Über das Waringsche Problem.

Von

Hans Heilbronn (Cambridge).

In der Behandlung des Waringschen Problems hat Herr Vinogradov kürzlich bedeutende Fortschritte erzielt[1]). Er bewies:

Hauptsatz: *Es sei für $k > 2$, k ganz, $G(k)$ die kleinste Zahl, so dass sich jede hinreichend grosse Zahl als Summe von höchstens $G(k)$ positiven k-ten Potenzen darstellen lässt. Dann ist*

$$G(k) = O(k \log k), \tag{1}$$

genauer

$$G(k) \leqq 6k \log k + (4 + \log 216)\, k. \tag{2}$$

Schon die Existenz eines endlichen $G(k)$ ist nicht trivial; sie wurde erstmalig von Hilbert bewiesen. Die erste brauchbare Abschätzung verdankt man Hardy und Littlewood, die, grob gesprochen,

$$\overline{\lim_{k=\infty}}\, k^{-1}\, 2^{2-k}\, G(k) \leqq 1 \tag{3}$$

bewiesen[2]). Da trivialerweise

$$G(k) \geqq k + 1, \tag{4}$$

ist die Bedeutung des Vinogradovschen Resultates ohne weiteres klar. Sein Beweis ist teilweise die konsequente Weiterführung Hardy und Littlewoodscher Ideen: teilweise beruht er auf der Einführung eines neues Lemmas[3]), das anstelle der schwierigen Weylschen diophantischen Approximationen tritt und dadurch die Rechnungen wesentlich vereinfacht.

Es ist jedoch dem Scharfsinn von Herrn Vinogradov entgangen, dass seine kompliziertesten Rechnungen unnötig sind und sich durch einen einfachen Kunstgriff umgehen lassen. Das soll in der vorliegenden Arbeit gezeigt werden, und ich erhalte nicht nur (1), sondern auch

$$G(k) \leqq 6k \log k + \left(4 + 3 \log \left(3 + \frac{2}{k}\right)\right) k + 3, \tag{5}$$

was etwas besser ist als (2). Es ist nicht unmöglich diese Formel weiter zu verbessern, doch kann ich zur Zeit nicht einmal

$$\overline{\lim_{k=\infty}}\, k^{-1} \log^{-1} k\, G(k) < 6 \tag{6}$$

beweisen.

Bezeichnungen. Es sei

$$k \geqq 3 \text{ ganz}, \quad s = 4k, \quad \rho = \frac{k}{k+1}, \quad l = [k \log (3k^2 + 2k)] + 1,$$

also

$$\left(1 - \frac{1}{k}\right)^{l} < \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k \log (3k^2 + 2k)} < e^{-\log (3k^2 + 2k)} = (3k^2 + 2k)^{-1}. \tag{7}$$

$N > 0$ sei die darzustellende Zahl. Wir setzen

$$P = N^{1/k}.$$

Es sei $0 \leqq \alpha \leqq 1$. Wir teilen diese Strecke in Intervalle ein, indem wir jedem Farey-Bruch $\frac{a}{q}$, wo

$$1 \leqq q < P^{k-\rho}, \quad 1 \leqq a \leqq q, \quad (a, q) = 1,$$

in bekannter Weise eine Umgebung zuordnen, so dass die Strecke

---

[1]) „On the upper bound of $G(n)$ in Waring's Problem" [Bulletin de l'Académie de l' U. R. S. S., VII série, Classe des sciences mathématiques et naturelles, 1934, S. 1455 — 1469], russisch mit englischer Zusammenfassung; „Une nouvelle variante de la démonstration du théorème de Waring" [Comptes Rendus **200** (1935), S. 182 — 184]; „On Waring's Problem" [Annals of Mathematics **36** (1935), S. 395 — 405].

