der Beweis läuft genauso wie im endlichen Fall! Das Spektrum $\sigma(U)$ ist ja invariant bei Ähnlichkeit und falls $\sigma(U) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, so ist für jede ganzrat. Zahl m $\sigma(U^m) = \{\lambda_1^m, \ldots, \lambda_n^m\}$. Die Behauptung folgt wieder aus den unendlich vielen Relationen $V^{-k}UV^k = U^{t^k}$ ($k = 2, 3, \ldots$), welche sich aus der gegebenen herleiten.

Damit erhält man aber eine Aussage für beliebige unitäre Darstellungen der Gruppe $G = \{a, b, c, d\}$ mit den Relationen (1). Nämlich

Satz 2. *Bei jeder unitären, nichttrivialen Darstellung D der Gruppe G hat jeder der den Erzeugenden a, b, c, d zugeordneten Operatoren $\bar{a}, \bar{b}$,*

(2) d.h. beidsei ig

$\bar{c}$, $\bar{d}$ unendlich viele verschiedene Eigenwerte. Insbesondere bei der regulären Darstellung.

Hätte einer der Operatoren $\bar{a} = D(a)$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, $\bar{d}$ nur endlich viele verschiedene Eigenwerte, so besagt Lemma 2, daß er endliche Ordnung hätte und damit (nach [4]) die dargestellte Gruppe $=1$ wäre. Die reguläre Darstellung D ist definiert durch $D(g)\circ\varphi(g_1) = \varphi(g^{-1}g_1)$ für alle Funktionen φ im Hilbert-Raum $L^1(G)$.

Eine weitere, unmittelbare Folgerung ist

SATZ 3. *Die Gruppe $H = \{a, b\}$ mit der (einzigen) Relation $b^{-1}ab = a^n$ ($n \geqslant 2$, natürl.) besitzt keine treue unitäre Darstellung D bei welcher $\bar{a} = D(a)$ nur endlich viele verschiedene Eigenwerte hätte.*

Wir wollen noch bemerken, daß es für das Theorem von Fuchs-Rabinowitsche in Analogon bei den zusammenhängenden Lie-Gruppen gibt (Beispiel von Birkhoff), während es zu Satz 1 keines geben kann.

Literaturverzeichnis

[1] W. Fluch, *Max.-fastperiodizität von Gruppen I,* erscheint demnächst.

[2] D. Fuchs-Rabinowitsch, Dokl. Akad. Nauk. SSSR 27 (1940), S. 425.

[3] F. Gantmacher, *Matrizenrechnung,* Bd. I, Berlin 1958.

[4] G. Higman, Jour. London Math. Soc. 26 (1951), S. 61.

Reçu par la Rédaction le 20. 1. 1964

Les tomes de ACTA ARITHMETICA publiés jusqu'à présent contiennent 260 travaux des 143 auteurs suivants:

Ankeny N. C., Baer R., Baker A., Bambach R. P., Barban M. B., Barnes E. S., Bateman P. T., Birch B. J., Blumer F., Bombieri E., Brauer R., de Bruijn N. G., Carlitz L., Cassels J. S. W., Cavior S. R., Chalk J. H. H., Chandrasekharan K., Chikawa K., Chowla S., Cohen E., Cohn H., van der Corput J. G., Cramér H., Dade E. C., Davenport H., Delange H., Dickson L. E., Du Val P., Eichler M., Erdös P., Estermann T., Fenchel W., Fluch W., Fogels E., Fomenko O. M., Gordon B., Graham R. L., Grosswald E., Gut M., Gyires B., Haneke W., Hartman S., Hasse H., Heilbronn H., Herzog E., Hille E., Hlawka E., Hooley C., Ingham A. E., Inkeri K., Iséki K., Jarník V., Kesten H., Khintchine A., Knapowski S., Ko Chao, Krasner M., Krätzel E., Kubota T., Kusakabe T., Landau E., Lehmer Emma, Lehmer D. H., Le Veque W. J., Lewis D. J., Linnik Yu. V. van Lint J. H., Ljunggren W., Lomadse G., Lorentz G. G., Lubelski S., Mahler K., Mąkowski A., McConnel R., Miech R. J., Mikusiński J., Mordell L. J., Moser L., Mullender P., Nagell T., Nakayama T., Nanda V. C., Narkiewicz W., Newman M., Norton Karl K., Onishi H., Oppenheim A., Ostrowski A., Pall G., Pisot Ch., Pitman Jane, Pommerenke C., Rademacher H., Rado R., Raghavan Narasimhan, Raghavan S., Raeligh J., Ramanathan K. G., Rankin R. A., Rédei L., Rényi A., Rieger G. J., Robinson R. A., Rogers C. A., Roth K. F., Rotkiewicz A., Rubel L. A., Sansone G., Sakrözy A., Schaake G., Scherk P., Schinzel A., Schmidt W. M., Scourfield E. J., Segal S. L., Segre B., Selberg S., Seres I., Shibamura K., Siegel C. L., Sierpiński W., Smart J. R., Srinivasan B. R., Staś W., Stemmler Rosemarie M., Stolt B., Straus E. G., Swinnerton-Dyer H. P. F., Szüsz P., Tallini G., Taussky O., Tschebotaröw N., Tshudakov N. G., Turán P., Uchiyama S., Veidinger L., Wakulicz Andrzej, Walfisz Arnold, Walfisz Anna, Watson G. N., Whiteman A. L., Yokoi H., Zassenhaus H.