$$(38)\qquad \frac{1}{\varphi(4)}+\frac{1}{2\varphi(8)}+\frac{1}{4\varphi(16)}+\ldots=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\ldots=\frac{2}{3}.$$

$$N_{4,1}(n)=\frac{4n^2}{\log n}\left[\frac{5}{3}S_3(n)-\frac{2}{3}S_3(n)\right]+o\left(\frac{n^2}{\log n}\right)\quad(34, 35, 37, 38)$$

$$=\frac{4n^2}{\log n}S_3(n)+o\left(\frac{n^2}{\log n}\right).$$

(I) follows on substituting for $S_3(n)$ the expression (35).

Proof of (II). We have

$$(39)\qquad S_4(n)=\sum_{\substack{n_1^2+\ldots+n_4^2+p=n\\ p<\frac{n}{\log n}}}1$$

$$=B\sum_{p<\frac{n}{\log n}}1\cdot\operatorname*{Max}_{1\leq k\leq n}r_4(k)=\frac{Bn}{\log^2 n}\operatorname*{Max}_{1\leq k\leq n}\sigma(k)\quad(4)$$

$$(40)\qquad =\frac{Bn}{\log^2 n}\cdot n\log\log n=o\left(\frac{n^2}{\log n}\right).$$

$$(41)\qquad S_5(n)=\sum_{\substack{n_1^2+\ldots+n_4^2+p=n\\ p<\frac{n}{\log n}}}\log p$$

$$(42)\qquad =B\log n\,S_4(n)=o(n^2)\quad(39, 40).$$

$$\sum_{n_1^2+\ldots+n_4^2+p=n}\log p=\sum_{\substack{n_1^2+\ldots+n_4^2+p=n\\ p<\frac{n}{\log n}}}\log p+\sum_{\substack{n_1^2+\ldots+n_4^2+p=n\\ p\geq\frac{n}{\log n}}}\log p$$

$$=S_5(n)+(1+o(1))\log n\sum_{\substack{n_1^2+\ldots+n_4^2+p=n\\ p\geq\frac{n}{\log n}}}1\quad(41)$$

$$=o(n^2)+(1+o(1))\log n\,[N_{4,1}(n)-S_4(n)]\quad(42, 1, 39)$$

$$=N_{4,1}(n)\log n+o(n^2)\quad(\mathrm{I}, 40).$$

(II) follows on substituting for $N_{4,1}(n)$ the expression (I).

(Received 24 September, 1934.)

Zur additiven Zahlentheorie.

Von

Arnold Walfisz (Radość). *)

Erster Teil.

In ihrer III Abhandlung zur Partitio Numerorum [1]) beschäftigen sich Hardy und Littlewood auch mit den Darstellungen einer natürlichen Zahl als Summe einer Primzahl und zwei bzw. vier Quadraten ganzer Zahlen. Es sei insbesondere $N(n)$ die Anzahl der Darstellungen von n in der Form $n=m_1^2+m_2^2+m_3^2+m_4^2+p$ [2]). Die Verfasser vermuten, dass bei wachsendem n

$$(1)\qquad N(n)\sim\frac{\pi^2}{2}\frac{n^2}{\log n}\prod_{p>2}\left(1+\frac{1}{p^2(p-1)}\right)\prod_{\substack{p\mid n\\ p>2}}\frac{(p-1)^2(p+1)}{p^3-p^2+1}\quad{}^{3)}$$

und meinen, dass man hierfür einen strengen Beweis finden müsste.

Es sei jetzt allgemeiner $N_{r,s}(n)$ die Anzahl der Darstellungen von n als Summe von r Quadraten und s Primzahlen, d. h. die Anzahl der Lösungen von $n=m_1^2+\ldots+m_r^2+p_1+\ldots+p_s$ in ganzen m und

*) Die vorliegende Arbeit erscheint zugleich im Lichtenstein-Gedenkband der Prace Matematyczno-Fizyczne.

[1]) „On the expression of a number as a sum of primes" [Acta Mathematica **44** (1922), S. 1—70].

[2]) m_1, m_2, m_3, m_4, p und $m_1', m_2', m_3', m_4', p'$ gelten dann und nur dann als dieselbe Lösung, wenn $m_1=m_1', \ldots, m_4=m_4'$, $p=p$ ist. Also z. B. $N(3)=9$, $N(10)=168$. Ebenso ist die weiter unten eingeführte Funktion $N_{r,s}(n)$, mitsamt den analogen Funktionen des zweiten und dritten Teils, zu verstehen.

[3]) a. a. O., (5.452) und (5.4521). Der Faktor $\frac{1}{\log n}$ ist versehentlich weggelassen. Im ersten Produkt durchläuft p alle ungeraden Primzahlen, im zweiten die ungeraden Primteiler von n. Ebenso sind (2.1) — (2.4) zu verstehen.

Primzahlen p. Unter der Annahme, dass die Nullstellen aller Dirichletschen Funktionen $L(s)=L(\sigma+it)$ der Halbebene $\sigma\leqq\frac{1}{2}$ angehören, zeigte G. K. Stanley [4]) für $r\geqq 1$, $s\geqq 3$; $r\geqq 3$, $s=2$; $r\geqq 4$, $s=1$:

$$(2)\qquad N_{r,s}(n)=\frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\Gamma\left(\frac{r}{2}+s\right)}\frac{n^{\frac{r}{2}+s-1}}{\log^s n}\mathfrak{S}_{r,s}(n)+o\left(\frac{n^{\frac{r}{2}+s-1}}{\log^s n}\right),$$

wo: 1) für $r\equiv 0 \pmod 4$

$$(2.1)\qquad \mathfrak{S}_{r,s}(n)=\prod_{p>2}\left(1+\frac{(-1)^{s+1}}{p^{\frac{r}{2}}(p-1)^s}\right)\prod_{\substack{p|n\\p>2}}\frac{p^{\frac{r}{2}}(p-1)^s+(-1)^s(p-1)}{p^{\frac{r}{2}}(p-1)^s+(-1)^{s+1}};$$

2) für $r\equiv 1 \pmod 4$

$$(2.2)\qquad \mathfrak{S}_{r,s}(n)=\prod_{p>2}\left(1+\left(\frac{n}{p}\right)\frac{(-1)^s}{p^{\frac{r-1}{2}}(p-1)^s}\right)\prod_{\substack{p|n\\p>2}}\frac{p^{\frac{r-1}{2}}(p-1)^s}{p^{\frac{r-1}{2}}(p-1)^s+\left(\frac{n}{p}\right)(-1)^s};$$

3) für $r\equiv 2 \pmod 4$

$$(2.3)\qquad \mathfrak{S}_{r,s}(n)=\prod_{p>2}\left(1+\frac{(-1)^{s+\frac{p+1}{2}}}{p^{\frac{r}{2}}(p-1)^s}\right)\prod_{\substack{p|n\\p>2}}\frac{p^{\frac{r}{2}}(p-1)^s+(-1)^{s+\frac{p-1}{2}}(p-1)}{p^{\frac{r}{2}}(p-1)^s+(-1)^{s+\frac{p+1}{2}}};$$

4) für $r\equiv 3 \pmod 4$

$$(2.4)\qquad \mathfrak{S}_{r,s}(n)=\prod_{p>2}\left(1+\left(\frac{-n}{p}\right)\frac{(-1)^s}{p^{\frac{r-1}{2}}(p-1)^s}\right)\prod_{\substack{p|n\\p>2}}\frac{p^{\frac{r-1}{2}}(p-1)^s}{p^{\frac{r-1}{2}}(p-1)^s+\left(\frac{-n}{p}\right)(-1)^s}.$$

Damit war auch (1), wenn auch nur mit Hilfe einer L-Hypothese, bestätigt.

[4]) „On the representation of a number as a sum of squares and primes" [Proceedings of the London Mathematical Society, ser. 2, **29** (1929), S. 122—144], Theorem A, Theorem D und Lemma 11. Es finden sich in dieser Arbeit auch noch einige andere Sätze dieser Art. Die Abhandlung von Frl. Stanley ist durch die Partitio Numerorum III veranlasst, deren Hauptinhalt die Behandlung des Falles $r=0$, $s\geqq 3$ bildet. Dabei benutzen Hardy und Littlewood die folgende, etwas weniger weitgehende L-Vermutung: die obere Grenze der Realteile aller dieser Nullstellen ist kleiner als $\frac{3}{4}$.

Einen strengen Beweis von (1) auf gesicherter Grundlage brachte kürzlich S. Chowla [5]). Anschliessend will ich (2) — (2.4) für den Fall $r\geqq 5$, $s\geqq 1$ beweisen.

Im folgenden bedeuten r, s, p, n, m, h, k, l und K ganze Zahlen; hierbei ist $r\geqq 5$, $s\geqq 0$, $n>1$, $k>0$, $\sqrt{n}\geqq K\geqq 1$, p Primzahl. h ist stets teilerfremd zu k. Es läuft also z. B. $\sum\limits_{h=0}^{k-1}$ über die zu k teilerfremden h mit $0\leqq h<k$. Der Strich bei p—Summen heisst: es soll überdies $p\equiv l \pmod k$ sein, z. B. läuft $\sum\limits_{p\leqq n}'$ über die $p\leqq n$, $p\equiv l \pmod k$. Der Strich bei l—Summen heisst: es sei überdies $(l,k)=1$. φ und μ sind die Funktionen von Euler und Möbius. u, v, x, ε sind reell; $x\geqq 2$, $\varepsilon>0$. Mit B bezeichne ich unterschiedslos komplexe Zahlen, deren absolute Beträge unterhalb nur von r, s abhängigen Schranken liegen; mit B_K unterschiedslos komplexe Zahlen, deren absolute Beträge unterhalb nur von r, s und K abhängingen Schranken liegen.

Die fetten Zahlen sind in der ganzen vorliegenden Arbeit als Hinweise auf die an den betreffenden Stellen benutzten Formeln zu verstehen.

Zur Abkürzung setze ich

$$(3)\qquad E(u)=E_{h,k}(u)=e^{\frac{2\pi i u h}{k}},$$

$$(4)\qquad T=T_{h,k}=\frac{1}{k}\sum_{m=0}^{k-1}E(m^2),$$

$$(5)\qquad \pi(x)=\sum_{p\leqq x}1,\qquad \pi(x;k,l)=\sum_{p\leqq x}{}'1.$$

Es gelten dann die wohlbekannten Abschätzungen

$$(6)\qquad T=Bk^{-\frac{1}{2}},$$

$$(7)\qquad \pi(x)=B\frac{x}{\log x},$$

$$(8)\qquad \pi(x;k,h)=\frac{x}{\varphi(k)\log x}+B_K\frac{x}{\log^2 x}\qquad (k\leqq K).$$

[5]) „The representation of a number as a sum of four squares and a prime" (die unmittelbar vorangehende Arbeit).

von denen die beiden ersten elementar herleitbar sind. Ferner brauche ich die Beziehung

$$(9)\qquad \sum_{l=0}^{k-1}{}' E(l) = \mu(k).$$ [6]

Wird $\mathfrak{S}_{r,s}(m)$ durch die wegen (6) absolut konvergente Reihe

$$(10)\qquad \mathfrak{S}_{r,s}(m) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\mu(k)}{\varphi(k)}\right)^s \sum_{h=0}^{k-1} T^r E(-m)$$

definiert, so steht das mit $(2\cdot 1)$—$(2\cdot 4)$ nicht in Widerspruch; denn für $m=n$ hat (10) gerade die Werte $(2\cdot 1)$—$(2\cdot 4)$, wie Frl. Stanley, ohne Berufung auf die L-Hypothese, bewiesen hat [7]. Es habe von jetzt ab $\mathfrak{S}_{r,s}(n)$ nur noch die Bedeutung (10).

Ich erinnere daran, dass nach Hardy

$$(11)\qquad N_{r,0}(k) = \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)}\, n^{\frac{r}{2}-1}\, \mathfrak{S}_{r,0}(k) + B\, k^{\frac{r}{4}}$$

ist [8], so dass (2) für $s=0$ reichlich gilt. Ich brauche daher nur noch den Schluss von s auf $s+1$ (Induktion) durchzuführen.