[2]) „Some Problems of „Partitio Numerorum" ": I. „A new solution of Waring's Problem" [Göttinger Nachrichten (1920), S. 33 — 54]; II. „Proof that every large number is the sum of at most 21 biquadrates" [Mathematische Zeitschrift **9** (1921), S. 14 — 27]; IV. „The singular series in Waring's Problem, and the value of the number $G(k)$" [ebenda **12** (1922), S. 161 — 188]; VI. „Further researches in Waring's Problem" [ebenda **23** (1925), S. 1 — 37].

Alle in der vorliegenden Arbeit benutzten Hardy-Littlewoodschen Resultate, mit Ausnahme von (10), stehen auch bei Landau „Vorlesungen über Zahlentheorie", Bd. 1, Teil VI. Für (10) vergleiche man Partitio Numerorum IV.

[3]) Lemma 10 dieser Arbeit.

$0 \leqq \alpha \leqq 1$ schlicht bedeckt wird. Wir teilen diese Intervalle in zwei Klassen:

1. Ist $1 \leqq q \leqq P^{\rho}$, so nennen wir das Intervall einen Major Arc. Bezeichnung: $\mathfrak{M}$.

2. Ist $P^{\rho} < q < P^{k-\rho}$, so nennen wir das Intervall einen Minor Arc. Bezeichnung: $\mathfrak{m}$.

In jedem Fall hat das Intervall die Form:

$$\alpha = \frac{a}{q} + \beta, \quad -\vartheta_1 q^{-1} P^{\rho-k} \leqq \beta \leqq \vartheta_2 q^{-1} P^{\rho-k}, \quad \frac{1}{2} \leqq \vartheta_1 \leqq 1, \quad \frac{1}{2} \leqq \vartheta_2 \leqq 1. \tag{8}$$

u durchlaufe alle Zahlen, die sich als Summe von höchstens l positiven k-ten Potenzen darstellen lassen.

Wir setzen:

$$T = T(\alpha) = \sum_{1 \leqq \mu \leqq P} e^{2\pi i \mu^k \alpha}, \quad I = I(\beta) = \int_0^P e^{2\pi i \beta v^k} dv,$$

$$R = R(\alpha) = \sum_{u \leqq \frac{1}{4} P^k} e^{2\pi i u \alpha}, \quad A_R = \sum_{u \leqq \frac{1}{4} P^k} 1,$$

$$S = S(\alpha) = \sum_{1 \leqq y \leqq P^{\rho/k}} \sum_{u \leqq \frac{1}{4} P^{k-\rho}} e^{2\pi i y^k u \alpha}, \quad A_s = \sum_{1 \leqq y \leqq P^{\rho/k}} \sum_{u \leqq \frac{1}{4} P^{k-\rho}} 1.$$

O — Abschätzungen gelten bei festem k gleichmässig in allen übrigen Variablen. o — Abschätzungen gelten bei festem k für $P \longrightarrow \infty$.

$c_1, \ldots, c_6$ sind positive Konstanten, die nur von k abhängen.

Major Arcs.

L e m m a 1 (Hardy — Littlewood): *Setzt man*

$$S_{a,q} = \sum_{\nu=1}^{q} e^{2\pi i \nu^k \frac{a}{q}},$$

so ist

$$S_{a,q} = O\left(q^{1-\frac{1}{k}}\right). \tag{9}$$

L e m m a 2 (Hardy — Littlewood): *Setzt man für ganzes n*

$$\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(n, k) = \sum_{q=1}^{\infty} q^{-s} \sum_{a=1}^{q} e^{-2\pi i n \frac{a}{q}} S_{a,q}^{s},$$

so konvergiert diese Reihe absolut nach Lemma 1 und es ist

$$\mathfrak{S} > c_1. \tag{10}$$

L e m m a 3: *Es sei für* $\tau_1 \leqq \tau \leqq \tau_2$

$$0 \leqq f(\tau) \leqq B_0, \quad 0 \leqq f'(\tau) \leqq B_1, \quad 0 \leqq f''(\tau).$$

Dann ist

$$\sum_{\tau_1 \leqq \lambda \leqq \tau_2} e^{2\pi i f(\lambda)} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{2\pi i f(\tau)} d\tau + O(1 + B_1 + B_0 B_1).$$

B e w e i s: Nach der Eulerschen Summenformel ist die Differenz von Summe und Integral

$$= O(1) + 2\pi i \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(\tau - [\tau] - \frac{1}{2}\right) f'(\tau) e^{2\pi i f(\tau)} d\tau$$

$$= O(1) + 2\pi i \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(\tau - [\tau] - \frac{1}{2}\right) f'(\tau) \{ (2\pi(1+i) f(\tau)) + 1 - (2\pi f(\tau) + 1$$

$$- \cos(2\pi f(\tau))) - i(2\pi f(\tau) - \sin(2\pi f(\tau)))\} d\tau = O(1) + O(B_1(B_0 + 1))$$

nach dem zweiten Mittelwertsatz, da jeder der vier Summanden in der geschweiften Klammer nach Multiplikation mit einer Einheitswurzel zwischen 0 und $2\pi\sqrt{2} B_0 + 2$ liegt und monoton nicht fällt

L e m m a 4: *Auf* $\mathfrak{M}$ *gilt*

$$T = q^{-1} S_{a,q} I + O(q + P^{2\rho - 1}).$$

B e w e i s: *Es ist*

$$T = \sum_{\nu=1}^{q} \sum_{\frac{1-\nu}{q} \leqq \lambda \leqq \frac{P-\nu}{q}} e^{2\pi i (\nu + \lambda q)^k \left(\frac{a}{q} + \beta\right)}$$

$$= \sum_{\nu=1}^{q} e^{2\pi i \nu^k \frac{a}{q}} \sum_{\frac{1-\nu}{q} \leqq \lambda \leqq \frac{P-\nu}{q}} e^{2\pi i (\nu + \lambda q)^k \beta}.$$

Wendet man auf die innere Summe Lemma 3 mit

$$B_0 = P^k\,|\,\beta\,| \leqq P^k q^{-1} P^{\rho-k} \leqq q^{-1} P^\rho,$$

$$B_1 = k\,q\,P^{k-1}\,|\,\beta\,| \leqq k\,P^{\rho-1}$$

an, so folgt die Behauptung wegen

$$B_1 = O(1),\quad B_0 B_1 = O(q^{-1} P^{2\rho-1}).$$

Lemma 5:

$$\sum_{\mathfrak{M}} \int_{\mathfrak{M}} |\,T^s - q^{-s} S_{a,q}^{\,s} I^s\,|\, d\alpha = O(P^{s-k-(1-\rho)}).$$

Beweis: Nach Lemma 4 ist auf $\mathfrak{M}$

(11) $$T - q^{-1} S_{a,q} I = O(P^\rho).$$

Für $0 \leqq |\,\beta\,| \leqq P^{-k}$ ist nach Lemma 1

(12) $$q^{-1} S_{a,q} I = O(q^{-\frac{1}{k}} P).$$

Für $P^{-k} \leqq |\,\beta\,| \leqq q^{-1} P^{\rho-k}$ ist

(13) $$I = \int_0^P e^{2\pi i \beta v^k}\, dv = |\,\beta\,|^{-\frac{1}{k}} \int_0^{|\beta|^{\frac{1}{k}} P} e^{\pm 2\pi i v^k}\, dv = O\left(|\,\beta\,|^{-\frac{1}{k}}\right),$$

da $\int_0^\infty e^{2\pi i v^k}\, dv$ konvergiert.

Ferner ist wegen $q \leqq P^\rho$

(14) $$P^\rho \leqq q^{-\frac{1}{k}} P$$

und für $|\,\beta\,| \leqq q^{-1} P^{\rho-k}$

(15) $$P^\rho = P^{1-\rho/k} = (P^{\rho-k})^{-\frac{1}{k}} \leqq q^{-\frac{1}{k}}\, |\,\beta\,|^{-\frac{1}{k}}.$$