Nun gehts los.

$$(12)\qquad \mathfrak{T}_{r,s}(n) = \sum_{p\leqq n} (n-p)^{\frac{r}{2}+s-1} \log^{-s}(n+2-p)\, \mathfrak{S}_{r,s}(n-p).$$

$$\mathfrak{S}_{r,s}(n-p) - \sum_{k\leqq\sqrt{n}} \left(\frac{\mu(k)}{\varphi(k)}\right)^s \sum_{h=0}^{k-1} T^r E(p-n)$$

$$= \sum_{k>\sqrt{n}} \left(\frac{\mu(k)}{\varphi(k)}\right)^s \sum_{h=0}^{k-1} T^r E(p-n) \qquad (10)$$

[6]) Vgl. E. Landau „Vorlesungen über Zahlentheorie", I Bd. (1927), S. 188.

[7]) a. a. O. [4]), S. 126—129.

[8]) G. H. Hardy „On the expression of a number as the sum of any number of squares and in particular of five or seven" [Proceedings of the National Academy of Sciences **4** (1918), S. 189—193], S. 191. Eine Verallgemeinerung von (11) findet man in meiner Arbeit „Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden" [Mathematische Zeitschrift **19** (1924), S. 300—307], S. 303—307.

$$(13)\qquad = B \sum_{k>\sqrt{n}} k^{1-\frac{r}{2}} = B\, n^{1-\frac{r}{4}} \qquad (6).$$

$$\mathfrak{T}_{r,s}(n) - \sum_{p\leqq n} (n-p)^{\frac{r}{2}+s-1} \log^{-s}(n+2-p) \sum_{k\leqq\sqrt{n}} \left(\frac{\mu(k)}{\varphi(k)}\right)^s \sum_{h=0}^{k-1} T^r E(p-n)$$

$$= B \sum_{p\leqq n} (n-p)^{\frac{r}{2}+s-1}\, n^{1-\frac{r}{4}} \log^{-s}(n+2-p) \qquad (12,\ 13)$$

$$= B\, n^{\frac{r}{2}+s-1+1-\frac{r}{4}} \log^{-s} n \sum_{p\leqq n} 1 = B\, n^{\frac{r}{4}+s+1} \log^{-s-1} n \qquad (5,\ 7)$$

$$(14)\qquad = B\, n^{\frac{r}{2}+s} \log^{-s-2} n,$$

$$\mathfrak{T}_{r,s}(n) = \sum_{k\leqq\sqrt{n}} \left(\frac{\mu(k)}{\varphi(k)}\right)^s \sum_{h=0}^{k-1} T^r \sum_{p\leqq n} (n-p)^{\frac{r}{2}+s-1} \log^{-s}(n+2-p)\, E(p-n)$$

$$+ B\, n^{\frac{r}{2}+s} \log^{-s-2} n \qquad (14)$$

$$(15)\qquad = \sum_{k\leqq\sqrt{n}} \left(\frac{\mu(k)}{\varphi(k)}\right)^s \sum_{h=0}^{k-1} T^r E(-n) \sum_{p\leqq n} (n-p)^{\frac{r}{2}+s-1} \log^{-s}(n+2-p)\, E(p)$$

$$+ B\, n^{\frac{r}{2}+s} \log^{-s-2} n \qquad (3).$$

$$\sum_{p\leqq n} (n-p)^{\frac{r}{2}+s-1} \log^{-s}(n+2-p)\, E(p)$$

$$= \sum_{l=0}^{k-1} \sum_{p\leqq n}{}' (n-p)^{\frac{r}{2}+s-1} \log^{-s}(n+2-p)\, E(p)$$

$$(16)\qquad = \sum_{l=0}^{k-1} E(l) \sum_{p\leqq n}{}' (n-p)^{\frac{r}{2}+s-1} \log^{-s}(n+2-p) \qquad (3).$$

$$\int_{p}^{n} (n-u)^{\frac{r}{2}+s-2} \log^{-s}(n+2-u)\, du$$

$$-\left(\frac{r}{2}+s-1\right)^{-1}(n-p)^{\frac{r}{2}+s-1}\log^{-s}(n+2-p)$$

$$=B\int_p^n (n-u)^{\frac{r}{2}+s-1} s\,(n+2-u)^{-1}\log^{-s-1}(n+2-u)\,du$$

(17) $$=s\,B\int_p^n n^{\frac{r}{2}+s-1-1}\log^{-s-1} n\,du = s\,B\,n^{\frac{r}{2}+s-1}\log^{-s-1} n.$$

(18) $$(n-p)^{\frac{r}{2}+s-1}\log^{-s}(n+2-p)$$

$$=\left(\frac{r}{2}+s-1\right)\int_p^n (n-u)^{\frac{r}{2}+s-2}\log^{-s}(n+2-u)\,du$$

$$+s\,B\,n^{\frac{r}{2}+s-1}\log^{-s-1} n \quad \mathbf{(17)}.$$

$$\sum_{p\leqq n}{}'(n-p)^{\frac{r}{2}+s-1}\log^{-s}(n+2-p)$$

$$=\left(\frac{r}{2}+s-1\right)\sum_{p\leqq n}{}'\int_p^n (n-u)^{\frac{r}{2}+s-2}\log^{-s}(n+2-u)\,du$$

$$+s\,B\,n^{\frac{r}{2}+s}\log^{-s-2} n \quad \mathbf{(18,\ 5,\ 7)}$$

(19) $$=\left(\frac{r}{2}+s-1\right)\int_2^n (n-u)^{\frac{r}{2}+s-2}\log^{-s}(n+2-u)\,\pi(u;k,l)\,du$$

$$+s\,B\,n^{\frac{r}{2}+s}\log^{-s-2} n \quad \mathbf{(5)}.$$

$$\sum_{p\leqq n}(n-p)^{\frac{r}{2}+s-1}\log^{-s}(n+2-p)\,E(p)$$

(20) $$=\left(\frac{r}{2}+s-1\right)\sum_{l=0}^{k-1}E(l)\int_2^n (n-u)^{\frac{r}{2}+s-2}\log^{-s}(n+2-u)\,\pi(u;k,l)\,du$$

$$+s\,B\,k\,n^{\frac{r}{2}+s}\log^{-s-2} n \quad \mathbf{(16,\ 19)}.$$

$$\mathfrak{T}_{r,s}(n)=\left(\frac{r}{2}+s-1\right)\sum_{k\leqq\sqrt{n}}\left(\frac{\mu(k)}{\varphi(k)}\right)^s\sum_{h=0}^{k-1}T^r E(-n)$$

$$\times\sum_{l=0}^{k-1}E(l)\int_2^n (n-u)^{\frac{r}{2}+s-2}\log^{-s}(n+2-u)\,\pi(u;k,l)\,du$$

$$+s\,B\sum_{k=1}^{\infty}k^{1-\frac{5}{2}+1}(\varphi(k))^{-1}\,n^{\frac{r}{2}+s}\log^{-s-2} n$$

$$+B\,n^{\frac{r}{2}+s}\log^{-s-2} n \quad \mathbf{(15,\ 6,\ 20)}$$

(21) $$=\left(\frac{r}{2}+s-1\right)\sum_{k\leqq\sqrt{n}}\left(\frac{\mu(k)}{\varphi(k)}\right)^s\sum_{h=0}^{k-1}T^r E(-n)$$

$$\times\sum_{l=0}^{k-1}E(l)\int_2^n (n-u)^{\frac{r}{2}+s-2}\log^{-s}(n+2-u)\,\pi(u;k,l)\,du$$

$$+B\,n^{\frac{r}{2}+s}\log^{-s-2} n.$$

Sind l und k nicht teilerfremd, so ist $\pi(u;k,l)\leqq 1$. Lässt man daher in (21) die l mit $(l,k)>1$ weg, so ist der Fehler, wegen (6),

$$B\sum_{k\leqq\sqrt{n}}k^{1-\frac{r}{2}}\sum_{l=0}^{k-1}\int_2^n n^{\frac{r}{2}+s-2}\,du = B\sum_{k\leqq\sqrt{n}}k^{2-\frac{r}{2}}\,n^{\frac{r}{2}+s-1}$$

(22) $$=B\sum_{k\leqq\sqrt{n}}k^{2-\frac{5}{2}}\,n^{\frac{r}{2}+s-1}=Bn^{\frac{r}{2}+s-1+\frac{1}{4}}=Bn^{\frac{r}{2}+s}\log^{-s-2} n.$$

(23) $$\mathfrak{T}_{r,s}(n)=\left(\frac{r}{2}+s-1\right)\sum_{k\leqq\sqrt{n}}\left(\frac{\mu(k)}{\varphi(k)}\right)^s\sum_{h=0}^{k-1}T^r\,E(-n)\sum_{l=0}^{k-1}{}'E(l)$$

$$\times\int_2^n (n-u)^{\frac{r}{2}+s-2}\log^{-s}(n+2-u)\,\pi(u;k,l)\,du+Bn^{\frac{r}{2}+s}\log^{-s-2} n \quad \mathbf{(21,\ 22)}.$$

Lasse ich hier die $k>K$ weg, so ist der Fehler nach (6), (5) und (7).

$$B\sum_{K<k\leqq\sqrt{n}}k^{1-\frac{r}{2}}\sum_{l=0}^{k-1}\int_2^n n^{\frac{r}{2}+s-2}\log^{-s} n\,.\,\pi(n;k,l)\,du$$

$$=B\sum_{k>K} k^{-\frac{3}{2}} \sum_{l=0}^{k-1} \pi(n;k,l)\, n^{\frac{r}{2}+s-1}\log^{-s} n = BK^{-\frac{1}{2}}\pi(n)\, n^{\frac{r}{2}+s-1}\log^{-s} n$$

$$(24) \qquad = BK^{-\frac{1}{2}} n^{\frac{r}{2}+s}\log^{-s-1} n.$$

$$(25) \qquad \mathfrak{T}_{r,s}(n) = \left(\frac{r}{2}+s-1\right)\sum_{k\leq K}\left(\frac{\mu(k)}{\varphi(k)}\right)^s \sum_{h=0}^{k-1} T^r E(-n) \sum_{l=0}^{k-1}{}' E(l)$$

$$\times\int_2^n (n-u)^{\frac{r}{2}+s-2}\log^{-s}(n+2-u)\,\pi(u;k,l)\,du + Bn^{\frac{r}{2}+s}\log^{-s-2} n$$

$$+BK^{-\frac{1}{2}} n^{\frac{r}{2}+s}\log^{-s-1} n \quad (23,\ 24).$$

Ersetze ich $\pi(u;k,l)$ durch $\frac{u}{\varphi(k)\log u}$, so ist der Fehler, nach (6) und (8),

$$(26) \qquad B_K\sum_{k\leq K} k^{1-\frac{r}{2}}\sum_{l=0}^{k-1}\int_2^n n^{\frac{r}{2}+s-2}\log^{-s} n\cdot n\log^{-2} n\,du = B_K n^{\frac{r}{2}+s}\log^{-s-2} n.$$

$$(27) \qquad \mathfrak{T}_{r,s}(n) = \left(\frac{r}{2}+s-1\right)\sum_{k\leq K}\frac{(\mu(k))^s}{(\varphi(k))^{s+1}}\sum_{h=0}^{k-1} T^r E(-n)\sum_{l=0}^{k-1}{}' E(l)$$

$$\times\int_2^n (n-u)^{\frac{r}{2}+s-2}\log^{-s}(n+2-u)\frac{u}{\log u}\,du + B_K n^{\frac{r}{2}+s}\log^{-s-2} n$$

$$+BK^{-\frac{1}{2}} n^{\frac{r}{2}+s}\log^{-s-1} n \quad (25,\ 26).$$

$$(28) \qquad \Phi(u) = \int_2^u (n-v)^{\frac{r}{2}+s-2}\, v\log^{-s}(n+2-v)\,dv \quad (2\leq u\leq n).$$

$$(29) \qquad \Phi(u) = B\int_2^u n^{\frac{r}{2}+s-2}\, v\log^{-s} n\,dv = Bn^{\frac{r}{2}+s-2}u^2\log^{-s} n \quad (28).$$

$$\int_2^n (n-u)^{\frac{r}{2}+s-2}\log^{-s}(n+2-u)\frac{u}{\log u}\,du = \frac{\Phi(n)}{\log n}+\int_2^n\frac{\Phi(u)}{u\log^2 u}\,du \quad (28)$$