Nach (11), (12) und (14) ist also für $0 \leqq |\,\beta\,| \leqq P^{-k}$

$$|\,T^s - q^{-s} S_{a,q}^{\,s} I^s\,| = O\left(P^\rho q^{-\frac{s-1}{k}} P^{s-1}\right).$$

und nach (11), (13) und (15) ist für $P^{-k} \leqq |\,\beta\,| \leqq q^{-1} P^{\rho-k}$

$$|\,T^s - q^{-s} S_{a,q}^{\,s} I^s\,| = O\left(P^\rho q^{-\frac{s-1}{k}}\, |\,\beta\,|^{-\frac{s-1}{k}}\right).$$

Also

$$\int_{\mathfrak{M}} |\,T^s - q^{-s} S_{a,q}^{\,s} I^s\,|\, d\alpha = O\left(P^{-k+\rho+s-1} q^{-\frac{s-1}{k}}\right)$$

$$+ O\left(P^\rho q^{-\frac{s-1}{k}} \int_{P^{-k}}^{\infty} \beta^{-\frac{s-1}{k}}\, d\beta\right) = O\left(q^{-\frac{s-1}{k}} P^{s-k-(1-\rho)}\right)$$

$$+ O\left(q^{-\frac{s-1}{k}} P^{\rho-k\left(1-\frac{s-1}{k}\right)}\right) = O\left(q^{-\frac{s-1}{k}} P^{s-k-(1-\rho)}\right).$$

Hieraus folgt die Behauptung, da

$$\sum_{\mathfrak{M}} q^{-\frac{s-1}{k}} \leqq \sum_{q=1}^{\infty} q^{1-\frac{s-1}{k}} = \sum_{q=1}^{\infty} q^{-3+\frac{1}{k}} = O(1);$$

Lemma 6 (E. Landau[4]):

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i n \beta} I^s\, d\beta = \frac{\Gamma^s(1+1/k)}{\Gamma(s/k)}\, n^{s/k-1} \quad \text{für } 0 < n \leqq P^k.$$

Lemma 7:

$$\int_{\mathfrak{M}} e^{-2\pi i n \beta} I^s\, d\beta = \frac{\Gamma^s(1+1/k)}{\Gamma(s/k)}\, n^{s/k-1} + O\left(P^{s-k-\rho\left(\frac{s}{k}-1\right)} q^{\frac{s}{k}-1}\right),$$

für $0 < n \leqq P^k$.

Beweis: Nach (13) ist

$$\int_{\beta \text{ nicht auf } \mathfrak{M}} |\,I\,|^s\, d\beta = O \int_{\frac{1}{2} q^{-1} P^{\rho-k}}^{\infty} \beta^{-\frac{s}{k}}\, d\beta = O\left((q^{-1} P^{\rho-k})^{1-\frac{s}{k}}\right)$$

$$= O\left(P^{s-k-\rho\left(\frac{s}{k}-1\right)} q^{\frac{s}{k}-1}\right).$$

[4]) „Über die neue Winogradoffsche Behandlung des Waringschen Problems" [Mathematische Zeitschrift 31 (1929), S. 319—338].

Lemma 8:

$$\sum_{\mathfrak{M}} \int_{\mathfrak{M}} e^{-2\pi i n\alpha}\, T^s\, d\alpha = \frac{\Gamma^s(1+1/k)}{\Gamma(s/k)}\, \mathfrak{S}(n)\, n^{s/k-1} + O(P^{s-k-(1-\rho)}),$$

für $0 < n \leqq P^k$, *also ist für* $\frac{1}{4} P^k \leqq n \leqq P^k$ *bei hinreichend grossem* P

$$\Re \sum_{\mathfrak{M}} \int_{\mathfrak{M}} e^{-2\pi i n\alpha}\, T^s\, d\alpha > c_2 P^{s-k}.$$

Beweis: Nach Lemma 5 ist die linke Seite

$$= O(P^{s-k-(1-\rho)}) + \sum_{\mathfrak{M}} q^{-s} S_{a,q}^{s} \int_{\mathfrak{M}} e^{-2\pi i n\alpha} J^s\, d\alpha$$

$$= O(P^{s-k-(1-\rho)}) + \sum_{\mathfrak{M}} q^{-s} S_{a,q}^{s}\, e^{-2\pi i n \frac{a}{q}} \int_{\mathfrak{M}} e^{-2\pi i n\beta} J^s\, d\beta$$

$$= O(P^{s-k-(1-\rho)}) + \frac{\Gamma^s(1+1/k)}{\Gamma(s/k)}\, n^{s/k-1} \sum_{\mathfrak{M}} q^{-s} S_{a,q}^{s}\, e^{-2\pi i n \frac{a}{q}}$$

$$+ O\left(\sum_{\mathfrak{M}} q^{-\frac{s}{k}} P^{s-k-\rho\left(\frac{s}{k}-1\right)} q^{\frac{s}{k}-1}\right) \quad \text{(Lemma 7 und 1}$$

$$= O(P^{s-k-(1-\rho)}) + \frac{\Gamma^s(1+1/k)}{\Gamma(s/k)}\, n^{\frac{s}{k}-1} \left(\mathfrak{S} + \sum_{q>P^\rho} O\left(q^{1-\frac{s}{k}}\right)\right)$$

$$+ O\left(P^{s-k-\rho\left(\frac{s}{k}-1\right)}\right) \sum_{\mathfrak{M}} q^{-1}$$

$$= O(P^{s-k-(1-\rho)}) + \frac{\Gamma^s(1+1/k)}{\Gamma(s/k)}\, \mathfrak{S}\, n^{s/k-1} + O\left(P^{s-k-\rho\left(\frac{s}{k}-2\right)}\right).$$

Minor Arcs.

Lemma 10 (Vinogradov): *Es sei*

$$\left|\alpha - \frac{a}{q}\right| \leqq q^{-2}, \quad (a, q) = 1, \quad q > 1.$$

ξ *durchlaufe* Ξ *ganze Zahlen eines Intervalls der Länge* X *und* η

durchlaufe H *ganze Zahlen eines Intervalls der Länge* Y.

Dann ist

$$\left|\sum_{\xi,\eta} e^{2\pi i \xi\eta\alpha}\right|^2 = O\left(\Xi\, \mathrm{H}\, X\, Y\, \frac{\log q}{q} \left(1 + \frac{q}{X}\right)\left(1 + \frac{q}{Y}\right)\right);$$

also, falls $Y \leqq q \leqq X$,

$$\left|\sum_{\xi,\eta} e^{2\pi i \xi\eta\alpha}\right|^2 = O(\Xi\, \mathrm{H}\, X \log q).$$

Beweis:

$$\left|\sum_{\xi,\eta} e^{2\pi i \xi\eta\alpha}\right|^2 \leqq \sum_{\xi} 1 \sum_{x=M+1}^{M+X} \left|\sum_{\eta} e^{2\pi i x\eta\alpha}\right|^2$$

$$= \Xi \sum_{\eta}\sum_{\eta'}\sum_{x=M+1}^{M+X} e^{2\pi i x(\eta-\eta')\alpha} \leqq \Xi \sum_{\eta}\sum_{\eta'} \operatorname{Min}\left(X, \frac{1}{\{(\eta-\eta')\alpha\}}\right)$$

$$\leqq \Xi\, \mathrm{H} \sum_{y=1-Y}^{Y-1} \operatorname{Min}\left(X, \frac{1}{\{y\alpha\}}\right) = O\left(\Xi\, \mathrm{H}\left(\frac{Y}{q}+1\right)(X + q\log q)\right).$$

Lemma 11: *Auf* $\mathfrak{m}$ *ist*

$$|S(\alpha)|^2 = O(A_S P^{k-\rho} \log P).$$

Beweis: Lemma 10 mit

$$\Xi\, \mathrm{H} = A_S, \quad X = P^{k-\rho}, \quad Y = P^{\rho}.$$

Lemma 12:

$$\sum_{\mathfrak{m}} \int_{\mathfrak{m}} |T^s(\alpha) R^2(\alpha) S(\alpha)|\, d\alpha = O\left(P^s A_R A_S^{\frac{1}{2}} P^{\frac{1}{2}(k-\rho)} \log P\right).$$