$$(30) \qquad = \frac{\Phi(n)}{\log n}+B\int_2^n n^{\frac{r}{2}+s-2+1}\log^{-s-2} n\,du = \frac{\Phi(n)}{\log n}+Bn^{\frac{r}{2}+s}\log^{-s-2} n \quad (29).$$

$$\Phi(n) = \int_2^n (n-v)^{\frac{r}{2}+s-2}\, v\log^{-s}(n+2-v)\,dv \quad (28)$$

$$= \int_0^{n-2} u^{\frac{r}{2}+s-2}(n-u)\log^{-s}(u+2)\,du$$

$$= \int_0^{n-2}\frac{d}{du}\left(\frac{u^{\frac{r}{2}+s-1}(n-u)}{\frac{r}{2}+s-1}+\frac{u^{\frac{r}{2}+s}}{\left(\frac{r}{2}+s\right)\left(\frac{r}{2}+s-1\right)}\right)\log^{-s}(u+2)\,du$$

$$(31) \qquad = \frac{n^{\frac{r}{2}+s}\log^{-s} n}{\left(\frac{r}{2}+s\right)\left(\frac{r}{2}+s-1\right)}+Bn^{\frac{r}{2}+s}\log^{-s-1} n.$$

$$(32) \qquad \int_2^u (n-u)^{\frac{r}{2}+s-2}\log^{-s}(n+2-u)\frac{u}{\log u}\,du = \frac{n^{\frac{r}{2}+s}\log^{-s-1} n}{\left(\frac{r}{2}+s\right)\left(\frac{r}{2}+s-1\right)}$$

$$+Bn^{\frac{r}{2}+s}\log^{-s-2} n \quad (30,\ 31).$$

$$\left(\frac{r}{2}+s\right)\mathfrak{T}_{r,s}(n) = n^{\frac{r}{2}+s}\log^{-s-1} n\cdot\sum_{k\leq K}\frac{(\mu(k))^s}{(\varphi(k))^{s+1}}\sum_{h=0}^{k-1} T^r E(-n)\sum_{l=0}^{k-1}{}' E(l)$$

$$+B_K n^{\frac{r}{2}+s}\log^{-s-2} n+BK^{-\frac{1}{2}} n^{\frac{r}{2}+s}\log^{-s-1} n \quad (27,\ 32)$$

$$(33) \qquad = n^{\frac{r}{2}+s}\log^{-s-1} n\cdot\sum_{k\leq K}\left(\frac{\mu(k)}{\varphi(k)}\right)^{s+1}\sum_{h=0}^{k-1} T^r E(-n)$$

$$+B_K n^{\frac{r}{2}+s}\log^{-s-2} n+BK^{-\frac{1}{2}} n^{\frac{r}{2}+s}\log^{-s-1} n \quad (9).$$

Lasse ich k in (33) wieder über alle natürlichen Zahlen laufen, so ist nach (6) der Fehler

$$(34) \qquad Bn^{\frac{r}{2}+s}\log^{-s-1} n\cdot\sum_{k>K} k^{1-\frac{r}{2}} = BK^{-\frac{1}{2}} n^{\frac{r}{2}+s}\log^{-s-1} n.$$

$$\left(\frac{r}{2}+s\right)\mathfrak{T}_{r,s}(n) = n^{\frac{r}{2}+s}\log^{-s-1} n\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\mu(k)}{\varphi(k)}\right)^{s+1}\sum_{h=0}^{k-1} T^r E(-n).$$

$$+B_K n^{\frac{r}{2}+s} \log^{-s-2} n + B K^{-\frac{1}{2}} n^{\frac{r}{2}+s} \log^{-s-1} n \quad (33, 34)$$

$$(35) \qquad = n^{\frac{r}{2}+s} \log^{-s-1} n \cdot \mathfrak{S}_{r,s+1}(n) + B_K n^{\frac{r}{2}+s} \log^{-s-2} n$$

$$+ B K^{-\frac{1}{2}} n^{\frac{r}{2}+s} \log^{-s-1} n \quad (10).$$

Ist $\varepsilon > 0$ vorgegeben, so sei K die kleinste natürliche Zahl mit $K^{-\frac{1}{2}} \leqq \varepsilon$ und n_0 die kleinste natürliche Zahl mit $n_0 \geqq 2$, $|B_K| \leqq \varepsilon \log n_0$ für das in (35) vorkommende B_K. Dann folgt aus (35)

$$\left(\frac{r}{2}+s\right) \mathfrak{T}_{r,s}(n) = n^{\frac{r}{2}+s} \log^{-s-1} n \cdot \mathfrak{S}_{r,s+1}(n) + B \varepsilon\, n^{\frac{r}{2}+s} \log^{-s-1} n \quad (n \geqq n_0),$$

$$(36) \qquad \left(\frac{r}{2}+s\right) \mathfrak{T}_{r,s}(n) = n^{\frac{r}{2}+s} \log^{-s-1} n \cdot \mathfrak{S}_{r,s+1}(n) + o\left(n^{\frac{r}{2}+s} \log^{-s-1} n\right).$$

Aus der Definition von $N_{r,s}(n)$ ergibt sich

$$(37) \qquad N_{r,s+1}(n) = \sum_{p<n} N_{r,s}(n-p) + B.$$

Nimmt man (2) als richtig an und schreibt es in der Gestalt

$$(38) \qquad N_{r,s}(n) = \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\Gamma\left(\frac{r}{2}+s\right)} n^{\frac{r}{2}+s-1} \log^{-s}(n+2)\, \mathfrak{S}_{r,s}(n)$$

$$+ o\left(n^{\frac{r}{2}+s-1} \log^{-s} n\right),$$

so folgt aus (37), (38), (12), (5), (7) und (36)

$$N_{r,s+1}(n) = \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\Gamma\left(\frac{r}{2}+s\right)} \mathfrak{T}_{r,s}(n) + o\left(n^{\frac{r}{2}+s-1} \log^{-s} n\right) \sum_{p<n} 1$$

$$= \frac{\pi^{\frac{r}{2}}}{\Gamma\left(\frac{r}{2}+s+1\right)} n^{\frac{r}{2}+s} \log^{-s-1} n \cdot \mathfrak{S}_{r,s+1}(n) + o\left(n^{\frac{r}{2}+s} \log^{-s-1} n\right),$$

d. h. es gilt (2) mit $s+1$ statt s, w. z. b. w.

Zweiter Teil.

Die Funktion $N_{r,s}(n)$ des ersten Teils lässt sich sofort auf einen totalreellen, d. h. einen mitsamt seinen konjugierten Körpern reellen, algebraischen Zahlkörper k übertragen. Ein solcher Körper liege vor. Eine Körperzahl heisse totalpositiv, wenn sie samt ihren konjugierten Zahlen positiv ist; sie heisse Primzahl, wenn das durch sie erzeugte Ideal ein Primideal ist. Für eine ganze totalpositive Zahl ν zähle dann $A_{r,s}(\nu)$ die Anzahl aller Darstellungen

$$(39) \qquad \nu = \mu_1^2 + \ldots + \mu_r^2 + \omega_1 + \ldots + \omega_s$$

(die μ ganz, die ω totalpositive Primzahlen) ab. Für reell-quadratisches k wurde $A_{r,0}(\nu)$ $(r \geqq 5)$ von Siegel [9]), $A_{0,s}(\nu)$ $(s \geqq 3)$ von Rademacher [10]) abgeschätzt.

Bei einem nicht totalreellen Körper (hier wird von einer totalpositiven Zahl verlangt, dass alle ihre reellen konjugierten Zahlen positiv seien) kann (39) unendlich viele Lösungen haben. Es ist deshalb zweckmässig, nach dem Vorgange von Siegel ($r=4$, $s=0$) [11]) und Rademacher ($r=0$, $s \geqq 3$) [12]) die einzelnen Darstellungen mit Konvergenzerzeugenden Gewichten zu versehen. Hierauf gehe ich nicht näher ein.

In einer kürzlich erschienenen Dissertation betrachtet Frl. Silberberg [13]) $A_{r,s}(\nu)$ in einem beliebigen Körper für $r \geqq 4$, $s=1$ und für

[9]) C. L. Siegel „Additive Theorie der Zahlkörper. I" [Mathematische Annalen **87** (1922), S. 1—35].

[10]) H. Rademacher „Zur additiven Primzahltheorie algebraischer Zahlkörper. I. Über die Darstellung totalpositiver Zahlen als Summe von totalpositiven Primzahlen im reell-quadratischen Zahlkörper" [Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität **3** (1924), S. 109—163]. In der III Abhandlung der Serie (vgl. Fussnote [12])) wird u. a. der beliebige totalreelle Körper betrachtet. In allen drei Arbeiten setzt Verf. (entsprechend der Partitio Numerorum III) voraus, dass die obere Grenze der Realteile aller Nullstellen der Heckeschen $\zeta(s, \lambda)$-Funktionen kleiner als $\frac{3}{4}$ ist.

[11]) „Additive Theorie der Zahlkörper. II" [Mathematische Annalen **88** (1923), S. 184—210].

[12]) „Zur additiven Primzahltheorie algebraischer Zahlkörper. II. Über die Darstellung von Körperzahlen als Summe von Primzahlen im imaginär-quadratischen Zahlkörper" [Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität **3** (1924), S. 331—378]; „Zur additiven Primzahltheorie algebraischer Zahlkörper. III. Über die Darstellung totalpositiver Zahlen als Summen von totalpositiven Primzahlen in einem beliebigen Zahlkörper" [Mathematische Zeitschrift **27** (1927), S. 321—426]. In der letztgenannten Arbeit schreibt Rademacher den ω noch Kongruenzbedingungen nach einem festen Idealmodul vor.

[13]) Käthe Silberberg „Über die Anzahl der Darstellungen ganzer totalpositiver Zahlen eines beliebigen Zahlkörpers als Summen von Quadratzahlen und totalpositiven Primzahlen" [Privatdruck (1934), 36 S.].

$r \geqq 2$, $s \geqq 2$, wobei noch den μ und ω Kongruenzbedingungen nach einem festen Idealmodul vorgeschrieben und dieselbe λ—Hypothese wie bei Rademacher als richtig angenommen wird. Ihr Haupsatz lautet für reell-quadratisches k und uneingeschränkte μ, ω (d. h. ohne Kongruenzbedigungen) folgendermassen:

Es sei d die Diskriminante von k, h die Anzahl der (absoluten) Idealklassen, η die Grundeinheit >1, N das Zeichen für Norm [14]. Dann gilt

(40)
$$A_{r,s}(\nu) = \frac{\pi^r}{\Gamma^2\left(\frac{r}{2}+s\right) d^{\frac{r-1}{2}} (2h\log\eta)^s} \, \frac{N\nu^{\frac{r}{2}+s-1}}{\log^s N\nu} \, \mathfrak{S}_{s,r}(\nu) + O\left(\frac{N\nu^{\frac{r}{2}+s-1}}{\log^{s+1} N\nu}\right),$$

wo: 1) für $r \equiv 0 \pmod 4$

(40.1)
$$\mathfrak{S}_{r,s}(\nu) = \prod_{\mathfrak{p}\nmid 2\nu}\left(1+\frac{(-1)^{s+1}}{N\mathfrak{p}^{\frac{r}{2}}(N\mathfrak{p}-1)^s}\right)\prod_{\substack{\mathfrak{p}\mid\nu\\ \mathfrak{p}\nmid 2}}\left(1+\frac{(-1)^s}{N\mathfrak{p}^{\frac{r}{2}}(N\mathfrak{p}-1)^{s-1}}\right);$$

2) für $r \equiv 1 \pmod 4$

(40.2)
$$\mathfrak{S}_{r,s}(\nu) = \prod_{\mathfrak{p}\nmid 2\nu}\left(1+\left(\frac{\nu}{\mathfrak{p}}\right)\frac{(-1)^s}{N\mathfrak{p}^{\frac{r-1}{2}}(N\mathfrak{p}-1)^s}\right);$$

3) für $r \equiv 2 \pmod 4$

(40.3)
$$\mathfrak{S}_{r,s}(\nu) = \prod_{\mathfrak{p}\nmid 2\nu}\left(1+\left(\frac{-1}{\mathfrak{p}}\right)\frac{(-1)^{s+1}}{N\mathfrak{p}^{\frac{r}{2}}(N\mathfrak{p}-1)^s}\right)$$
$$\times\prod_{\substack{\mathfrak{p}\mid\nu\\ \mathfrak{p}\nmid 2}}\left(1+\left(\frac{-1}{\mathfrak{p}}\right)\frac{(-1)^s}{N\mathfrak{p}^{\frac{r}{2}}(N\mathfrak{p}-1)^{s-1}}\right);$$

4) für $r \equiv 3 \pmod 4$

(40.4)
$$\mathfrak{S}_{r,s}(\nu) = \prod_{\mathfrak{p}\nmid 2\nu}\left(1+\left(\frac{-\nu}{\mathfrak{p}}\right)\frac{(-1)^s}{N\mathfrak{p}^{\frac{r-1}{2}}(N\mathfrak{p}-1)^s}\right).$$

[14]) d, h, η, N mögend dauernd diese Bedeutung haben. Der Kürze wegen schreibe ich in (40)
$$N\nu^{\frac{r}{2}+s-1} \quad \text{für} \quad (N\nu)^{\frac{r}{2}+s-1},$$
und später entsprechend.