Beweis:

$$\sum_{\mathfrak{m}} \int_{\mathfrak{m}} |T^s(\alpha) R^2(\alpha) S(\alpha)|\, d\alpha \leqq \operatorname*{Max}_{0 \leqq \alpha \leqq 1} |T^s| \operatorname*{Max}_{\alpha \text{ auf } \mathfrak{m}} |S| \int_0^1 |R(\alpha)|^2\, d\alpha$$

$$\leqq P^s\, O(A_S P^{k-\rho} \log P)^{\frac{1}{2}} A_R.$$

L e m m a 13 (Hardy-Littlewood):

$$A_R \geqq c_3\, P^{k\left(1-\left(1-\frac{1}{k}\right)^l\right)},$$
$$A_S \geqq c_4\, P^{\frac{\rho}{k}+(k-\rho)\left(1-\left(1-\frac{1}{k}\right)^l\right)}.$$

L e m m a 14:

$$P^s A_R A_S^{\frac{1}{2}} P^{\frac{1}{2}(k-\rho)} \log P = o\,(P^{s-k} A_R^2 A_S).$$

B e w e i s: Wegen

$$2k\left(1-\left(1-\frac{1}{k}\right)^l\right)+\frac{\rho}{k}+(k-\rho)\left(1-\left(1-\frac{1}{k}\right)^l\right) = 3k-\rho+\frac{\rho}{k}$$
$$-(3k-\rho)\left(1-\frac{1}{k}\right)^l$$

$$> 3k-\rho+\frac{\rho}{k}-(3k-\rho)\,(3k^2+2k^{-1})^{-1} \quad \text{(nach (7))}$$

$$= 3k-\rho+\frac{\rho}{k}-\frac{1}{k+1} = 3k-\rho$$

gilt

$$P^{3k-\rho} \log^2 P = o\,(A_R^2 A_S),$$

woraus die Behauptung folgt.

L e m m a 15: *Für hinreichend grosses N ist*

$$\int_0^1 e^{-2\pi i N\alpha}\, T^s(\alpha)\, R^2(\alpha)\, S(\alpha)\, d\alpha > 0.$$

B e w e i s: Es genügt zu zeigen, dass das Integral von 0 verschieden ist. Es ist

$$\Re \sum_{\mathfrak{M}} \int_{\mathfrak{M}} e^{-2\pi i N\alpha}\, T^s(\alpha)\, R^2(\alpha)\, S(\alpha)\, d\alpha$$

$$= \Re \sum_{u_1 \leqq \frac{1}{4}P^k}\ \sum_{u_2 \leqq \frac{1}{4}P^k}\ \sum_{1 \leqq y \leqq P^{\rho/k}}\ \sum_{u_3 \leqq \frac{1}{4}P^{k-\rho}}\ \sum_{\mathfrak{M}}$$

$$\times \int_{\mathfrak{M}} e^{-2\pi i (N-u_1-u_2-y^k u_3)\alpha}\, T^s\, d\alpha$$

$$\geqq \sum_{u_1 \leqq \frac{1}{4}P^k}\ \sum_{u_2 \leqq \frac{1}{4}P^k}\ \sum_{1 \leqq y \leqq P^{\rho/k}}\ \sum_{u_3 \leqq \frac{1}{4}P^{k-\rho}} c_2\, P^{s-k} \qquad \text{(Lemma 8)}$$

$$= c_2\, A_R^2\, A_S\, P^{s-k},$$

und aus Lemma 12 und 14 folgt die Behauptung.

H a u p t s a t z:

$$G(k) \leqq 4k + 3l \leqq k\,(3 \log (3k^2+2k)+4)+3.$$

B e w e i s: Nach Lemma 15 ist jedes grosse N in der Form

$$N = x_1^k + \ldots + x_s^k + u_1 + u_2 + y^k u_3$$

darstellbar.

(Eingegangen am 7. Juli 1935)