Hierbei läuft $\mathfrak{p}$ über Primideale; | bzw. $\dagger$ sind Zeichen für teilt bzw. teilt nicht; $\left(\frac{\pm\nu}{\mathfrak{p}}\right)$ und $\left(\frac{-1}{\mathfrak{p}}\right)$ sind quadratische Restsymbole [15]).

Von jetzt ab sei nur noch vom reell-quadratischen Zahlkörper k die Rede. Sucht man das bei (1) und (2) benutzte Verfahren, mit Hilfe des zu (8) analogen Primidealsatzes in Restklassen (Abschätzung (53) weiter unten) zu übertragen, so kommt man nicht zum Ziel, weil diejenigen ω in (39), deren Normen dieselbe Grössenordung wie $N\nu$ haben, sehr unangenehm werden. Diese Schwierigkeit kann ich aber umgehen, indem ich eben nur solche ω zulasse, für die

(41) $\quad N\omega \leqq N\nu^a \quad$ (a eine absolute Konstante mit $0<a<1$)

ist. Es sei $A_{r,s,a}(\nu)$ die zugehörige Anzahlfunktion, d. h. die Anzahl der Lösungen von (39), (41). Dann gilt, wie ich zeigen will, für $r \geqq 5$, $s \geqq 1$

(42)
$$A_{r,s,a}(\nu) = \frac{\pi^r}{\Gamma^2\left(\frac{r}{2}\right) d^{\frac{r-1}{2}}}\left(\frac{1-a}{2ha\log\eta}\right)^s N\nu^{\frac{r}{2}+sa-1}\,\mathfrak{S}_{r,s}(\nu)$$
$$+\, o\left(N\nu^{\frac{r}{2}+sa-1}\right),$$

wobei $\mathfrak{S}_{r,s}(\nu)$ durch (40.1) — (40.4) gegeben ist.

Ein Vergleich von (40) und (42) zeigt, dass die Annahme (41) die arithmetische Seite des Problems nicht wesentlich beeinflusst, indem beidemal dieselbe singuläre Reihe $\mathfrak{S}$ auftritt. Die vor $\mathfrak{S}$ stehenden Ausdrücke sind allerdings grundverschieden. Man beachte, dass das Hauptglied von (42) für $a=1$ verschwindet und dass es, gegenüber (40), eine um $\log^s N\nu$ höhere Grössenordung besitzt. Als weiteres curiosum will ich noch anführen, dass die Heckeschen $\zeta(s,\lambda)$-Funktionen, welche bei Rademacher und Frl. Silberberg eine grundlegende Rolle spielen, bei mir überhaupt nicht auftreten.

In § 1 stelle ich diejenigen Eigenschaften von k zusammen, die später benötigt werden. In § 3 führe ich, vom Siegelschen Hauptsatz l. c. [9]) ausgehend, den Beweis von (42) durch Induktion $s \to s+1$, in-

[15]) Das $\mathfrak{S}_{r,s}(\nu)$ tritt zunächst in Gestalt einer unendlichen Reihe auf, die über alle ganzen Ideale des Körpers zu erstrecken ist, der s. g. singulären Reihe-vgl. Formel (61) w. u. Die Auswertung dieser Reihe zu (40.1) — (40.4) führt Frl. Silberberg zwar nur für gerades r durch; im vorliegenden Spezialfall sind aber diese Formeln unmittelbar aus dem Siegelschen Ergebnis (vgl. l. c. [9])) abzulesen. Ich komme hierauf noch zurück.

dem ich allerdings statt der Funktion $A_{r,s,a}(\nu)$ eine eigens auf diese Induktion zugeschnittene, leicht abweichend definierte Funktion $A_{r,s;a}(\nu)$ verwende. Hier werden diejenigen Lösungen von (39) gezählt, für die

$$(43)\quad \begin{cases} \mathrm{M} = \mu_1^2 + \ldots + \mu_r^2, \quad N\omega_1 \leqq N(\mathrm{M}+\omega_1)^a, \quad N\omega_2 \leqq N(\mathrm{M}+\omega_1 + \\ + \omega_2)^a, \ldots, \; N\omega_s \leqq N(\mathrm{M}+\omega_1+\ldots+\omega_s)^a = N\nu^a. \end{cases}$$

Eine in § 3 auftretende trigonometrische Summe wird in § 2 abgeschätzt.

In § 4 zeige ich, dass

$$(44)\qquad A_{r,s,a}(\nu) = A_{r,s;a}(\nu) + o\left(N\nu^{\frac{r}{2}+sa-1}\right),$$

womit alles erledigt ist.

§ 1.

Einleitende Bemerkungen. Der Körper k liege vor. d sei die Diskriminante, h die (absolute) Idealklassenzahl, η die Grundeinheit >1, N die Norm, S die Spur; $\mathfrak{a}$ ein beliebiges ganzes Ideal, $\mathfrak{p}$ ein beliebiges Primideal; kleine griechische Buchstaben, ausser ε und den Funktionszeichen φ, μ, bezeichnen Körperzahlen; ν, λ und τ sind für ganze totalpositive Zahlen vorbehalten, ω für totalpositive Primzahlen, ρ für ganze Zahlen; α' ist die zu α konjugierte Zahl; $\varphi(\mathfrak{a})$ und $\mu(\mathfrak{a})$ bezeichnen die auf Ideale übertragenen Funktionen von Euler und Möbius.

ε sei eine beliebige positive Zahl, K eine natürliche Zahl. Mit B bezeichne ich unterschiedslos Zahlen, die von allem Möglichen abhängen dürfen, dem absoluten Betrage nach aber unter Schranken liegen, die nur von k, r, s und a abhängen. Die gleiche Bedeutung mögen $B_{\mathfrak{a}}$ bzw. B_K haben, nur dass hier die Schranken von k, r, s, a, $\mathfrak{a}$ bzw. von k, r, s, a, K abhängen dürfen.

Idealklassen. Ein fester Idealmodul $\mathfrak{a}$ liege vor. G sei die Gesamtheit aller zu $\mathfrak{a}$ primen Zahlen γ (d. h. $\gamma = \frac{\alpha}{\beta}$, α und β ganz und prim zu $\mathfrak{a}$), Γ die Gesamtheit aller totalpositiven $\gamma \equiv 1 \pmod{\mathfrak{a}}$ (d. h. γ soll totalpositiv sein, und in der obigen Darstellung möge $\alpha \equiv \beta$ mod $\mathfrak{a}$ sein). Betrachtet man G und Γ als multiplikative Zahlengruppen in k so gilt für den Index $(G:\Gamma)$

$$(45)\qquad (G:\Gamma) = 4\varphi(\mathfrak{a}).$$

Denn mod $\mathfrak{a}$ gibt es $\varphi(\mathfrak{a})$ zu $\mathfrak{a}$ prime Restklassen ganzer Zahlen ρ; in jeder Restklasse treten für ρ, ρ' die vier möglichen Vorzeichenkombinationen $++$, $+-$, $-+$, $--$ wirklich auf [16]), und es ist γ in Γ dann und nur dann, wenn α und β derselben Restklasse, mit derselben Vorzeichenkombination angehören. Die Elemente der Faktorgruppe G/Γ mögen Restklassen nach Γ heissen. Es gibt nach (45) genau $4\varphi(\mathfrak{a})$ solche Restklassen.

Es sei G_0 die Gesamtheit aller Einheiten in G (also die Gesamtheit aller Einheiten von k schlechthin), Γ_0 die Gesamtheit aller Einheiten in Γ. Es gibt dann eine natürliche Zahl $q_{\mathfrak{a}}$, so dass $\eta_{\mathfrak{a}} = \eta^{q_{\mathfrak{a}}}$ zu Γ_0 gehort und jede Zahl von Γ_0 die Form $\eta_{\mathfrak{a}}^n$ mit ganzem rationalen n, hat (die s. g. Grundeinheit mod $\mathfrak{a}$). Betrachtet man G_0 und Γ_0 als multiplikative Zahlengruppen, so gilt für den Index $(G_0:\Gamma_0)$

$$(46)\qquad (G_0:\Gamma_0) = 2q_{\mathfrak{a}}.$$

Es ist nämlich $G_0 = \sum_{n=1}^{q_{\mathfrak{a}}} \eta^n \Gamma_0 + \sum_{n=1}^{q_{\mathfrak{a}}} (-\eta^n)\Gamma_0$. Zwei Körperzahlen α und β, deren Quotient in Γ_0 liegt, heissen assoziiert nach Γ, in Zeichen $\alpha \sim \beta$. Soll ein Summationsbuchstabe ρ ein System zu $\mathfrak{a}$ primer, nicht nach Γ assoziierter ganzer Zahlen durchlaufen, so schreibe ich $[\rho]_{\mathfrak{a}}$; $[\tau]_{\mathfrak{a}}$ heisse: τ durchlaufe ein System zu $\mathfrak{a}$ primer nicht assoziierter totalpositiver ganzer Zahlen, $[\omega]_{\mathfrak{a}}$ habe eine entsprechende Bedeutung für totalpositive Primzahlen.

Die Gesamtheit $\mathfrak{G}$ der zu $\mathfrak{a}$ primen ganzen oder gebrochen Ideale $\mathfrak{b}$ des Körpers (d. h. schreibt man $\mathfrak{b}$ als gekürzten Idealbruch, so seien Zähler und Nenner prim zu $\mathfrak{a}$) teile ich jetzt in Klassen nach Γ ein, indem ich zwei solche Ideale $\mathfrak{b}_1$ und $\mathfrak{b}_2$ dann und nur dann als äquivalent bezeichne und zu derselben Klasse rechne, wenn $\frac{\mathfrak{b}_1}{\mathfrak{b}_2} = (\gamma)$, γ in Γ. In der zugehörigen Klassengruppe $\mathfrak{H} = \mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0$ bildet das Einheitselement $\mathfrak{G}_0$ die Gesamtheit der Hauptideale (γ), γ in Γ. Es bezeichne $h(\mathfrak{a})$ die Ordnung dieser Gruppe, d. h. die Anzahl der Idealklassen nach Γ. Die zu $\mathfrak{a}$ primen Hauptideale von k mögen in $h_0(\mathfrak{a})$ Klassen nach Γ zerfallen. Die zugehörigen Klassen bilden eine Untergruppe $\mathfrak{H}_0$ von $\mathfrak{H}$, deren Index h ist (weil es in jeder der h absoluten Idealklassen zu $\mathfrak{a}$ prime Ideale gibt). Insbesondere ist

$$(47)\qquad h(\mathfrak{a}) = h\,h_0(\mathfrak{a}).$$

Ist α prim zu $\mathfrak{a}$, so gibt es unter den das Hauptideal (α) erzeugen-

[16]) Vgl. z. B. E. Landau „Über Ideale und Primideale in Idealklassen“ [Mathematische Zeitschrift 2 (1918), S. 52—154], Satz XXI.

den Zahlen $\pm\eta^n\alpha$, n ganz rational, genau $2q_{\mathfrak{a}}$ nicht assoziierte nach Γ, z. B. die Zahlen

(48) $$\eta^n\alpha,\ -\eta^n\alpha \qquad (1 \leq n \leq q_{\mathfrak{a}}).$$

Aus der Äquivalenzdefinition nach Γ folgt dann: Ist $\mathfrak{K}_1$ die Idealklasse, zu der (α) gehört, so werden die Ideale von $\mathfrak{K}_1$ durch genau $2q_{\mathfrak{a}}$ Restklassen nach Γ erzeugt, z. B. durch die Restklassen (48). Ist nun weiter β eine andere zu $\mathfrak{a}$ prime Zahl, so spielen die $2q_{\mathfrak{a}}$ Zahlen

(49) $$\eta^n\beta,\ -\eta^n\beta \qquad (1 \leq n \leq q_{\mathfrak{a}})$$

dieselbe Rolle für (β) und die zugehörige Idealklasse $\mathfrak{K}_2$. Ist $\mathfrak{K}_1 = \mathfrak{K}_2$, so stimmen die Restklassen (48), von der Reihenfolge abgesehen, mit den Restklassen (49) überein. Ist aber $\mathfrak{K}_1 \neq \mathfrak{K}_2$, so liefern (48) und (49) lauter verschiedene Restklassen nach Γ, zusammen also $4q_{\mathfrak{a}}$. Wenn dann $\mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ nicht erschöpft ist, so kann man auf diese Weise fortfahren. Da im Ganzen $4\varphi(\mathfrak{a})$ Restklassen verfügbar sind, so folgt

(50) $$h_0(\mathfrak{a}) = \frac{4\varphi(\mathfrak{a})}{2q_{\mathfrak{a}}} = \frac{2\varphi(\mathfrak{a})}{q_{\mathfrak{a}}},$$

also nach (47)

(51) $$h(\mathfrak{a}) = \frac{2h\varphi(\mathfrak{a})}{q_{\mathfrak{a}}}.$$ [17]

Primideale in Idealklassen. Bezeichnet $\mathfrak{P}(x;\mathfrak{K})$ die Anzahl der Primideale $\mathfrak{p}$ mit Norm $\leq x$ in einer festen Idealklasse $\mathfrak{K}$ nach Γ, in Zeichen

(52) $$\mathfrak{P}(x;\mathfrak{K}) = \sum_{\substack{\mathfrak{p}\text{ in }\mathfrak{K}\\ N\mathfrak{p}\leq x}} 1,$$

so gilt nach Landau [18])

[17]) Nach (47), (50), (45) und (46) ist also
$$h(\mathfrak{a}) = h\frac{(G:\Gamma)}{(G_0:\Gamma_0)}.$$
Dahinter steckt ein allgemeiner Satz über Zahlgruppen in algebraischen Zahlkörpern. Vgl. z. B. das Webersche Lehrbuch der Algebra, Bd. III (zweite Auflage, Braunschweig 1908), § 161 oder, im allgemeineren Rahmen, H. Hasse „Bericht über neuere Untersuchungen und Probleme aus der Theorie der algebraischen Zahlkörper. Teil Ia" [Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 36 (1927), S. 233—311], § 5.

[18]) l. c. [16]), Satz LXXXV. Es verdient hervorgehoben zu werden, dass (53) ohne die Heckeschen $\zeta(s,\lambda)$-Funktionen bewiesen wird, lediglich unter Zuhilfenahme der mit Charakteren χ der Klassengruppe $\mathfrak{H}$ gebildeten L-Funktionen. Es ist (ebenda, Satz LXXXIV)
$$\sum_{\substack{\mathfrak{p}\\ N\mathfrak{p}\leq x}} \chi(\mathfrak{p}) = d_0\frac{x}{\log x} + B_{\mathfrak{a}}\frac{x}{\log^2 x}$$
($d_0 = 1$ für den Hauptcharakter, $= 0$ sonst), woraus (53) durch einen bekannten Kunstgriff folgt.

(53) $$\mathfrak{P}(x;\mathfrak{K}) = \frac{1}{h(\mathfrak{a})}\frac{x}{\log x} + B_{\mathfrak{a}}\frac{x}{\log^2 x}.$$

Aus (53) ergibt sich

(54) $$\sum_{\substack{\mathfrak{p}\text{ in }\mathfrak{K}\\ N\mathfrak{p}\leq N\lambda^a}} \log\frac{N\lambda}{N\mathfrak{p}} = \frac{1-a}{a}\frac{1}{h(\mathfrak{a})}N\lambda^a + B_{\mathfrak{a}}\frac{N\lambda^a}{\log N\lambda}$$

folgendermassen: Die linke Seite von (54) ist, wegen (52),

$$= \sum_{\substack{\mathfrak{p}\text{ in }\mathfrak{K}\\ N\mathfrak{p}\leq N\lambda^a}} \int_{N\mathfrak{p}}^{N\lambda} \frac{du}{u} = \int_2^{N\lambda} \frac{du}{u} \sum_{\substack{\mathfrak{p}\text{ in }\mathfrak{K}\\ N\mathfrak{p}\leq N\lambda^a,\ N\mathfrak{p}\leq u}} 1 = \int_2^{N\lambda^a} \frac{du}{u} \sum_{\substack{\mathfrak{p}\text{ in }\mathfrak{K}\\ N\mathfrak{p}\leq u}} 1 + \int_{N\lambda^a}^{N\lambda} \frac{du}{u} \sum_{\substack{\mathfrak{p}\text{ in }\mathfrak{K}\\ N\mathfrak{p}\leq N\lambda^a}} 1$$

$$= \int_2^{N\lambda^a} \frac{\mathfrak{P}(u;\mathfrak{K})}{u}\,du + \mathfrak{P}(N\lambda^a;\mathfrak{K}) \int_{N\lambda^a}^{N\lambda} \frac{du}{u}$$

$$= B_{\mathfrak{a}}\int_2^{N\lambda^a} \frac{du}{\log u} + \frac{1}{h(\mathfrak{a})}\frac{N\lambda^a}{\log N\lambda^a}\log\frac{N\lambda}{N\lambda^a} + B_{\mathfrak{a}}\frac{N\lambda^a}{\log^2 N\lambda^a}\log\frac{N\lambda}{N\lambda^a}$$

$$= \frac{1-a}{a}\frac{1}{h(\mathfrak{a})}N\lambda^a + B_{\mathfrak{a}}\frac{N\lambda^a}{\log N\lambda}.$$

Setzt man in (53) $\mathfrak{a} = 1$ und summiert über alle zugehörigen $\mathfrak{K}$, so kommt

(55) $$\sum_{\substack{\mathfrak{p}\\ N\mathfrak{p}\leq x}} 1 = \frac{x}{\log x} + B\frac{x}{\log^2 x}.$$ [19])

Trigonometrische Summen. Im Folgenden bezeichne α stets eine Körperzahl vom Nenner $\mathfrak{a}$ (d. h. schreibt man (α) als gekürzten Idealbruch, so sei $\mathfrak{a}$ der Nenner). Ich setze

$$E(\rho) = E_\alpha(\rho) = e^{2\pi i S\frac{\alpha\rho}{\sqrt{d}}},$$

so dass also

$$E(\rho_1) = E(\rho_2) \quad \text{für} \quad \rho_1 \equiv \rho_2 \pmod{\mathfrak{a}}.$$

(Die beiden letzten Formeln benutze ich im Folgendent, oft ohne sie

[19]) Natürlich wird (55) direkt, d. h. nicht erst auf dem Umweg über (53), bewiesen. Vgl. E. Landau „Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale" (I Auflage 1918, II Aufl. 1927), Satz 191.

ausdrücklich zu nennen.) Schreibe ich unter dem Summenzeichen: ρ mod $\mathfrak{a}$, so heisse dies: ρ durchläuft ein vollständiges System von $N\mathfrak{a}$ Restklassen mod $\mathfrak{a}$; ρ mod $\mathfrak{a}$, $(\rho, \mathfrak{a}) = 1$ heisse: ρ durchläuft ein vollständiges System von $\varphi(\mathfrak{a})$ zu $\mathfrak{a}$ primen Restklassen.

Nach Rademacher [20]) ist

$$\sum_{\substack{\rho \bmod \mathfrak{a} \\ (\rho, \mathfrak{a})=1}} E(\rho) = \mu(\mathfrak{a}). \tag{56}$$

Das einer Idealklasse $\mathfrak{K}$ aus $\mathfrak{H}_0$ im Sinne von (48) zugeordnete System von Restklassen nach Γ bezeichne ich mit $\Gamma_{\mathfrak{K}}$. Aus den zu (48) und (49) gegeben Erläuterungen geht dann hervor: durchläuft $\mathfrak{K}$ alle $h_0(\mathfrak{a})$ Klassen von $\mathfrak{H}_0$, so liefern die zugehörigen $\Gamma_{\mathfrak{K}}$ zusammen die sämtlichen $4\varphi(\mathfrak{a})$ Restklassen nach Γ, jede einmal. Unter diesen $4\varphi(\mathfrak{a})$ Restklassen nach Γ befinden sich $\varphi(\mathfrak{a})$ durch totalpositive Zahlen τ erzeugte, welche ein vollständiges System zu $\mathfrak{a}$ primer Restklassen mod $\mathfrak{a}$ bilden [16]). Wird daher

$$F_{\mathfrak{K}} = \sum_{\tau \text{ in } \Gamma_{\mathfrak{K}}} E(\tau) \tag{57}$$

gesetzt, so folgt aus (56)

$$\sum_{\mathfrak{K} \text{ in } \mathfrak{H}_0} F_{\mathfrak{K}} = \mu(\mathfrak{a}). \tag{58}$$

Von der in $\mathfrak{S}$ auftretenden „Gauss"-schen Summe

$$T = T_{\alpha, \mathfrak{a}} = \frac{1}{N\mathfrak{a}} \sum_{\rho \bmod \mathfrak{a}} E(\rho^2) \tag{59}$$

wird nur die Siegelsche Abschätzung

$$T = B\, N\mathfrak{a}^{-\frac{1}{2}} \text{ [21])} \tag{60}$$

gebraucht.

Die singuläre Reihe $\mathfrak{S}_{r,s}(\nu)$. Sie sieht so aus:

$$\mathfrak{S}_{r,s}(\nu) = \sum_{\mathfrak{a}} \left(\frac{\mu(\mathfrak{a})}{\varphi(\mathfrak{a})}\right)^s \sum_{\alpha} T^r E(-\nu) \qquad (r \geqq 5,\ s \geqq 0), \tag{61}$$

[20]) l. c. [10]), S. 116.

[21]) l. c. [9]), S. 15.

wobei $\mathfrak{a}$ alle ganzen Ideale des Körpers k durchläuft, α die $\varphi(\mathfrak{a})$ mod 1 inkongruenten Werte. Nach (60) ist

$$\sum_{\alpha} |T|^r = B\, N\mathfrak{a}^{-\frac{r}{2}} \cdot \varphi(\mathfrak{a}) = B\, N\mathfrak{a}^{1-\frac{r}{2}} = B\, N\mathfrak{a}^{-\frac{3}{2}}. \tag{62}$$

Die Reihe (61) konvergiert daher absolut.

Wird zur Abkürzung

$$\sum_{\alpha} T^r E(-\nu) = H(\mathfrak{a})$$

gesetzt, so ist $H(\mathfrak{a})$ multiplikativ, d. h. $H(\mathfrak{a}_1 \mathfrak{a}_2) = H(\mathfrak{a}_1) H(\mathfrak{a}_2)$ für $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2) = 1$ [22]). Da $\mu(\mathfrak{a})$ und $\varphi(\mathfrak{a})$ die gleiche Eigenschaft haben, so folgt aus (61) und (62)

$$\mathfrak{S}_{r,s}(\nu) = \prod_{\mathfrak{p} \text{ in } k} \left(1 + \left(\frac{\mu(\mathfrak{p})}{\varphi(\mathfrak{p})}\right)^s H(\mathfrak{p})\right) = \prod_{\mathfrak{p} \text{ in } k} \left(1 + \frac{(-1)^s}{(N\mathfrak{p}-1)^s} H(\mathfrak{p})\right). \tag{63}$$

$H(\mathfrak{p})$ ist von Siegel ausgerechnet worden [23]). Es ergibt sich:

$H(\mathfrak{p}) = 0$ für $\mathfrak{p} \mid 2$;

$H(\mathfrak{p}) = 0$ für $\mathfrak{p} \mid \nu$, $\mathfrak{p} \nmid 2$, r ungerade;

$$H(\mathfrak{p}) = \left(\frac{\nu}{\mathfrak{p}}\right)\left(\frac{-1}{\mathfrak{p}}\right)^{\frac{r-1}{2}} N\mathfrak{p}^{-\frac{r-1}{2}} \quad \text{für } \mathfrak{p} \nmid 2\nu,\ r \text{ ungerade};$$

$$H(\mathfrak{p}) = -\left(\frac{-1}{\mathfrak{p}}\right)^{\frac{r}{2}} N\mathfrak{p}^{-\frac{r}{2}} \quad \text{für } \mathfrak{p} \nmid 2\nu,\ r \text{ gerade};$$

$$H(\mathfrak{p}) = \left(\frac{-1}{\mathfrak{p}}\right)^{\frac{r}{2}} N\mathfrak{p}^{-\frac{r}{2}} (N\mathfrak{p} - 1) \quad \text{für } \mathfrak{p} \mid \nu,\ \mathfrak{p} \nmid 2,\ r \text{ gerade}.$$

Setzt man diese Werte in (63) ein, so folgen (40.1) — (40.4).

Ich habe jetzt (42) nachzuweisen, wobei $\mathfrak{S}_{r,s}(\nu)$ durch (61) gegeben ist.

[22]) Siegel, l. c. [9]), S. 24.

[23]) l. c. [9]), S. 25—29.

§ 2.

In Σ'_{ω} moge ω über die Werte

$$\omega < \lambda, \quad \omega' < \lambda', \quad N\omega \leqq N\lambda^{a} \tag{64}$$

laufen.

Für die Summe

$$\mathrm{P}(\lambda) = \mathrm{P}(\lambda, a) = \Sigma'_{\omega} E(\omega) \tag{65}$$

soll in diesem Paragraphen

$$\mathrm{P}(\lambda) = \frac{(1-a)\,\mu(\mathfrak{a})}{2\,a\,h\,\varphi(\mathfrak{a})\log\eta}\,N\lambda^{a} + B_{\mathfrak{a}}\,\frac{N\lambda^{a}}{\log N\lambda} \tag{66}$$

nachgewiesen werden.

Zunächst zeige ich

$$\sum_{\substack{\rho \\ \rho\sim\omega,\ \rho<\lambda,\ \rho'<\lambda'}} 1 = \frac{1}{q_{\mathfrak{a}}\log\eta}\log\frac{N\lambda}{N\omega} + B. \tag{67}$$

Ist nämlich ρ_0, ρ_0' ein in der Summe (67) auftretendes Paar von ρ-Werten, so sind alle übrigen ρ, ρ' unter den Zahlen $\rho = \rho_0\,\eta_{\mathfrak{a}}^{n}$, $\rho' = \rho'_0\,\eta_{\mathfrak{a}}^{-n}$, n ganz rational, zu suchen. Bezeichnet nun insbesondere ρ_0 das kleinste ρ, so ist ρ'_0 das grösste ρ', d. h.

$$\frac{\lambda'}{\eta_{\mathfrak{a}}} \leqq \rho'_0 < \lambda'. \tag{68}$$

Ferner gilt

$$\sum_{\substack{\rho \\ \rho\sim\omega,\ \rho<\lambda,\ \rho'<\lambda'}} 1 = n, \quad \text{wenn } \rho_0\,\eta_{\mathfrak{a}}^{n-1} < \lambda \leqq \rho_0\,\eta_{\mathfrak{a}}^{n}. \tag{69}$$

Aus (68) und (69) folgt (67) so:

$$\eta_{\mathfrak{a}}^{n-1} < \frac{\lambda}{\rho_0} = \frac{\lambda\,\rho'_0}{N\rho_0} = \frac{\lambda\,\rho'_0}{N\,\omega} < \frac{\lambda\,\lambda'}{N\omega} = \frac{N\lambda}{N\omega},$$

$$n - 1 < \frac{1}{\log\eta_{\mathfrak{a}}}\log\frac{N\lambda}{N\omega} = \frac{1}{q_{\mathfrak{a}}\log\eta}\log\frac{N\lambda}{N\omega},$$

$$\eta_{\mathfrak{a}}^{n} \geqq \frac{\lambda}{\rho_0} = \frac{\lambda\,\rho'_0}{N\rho_0} = \frac{\lambda\,\rho'_0}{N\,\omega} \geqq \frac{1}{\eta_{\mathfrak{a}}}\frac{\lambda\,\lambda'}{N\omega} = \frac{1}{\eta_{\mathfrak{a}}}\frac{N\lambda}{N\,\omega},$$

$$n + 1 \geqq \frac{1}{\log\eta_{\mathfrak{a}}}\log\frac{N\lambda}{N\omega} = \frac{1}{q_{\mathfrak{a}}\log\eta}\log\frac{N\lambda}{N\omega},$$

$$n = \frac{1}{q_{\mathfrak{a}}\log\eta}\log\frac{N\lambda}{N\omega} + B.$$

Aus (67) mit $\mathfrak{a} = 1$ und (64) folgt

$$\sum_{\mathfrak{p}\mid\mathfrak{a}}\ \sum_{\substack{\omega \\ (\omega)=\mathfrak{p}}}' 1 = B\log N\lambda \cdot \sum_{\mathfrak{p}\mid\mathfrak{a}} 1 = B_{\mathfrak{a}}\log N\lambda. \tag{70}$$

Die in (64) auftretenden ω sondere ich nach den zugehörigen $\mathfrak{p}$ mit $(\omega) = \mathfrak{p}$. Die $\mathfrak{p}\mid\mathfrak{a}$ werden weggeworfen. Jedes zu den übrigen $\mathfrak{p}$ gehörige ω-System spalte ich in die verschiedenen Restklassen nach Γ. Es folgt, mit Rücksicht auf (70),

$$\mathrm{P}(\lambda) = \sum_{\substack{\mathfrak{p}\nmid\mathfrak{a} \\ N\mathfrak{p}\leqq N\lambda^{a}}}\ \sum_{\substack{[\omega]_{\mathfrak{a}} \\ (\omega)=\mathfrak{p}}}\ \sum_{\substack{\rho \\ \rho\sim\omega,\ \rho<\lambda,\ \rho'<\lambda'}} E(\rho) + \sum_{\substack{\mathfrak{p}\mid\mathfrak{a} \\ N\mathfrak{p}\leqq N\lambda^{a}}}\ \sum_{\substack{\omega \\ (\omega)=\mathfrak{p}}}' E(\omega)$$

$$= \sum_{\substack{\mathfrak{p}\nmid\mathfrak{a} \\ N\mathfrak{p}\leqq N\lambda^{a}}}\ \sum_{\substack{[\omega]_{\mathfrak{a}} \\ (\omega)=\mathfrak{p}}} E(\omega) \sum_{\substack{\rho \\ \rho\sim\omega,\ \rho<\lambda,\ \rho'<\lambda'}} 1 + B_{\mathfrak{a}}\frac{N\lambda^{a}}{\log N\lambda}.$$

Setzt man hierin für die ρ-Summe den Wert (67) ein, so liefert B den Fehler

$$B \sum_{\substack{\mathfrak{p} \\ N\mathfrak{p}\leqq N\lambda^{a}}}\ \sum_{[\omega]_{\mathfrak{a}}} 1 = B_{\mathfrak{a}} \sum_{\substack{\mathfrak{p} \\ N\mathfrak{p}\leqq N\lambda^{a}}} 1 = B_{\mathfrak{a}}\frac{N\lambda^{a}}{\log N\lambda},$$

wegen (55). Es ist daher

$$\mathrm{P}(\lambda) = \frac{1}{q_{\mathfrak{a}}\log\eta} \sum_{\substack{\mathfrak{p}\nmid\mathfrak{a} \\ N\mathfrak{p}\leqq N\lambda^{a}}}\ \sum_{\substack{[\omega]_{\mathfrak{a}} \\ (\omega)=\mathfrak{p}}} E(\omega)\log\frac{N\lambda}{N\omega} + B_{\mathfrak{a}}\frac{N\lambda^{a}}{\log N\lambda}$$

$$= \frac{1}{q_{\mathfrak{a}}\log\eta} \sum_{\substack{\mathfrak{p}\nmid\mathfrak{a} \\ N\mathfrak{p}\leqq N\lambda^{a}}} \log\frac{N\lambda}{N\mathfrak{p}} \sum_{\substack{[\omega]_{\mathfrak{a}} \\ (\omega)=\mathfrak{p}}} E(\omega) + B_{\mathfrak{a}}\frac{N\lambda^{a}}{\log N\lambda}$$

$$= \frac{1}{q_{\mathfrak{a}}\log\eta} \sum_{\mathfrak{K}\text{ in }\mathfrak{H}_0}\ \sum_{\substack{\mathfrak{p}\text{ in }\mathfrak{K} \\ N\mathfrak{p}\leqq N\lambda^{a}}} \log\frac{N\lambda}{N\mathfrak{p}} \sum_{\substack{[\omega]_{\mathfrak{a}} \\ (\omega)=\mathfrak{p}}} E(\omega) + B_{\mathfrak{a}}\frac{N\lambda^{a}}{\log N\lambda}. \tag{71}$$

In (71) kann man

$$(72)\qquad \sum_{\substack{[\omega]_{\mathfrak{a}} \\ (\omega)=\mathfrak{p}}} E(\omega) \quad \text{durch} \quad \sum_{\tau \text{ in } \Gamma_{\mathfrak{K}}} E(\tau)$$

ersetzen. Gibt es nämlich in $\Gamma_{\mathfrak{K}}$ keinen totalpositiven Rest, so sind beide Summen (72) leer, also Null. Andernfalls kann jedes Ideal in $\mathfrak{K}$ durch eine totalpositive Zahl erzeugt werden. Ich darf annehmen, dass es in $\mathfrak{K}$ ein $\mathfrak{p}$ mit $N\mathfrak{p} \leqq N\lambda^a$ gibt; wegen (52) und (53) ist nämlich sonst $N\lambda = B_{\mathfrak{a}}$, also (66) gewiss erfüllt. Dann gibt es also in $\mathfrak{K}$ ein $\mathfrak{p} = (\omega)$ mit $N\mathfrak{p} \leqq N\lambda^a$. Die ω-Summe in (72) läuft mithin über die totalpositiven Reste nach Γ unter den Zahlen

$$(73)\qquad \eta^n\omega,\ -\eta^n\omega \quad (1 \leqq n \leqq q_{\mathfrak{a}}).$$

Das sind aber genau die totalpositiven Reste $\Gamma_{\mathfrak{K}}$, über welche die τ-Summe von (72) läuft. Beide Summen sind also gleich [24]).

[24]) Um einen genaueren Einblick in diese Verhältnisse zu gewinnen, muss man die Fälle $N\eta = 1$, und $N\eta = -1$ unterscheiden. Es sei zunächst $N\eta = 1$, also η totalpositiv. Ist dann β eine zu $\mathfrak{a}$ prime nicht totalpositive Zahl, so haben alle Zahlen $\pm\eta^n\beta$, n ganz rational, die gleiche Eigenschaft. Das Ideal (β) kann also durch keine totalpositive Zahl erzeugt werden. Für die zugehörige Klasse $\mathfrak{K}$ enthält $\Gamma_{\mathfrak{K}}$ keinen totalpositiven Rest. Bezeichnen wir eine solche Klasse mit $\mathfrak{K}_-$, die übrigen Klassen von $\mathfrak{H}_0$ mit $\mathfrak{K}_+$, so bilden die $\mathfrak{K}_+$ eine Untergruppe $\mathfrak{H}_1$ von $\mathfrak{H}_0$ der Ordnung $\frac{1}{2}h_0(\mathfrak{a})$ Denn es ist $\mathfrak{K}_+\mathfrak{K}_+ = \mathfrak{K}_-\mathfrak{K}_- = \mathfrak{K}_+$, $\mathfrak{K}_+\mathfrak{K}_- = \mathfrak{K}_-\mathfrak{K}_+ = \mathfrak{K}_-$. Für $\frac{1}{2}h_0(\mathfrak{a})$ Klassen sind also die beiden Summen (72) leer. Jede der übrigen $\frac{1}{2}h_0(\mathfrak{a})$ Klassen liefert die $q_{\mathfrak{a}}$ totalpositiven Reste $\eta^n\omega$ und die $q_{\mathfrak{a}}$ „totalnegativen" Reste $-\eta^n\omega\ (1 \leqq n \leqq q_{\mathfrak{a}})$. Insgesamt gibt es $\frac{1}{2}h_0(\mathfrak{a}) \cdot q_{\mathfrak{a}} = \varphi(\mathfrak{a})$ (50) totalpositive Reste, wie es sich gehört. Im Falle $N\eta = -1$ kann jedes Ideal durch eine totalpositive Zahl erzeugt werden und jedes $\mathfrak{K}$ ist ein $\mathfrak{K}_+$. Die totalpositiven Einheiten von k sind die Potenzen von $\eta_1 = \eta^2$ (der Grundeinheit mod 1). Für jede der $h_0(\mathfrak{a})$ Klassen enthält dann $\Gamma_{\mathfrak{K}}$ die $\frac{q_{\mathfrak{a}}}{2}$ totalpositiven Reste

$$\eta_1{}^n\omega \quad \left(1 \leqq n \leqq \frac{q_{\mathfrak{a}}}{2}\right).$$

Von den übrigen $\frac{3q_{\mathfrak{a}}}{2}$ Zahlen (73) sind $\frac{q_{\mathfrak{a}}}{2}$ totalnegativ und $q_{\mathfrak{a}}$ haben die gemischte Signatur $+-$ oder $-+$. Es gibt also auch hier $h_0(\mathfrak{a}) \cdot \frac{q_{\mathfrak{a}}}{2} = \varphi(\mathfrak{a})$ (50) totalpositive Reste.

Ersetzt man in (71) die erste Summe (72) durch die zweite, so tolgt

$$\mathrm{P}(\lambda) = \frac{1}{q_{\mathfrak{a}}\log\eta} \sum_{\mathfrak{K} \text{ in } \mathfrak{H}_0} \sum_{\substack{\mathfrak{p} \text{ in } \mathfrak{K} \\ N\mathfrak{p} \leqq N\lambda^a}} \log\frac{N\lambda}{N\mathfrak{p}} \sum_{\tau \text{ in } \Gamma_{\mathfrak{K}}} E(\tau) + B_{\mathfrak{a}}\frac{N\lambda^a}{\log N\lambda}$$

$$= \frac{1}{q_{\mathfrak{a}}\log\eta} \sum_{\mathfrak{K} \text{ in } \mathfrak{H}_0} F_{\mathfrak{K}} \sum_{\substack{\mathfrak{p} \text{ in } \mathfrak{K} \\ N\mathfrak{p} \leqq N\lambda^a}} \log\frac{N\lambda}{N\mathfrak{p}} + B_{\mathfrak{a}}\frac{N\lambda^a}{\log N\lambda} \qquad (57)$$

$$= \frac{1-a}{a\,h(\mathfrak{a})\,q_{\mathfrak{a}}\log\eta} N\lambda^a \sum_{\mathfrak{K} \text{ in } \mathfrak{H}_0} F_{\mathfrak{K}} + B_{\mathfrak{a}}\frac{N\lambda^a}{\log N\lambda} \qquad (54)$$

$$(66)\qquad = \frac{(1-a)\,\mu(\mathfrak{a})}{2\,a\,h\,\varphi(\mathfrak{a})\log\eta} N\lambda^a + B_{\mathfrak{a}}\frac{N\lambda^a}{\log N\lambda} \qquad (51, 58).$$

Für $\mathfrak{a} = 1$ ist $E(\omega) = 1$; aus (65) und (66) folgt dann

$$(74)\qquad \sum_{\omega}{}' 1 = B\,N\lambda^a.$$

§ 3.

In diesem Paragraphen zeige ich:

$$(75)\qquad \frac{\Gamma^2\left(\frac{r}{2}\right) d^{\frac{r-1}{2}}}{\pi^r} \left(\frac{2\,h\,a\log\eta}{1-a}\right)^s A_{r,s;a}(\nu)$$

$$= N\nu^{\frac{r}{2}+sa-1}\,\mathfrak{S}_{r,s}(\nu) + o\left(N\nu^{\frac{r}{2}+sa-1}\right) \quad (r \geqq 5,\ s \geqq 0),$$

wobei $A_{r,s;a}(\nu)$ die Lösungen von (39) und (43) abzählt und $\mathfrak{S}$ durch (61) gegeben ist.

Für $s = 0$ gilt (75) nach Siegel, l. c. [9]), Formel (63). Ich wende jetzt Induktion $s \longrightarrow s+1$ an.

Nach (39), (43) und (64) ist

$$(76)\qquad A_{r,s+1;a}(\lambda) = \sum_{\omega}{}' A_{r,s;a}(\lambda-\omega) + B.$$

Ersetze ich in (75) ν durch $\lambda-\omega$ und summiere über die ω in (64), so liefert das o-Glied von (75) wegen (74) den Fehler

$$o\left(N\lambda^{\frac{r}{2}+(s+1)a-1}\right).$$

Mit Rücksicht auf (76) genügt es somit:

$$\sum_{\omega}{}' N(\lambda-\omega)^{\frac{r}{2}+sa-1}\,\mathfrak{S}_{r,s}(\lambda-\omega) \tag{77}$$

$$=\frac{1-a}{2\,a\,h\log\eta_i}\,N\lambda^{\frac{r}{2}+(s+1)a-1}\mathfrak{S}_{r,s+1}(\lambda)+o\left(N\lambda^{\frac{r}{2}+(s+1)a-1}\right)$$

nachzuweisen.

Zunächst will ich auf der linken Seite von (77) unter dem Normzeichen $\lambda-\omega$ durch λ ersetzen. Hierzu sind einige kleine Vorbereitungen notwendig.

$$\lambda'\sum_{\omega}{}'\omega=B\lambda'\sum_{\substack{\nu\\ N\nu\leqq N\lambda^a}}\;\sum_{\substack{\omega\\ (\omega)=\nu,\ \omega\leqq\lambda}}\omega$$

$$=B\lambda'\sum_{\substack{\nu\\ N\nu\leqq N\lambda^a}}\;\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda}{\eta^n}=B\,N\lambda\sum_{\substack{\nu\\ N\nu\leqq N\lambda^a}}1,$$

also nach (55)

$$\lambda'\sum_{\omega}{}'\omega=B\,\frac{N\lambda^{1+a}}{\log N\lambda}. \tag{78}$$

Ebenso ergibt sich

$$\lambda\sum_{\omega}{}'\omega'=B\,\frac{N\lambda^{1+a}}{\log N\lambda}. \tag{79}$$

Ferner ist nach (61) und (62)

$$\mathfrak{S}_{r,s}(\nu)=B. \tag{80}$$

Mit Hilfe von (78)—(80) folgt jetzt:

$$0\leqq\sum_{\omega}{}'(N\lambda-N(\lambda-\omega))\leqq\sum_{\omega}{}'(\omega\lambda'+\omega'\lambda)=B\,\frac{N\lambda^{1+a}}{\log N\lambda},$$

$$\sum_{\omega}{}'\left(N\lambda^{\frac{r}{2}+sa-1}-N(\lambda-\omega)^{\frac{r}{2}+sa-1}\right)\mathfrak{S}_{r,s}(\lambda-\omega)$$

$$=B\sum_{\omega}{}'\left(N\lambda^{\frac{r}{2}+sa-1}-N(\lambda-\omega)^{\frac{r}{2}+sa-1}\right)$$

$$=B\,N\lambda^{\frac{r}{2}+sa-2}\sum_{\omega}{}'(N\lambda-N(\lambda-\omega))=B\,\frac{N\lambda^{\frac{r}{2}+(s+1)a-1}}{\log N\lambda}.$$

Nehme ich also in (77) jene Vertauschung von $\lambda-\omega$ mit λ unter dem Normzeichen vor und dividiere sodann beide Seiten durch $N\lambda^{\frac{r}{2}+sa-1}$, so sieht die zu beweisende Abschätzung so aus:

$$\sum_{\omega}{}'\mathfrak{S}_{r,s}(\lambda-\omega)=\frac{1-a}{2\,a\,h\log\eta_i}\,N\lambda^a\cdot\mathfrak{S}_{r,s+1}(\lambda)+o(N\lambda^a). \tag{81}$$

(81) ergibt sich, mit Hilfe von (61), (62), (65), (66) und (74) folgendermassen:

$$\mathfrak{S}_{r,s}(\nu)-\sum_{\substack{\mathfrak{a}\\ N\mathfrak{a}\leqq K}}\left(\frac{\mu(\mathfrak{a})}{\varphi(\mathfrak{a})}\right)^s\sum_{\alpha}T^r\,E(-\nu)=B\sum_{\substack{\mathfrak{a}\\ N\mathfrak{a}>K}}N\mathfrak{a}^{-\frac{3}{2}}=B\,K^{-\frac{1}{2}},$$

$$\sum_{\omega}{}'\mathfrak{S}_{r,s}(\lambda-\omega)=\sum_{\omega}{}'\sum_{\substack{\mathfrak{a}\\ N\mathfrak{a}\leqq K}}\left(\frac{\mu(\mathfrak{a})}{\varphi(\mathfrak{a})}\right)^s\sum_{\alpha}T^r\,E(\omega-\lambda)+B\,K^{-\frac{1}{2}}\sum_{\omega}{}'1$$

$$=\sum_{\substack{\mathfrak{a}\\ N\mathfrak{a}\leqq K}}\left(\frac{\mu(\mathfrak{a})}{\varphi(\mathfrak{a})}\right)^s\sum_{\alpha}T^r\,E(-\lambda)\sum_{\omega}{}'E(\omega)+B\,K^{-\frac{1}{2}}N\lambda^a$$

$$=\frac{1-a}{2\,a\,h\log\eta_i}\,N\lambda^a\sum_{\substack{\mathfrak{a}\\ N\mathfrak{a}\leqq K}}\left(\frac{\mu(\mathfrak{a})}{\varphi(\mathfrak{a})}\right)^{s+1}\sum_{\alpha}T^r\,E(-\lambda)$$

$$+B_K\,\frac{N\lambda^a}{\log N\lambda}\sum_{\substack{\mathfrak{a}\\ N\mathfrak{a}\leqq K}}N\mathfrak{a}^{-\frac{3}{2}}+B\,K^{-\frac{1}{2}}N\lambda^a$$

$$=\frac{1-a}{2\,a\,h\log\eta_i}\,N\lambda^a\sum_{\mathfrak{a}}\left(\frac{\mu(\mathfrak{a})}{\varphi(\mathfrak{a})}\right)^{s+1}\sum_{\alpha}T^r\,E(-\lambda)+B\,N\lambda^a\sum_{\substack{\mathfrak{a}\\ N\mathfrak{a}>K}}N\mathfrak{a}^{-\frac{3}{2}}$$

$$+B_K\,\frac{N\lambda^a}{\log N\lambda}+B\,K^{-\frac{1}{2}}N\lambda^a$$

$$=\frac{1-a}{2\,a\,h\log\eta_i}\,N\lambda^a\,\mathfrak{S}_{r,s+1}(\lambda)+B_K\,\frac{N\lambda^a}{\log N\lambda}+B\,K^{-\frac{1}{2}}N\lambda^a.$$

Es gibt also eine von k, r, s, a abhängige positive Zahl C und eine von k, r, s, a, K abhängige positive Zahl C_K, so dass

(82)
$$\left|\sum_{\omega}{}' \mathfrak{S}_{r,s}(\lambda-\omega) - \frac{1-a}{2\,a\,h\log\eta}\, N\lambda^a\, \mathfrak{S}_{r,s+1}(\lambda)\right|$$
$$\leq \left(\frac{C_K}{\log N\lambda} + \frac{C}{K^{\frac{1}{2}}}\right) N\lambda^a.$$

Ein beliebiges $\varepsilon > 0$ sei vorgegeben. Dann wähle ich das ganze rationale $K = K(k, r, s, a, \varepsilon)$ so gross, dass $CK^{-\frac{1}{2}} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ ist. Alsdann wähle ich die positive Zahl $n_0 = n_0(k, r, s, a, \varepsilon)$ so gross, dass $C_K \log^{-1} n_0 \leq \frac{\varepsilon}{2}$ ist. Für $N\lambda \geq n_0$ ist die linke Seite von (82) höchstens $\varepsilon N\lambda^a$. (81) trifft also zu.

§ 4.

Es verbleibt noch (44). Ich setze
$$D_{r,s,a}(\lambda) = A_{r,s,a}(\lambda) - A_{r,s;a}(\lambda).$$
Nach Definition ist dann $D_{r,s,a}(\lambda)$ die Lösungszahl von $\lambda = \mu_1^2 + \dots + \mu_r^2 + \omega_1 + \dots + \omega_s$ mit
$$\left\{\begin{array}{l} \nu = \mu_1^2 + \dots + \mu_r^2,\ N\omega_1 \leq N\lambda^a,\ N\omega_2 \leq N\lambda^a, \dots, N\omega_s \leq N\lambda^a; \\ \text{aber nicht zugleich } N\omega_1 \leq N(\nu+\omega_1)^a,\ N\omega_2 \leq N(\nu+\omega_1+\omega_2)^a, \dots, \\ \qquad N\omega_s \leq N(\nu+\omega_1+\dots+\omega_s) = N\lambda^a. \end{array}\right.$$

Da D für $s=0$ und $s=1$ verschwindet, darf ich $s \geq 2$ annehmen.

Zum festen ν gehören $A_{r,0}(\nu) = A_{r,0;a}(\nu)$ Lösungen $\mu_1, \dots, \mu_r$; wegen (75) und (80) sind es $BN\nu^{\frac{r}{2}-1} = BN\lambda^{\frac{r}{2}-1}$ Lösungen. (44) wird daher bewiesen sein, wenn ich zeige: Es sei $D'_{r,s,a}(\lambda)$ die Lösungsanzahl von

(83)
$$\left\{\begin{array}{l} \lambda = \nu + \omega_1 + \dots + \omega_s,\ N\omega_1 \leq N\lambda^a,\ N\omega_2 \leq N\lambda^a, \dots, N\omega_s \leq N\lambda^a; \\ \text{aber nicht zugleich } N\omega_1 \leq N(\nu+\omega_1)^a,\ N\omega_2 \leq N(\nu+\omega_1+\omega_2)^a, \dots, \\ \qquad N\omega_s \leq N(\nu+\omega_1+\dots+\omega_s)^a = N\lambda^a. \end{array}\right.$$

Dann ist

(84)
$$D'_{r,s,a}(\lambda) = o(N\lambda^{sa}).$$

Jede Lösung $\nu, \omega_1, \dots, \omega_s$ von (83) ist zugleich Lösung von

(85)
$$\left\{\begin{array}{l} \lambda = \nu + \omega_1 + \dots + \omega_s,\ N\omega_1 \leq N\lambda^a, \dots, N\omega_s \leq N\lambda^a; \\ \text{aber nicht zugleich } N\omega_1 \leq N\nu^a, \dots, N\omega_s \leq N\nu^a. \end{array}\right.$$

Es genügt daher (84) zu beweisen, wenn D' die Lösungszahl von (85) ist. Da (85) in $\omega_1, \dots, \omega_s$ symmetrisch ist, so genügt es (84) zu beweisen, wenn D' die Lösungszahl von

(86)
$$\lambda = \nu + \omega_1 + \dots + \omega_s,\ N\nu^a < N\omega_1 \leq N\lambda^a,\ N\omega_2 \leq N\lambda^a, \dots, N\omega_s \leq N\lambda^a$$

ist. Also habe nun D' diese Bedeutung.

Jedes $\omega_n\ (1 \leq n \leq s)$ in (86) hat nach (74) den Spielraum $BN\lambda^a$, denn es muss
$$\omega_n < \lambda,\ \omega'_n < \lambda',\ N\omega_n \leq N\lambda^a$$
sein, d. h. es gibt höchstens soviele ω_n, wie (64) Lösungen besitzt, d. h. $\sum\limits_{\omega}{}' 1$.

Es sei nun l die durch

(87)
$$\sqrt{\log N\lambda} < l \leq \sqrt{\log N\lambda} + 1$$

definierte natürliche Zahl.

Die Lösungssysteme $\omega_1, \dots, \omega_s$ von (86) teile ich folgendermassen in die beiden Klassen I und II ein. Es sei n eine feste natürliche Zahl aus der Reihe $1, \dots, s$. Ich betrachte die Menge Ω_n aller ω_n. Die Zahlen von Ω_n sondere ich nach den zugehörigen Primidealen $\mathfrak{p} = (\omega_n)$. Solcher $\mathfrak{p}$ gibt es höchstens

(88)
$$\sum_{\substack{\mathfrak{p} \\ N\mathfrak{p} \leq N\lambda^a}} 1 = B\frac{N\lambda^a}{\log N\lambda} \quad (55).$$

Bei jedem dieser $\mathfrak{p}$ werfe ich von den zugehörigen ω_n die l grössten weg und alsdann von den übrig bleibenden ω_n noch diejenigen l Zahlen, bei denen ω'_n am grössten ist; sollten zu dem $\mathfrak{p}$ weniger als $2l$ Zahlen ω_n gehören, so streiche ich sie alle. Die derart verkleinerte Menge Ω_n heisse Ω_n^{I}, die Gesamtheit der weggeworfenen ω_n-Zahlen sei Ω_n^{II}.

Eine Lösung $\omega_1, \dots, \omega_s$ gehöre der I Klasse an, wenn ω_n in Ω_n^{I} liegt $(1 \leq n \leq s)$; sie gehöre der II Klasse an, wenn für mindestens ein n_0 aus der Reihe $1, \ldots, s$ die Zahl ω_{n_0} in $\Omega_{n_0}^{\mathrm{II}}$ liegt. Die zugehörigen Anzahlfunktionen nenne ich $D^{\mathrm{I}}(\lambda)$ und $D^{\mathrm{II}}(\lambda)$.

Um $D^{\mathrm{II}}(\lambda)$ abzuschätzen, greife ich ein n_0 der eben gekennzeichneten Art haraus. Nach (87) und (88) hat dann ω_{n_0} den Spielraum

$$B \frac{N\lambda^a}{\log N\lambda} l = B \frac{N\lambda^a}{\sqrt{\log N\lambda}}.$$

Jede der übrigen $s-1$ Zahlen ω_n hat, wie wir schon wissen, den Spielraum $BN\lambda^a$. Alles in allem ist also

$$D^{\mathrm{II}}(\lambda) = B \frac{N\lambda^{sa}}{\sqrt{\log N\lambda}} = o(N\lambda^{sa}). \tag{89}$$

Die Abschätzung von $D^{\mathrm{I}}(\lambda)$ ist etwas umständlicher. Es gehöre $\omega_1, \ldots, \omega_s$ der I Klasse an; n sei eine feste Zahl der Reihe $1, \ldots, s$. Da ω_n zu Ω_n^{I} gehört, so muss

$$\omega_n \leqq \frac{\lambda}{\eta^l}, \quad \omega'_n \leqq \frac{\lambda'}{\eta^l}$$

sein. Es ist daher

$$\omega_1 + \ldots + \omega_s = B \frac{\lambda}{\eta^l}, \quad \omega'_1 + \ldots + \omega'_s = B \frac{\lambda'}{\eta^l},$$

$$N\nu = (\lambda - \omega_1 - \ldots - \omega_s)(\lambda' - \omega'_1 - \ldots - \omega'_s) = \left(\lambda + \frac{B\lambda}{\eta^l}\right)\left(\lambda' + \frac{B\lambda'}{\eta^l}\right),$$

$$N\nu = N\lambda\left(1 + \frac{B}{\eta^l}\right), \quad N\nu^a = N\lambda^a\left(1 + \frac{B}{\eta^l}\right) = N\lambda^a + B\frac{N\lambda^a}{\eta^l}.$$

Mit Hilfe von (55) und (89) folgt hieraus

$$\sum_{\substack{\mathfrak{p} \\ N\nu^a < N\mathfrak{p} \leqq N\lambda^a}} 1 = \frac{N\lambda^a}{\log N\lambda^a} - \frac{N\nu^a}{\log N\nu^a} + B\frac{N\lambda^a}{\log^2 N\lambda}$$

$$= B\frac{N\lambda^a}{\eta^l \log N\lambda} + B\frac{N\lambda^a}{\log^2 N\lambda} = B\frac{N\lambda^a}{\log^2 N\lambda}.$$

Zu jedem $\mathfrak{p}$ gibt es, wie aus (70) mit $\mathfrak{a} = 1$ hervorgeht, $B \log N\lambda$ Werte ω_1. Ω_1^{I} besteht also aus $B \dfrac{N\lambda^a}{\log^2 N\lambda} \log N\lambda = \dfrac{BN\lambda^a}{\log N\lambda}$ Zahlen. Jedes der übrigen Ω_n^{I} $(n > 1)$ hat $BN\lambda^a$ Zahlen. Alles in allem ist also

$$D^{\mathrm{I}}(\lambda) = B \frac{N\lambda^{sa}}{\log N\lambda} = o(N\lambda^{sa}). \tag{90}$$

Mit (89) und (90) ist (84) bewiesen.

Dritter Teil.

Es mögen die Bezeichnungen des zweiten Teiles gelten.

Der Stern bei ω-Summen heisst: es soll überdies $\omega \equiv \rho \pmod{\mathfrak{a}}$ sein. Unter dem Normzeichen lasse ich jetzt auch paarweise auftretende positive Veränderliche zu, die mit u, u' bezeichnet werden, z. B. $N(\lambda - u) = (\lambda - u)(\lambda' - u')$. Es sei

$$\sum_{\substack{\omega \\ \omega \leqq u,\, \omega' \leqq u'}}^{*} 1 = \pi(u, u'; \mathfrak{a}, \rho). \tag{91}$$

Für $(\rho, \mathfrak{a}) = 1$ und $Nu \geqq 2$ gilt nach Rademacher [25])

$$\pi(u, u'; \mathfrak{a}, \rho) = \{2\varphi(\mathfrak{a})\, h \log \eta\}^{-1} Nu \log^{-1} Nu + B_{\mathfrak{a}} Nu \log^{-2} Nu. \tag{92}$$

Erst diese zweidimensionale Übertragung des Primzahlsatzes (8) ermöglicht es mir,

$$A_{r,s}(\nu) = \frac{\pi^r}{\Gamma^2\left(\frac{r}{2} + s\right) d^{\frac{r-1}{2}} (2h\log\eta)^s} \frac{N\nu^{\frac{r}{2}+s-1}}{\log^s N\nu} \mathfrak{S}_{r,s}(\nu) + o\left(\frac{N\nu^{\frac{r}{2}+s-1}}{\log^s N\nu}\right) \tag{93}$$

zu beweisen. Das ist die Abschätzung (40) von Frl. Silberberg, jedoch mit einem weniger scharfen Restglied. Die Rechnungen sind denen des ersten Teils sehr ähnlich.

Für $s = 0$ ist (93) nach Siegel, l. c. [9]), Formel (63), erfüllt. Ich wende Induktion von s auf $s+1$ an.

$$\mathfrak{T}_{r,s}(\lambda) = \sum_{\omega \leqq \lambda,\, \omega' \leqq \lambda'} N(\lambda - \omega)^{\frac{r}{2}+s-1} \log^{-s}\{2 + N(\lambda - \omega)\}\, \mathfrak{S}_{r,s}(\lambda - \omega). \tag{94}$$

---

[25]) H. Rademacher „Über die Anzahl der Primzahlen eines reell-quadratischen Zahlkörpers, deren Konjugierte unterhalb gegebener Grenzen liegen" [diese Zeitschrift 1 (1935), S. 67—77]. Zum Beweise verwendet Rademacher den Hauptsatz seiner in den Mathem. Annalen herauskommenden Arbeit „Primzahlen reell-quadratischer Zahlkörper in Winkelräumen", in welcher von den Eigenschaften der $\zeta(s, \lambda)$-Funktionen Gebrauch gemacht wird.

$$\mathfrak{T}_{r,s}(\lambda-\omega)-\sum_{\substack{\mathfrak{a}\\ N\mathfrak{a}\leqq\sqrt{N\lambda}}}\left(\frac{\mu(\mathfrak{a})}{\varphi(\mathfrak{a})}\right)^{s}\sum_{\alpha}T^{r}E(\omega-\lambda)$$

$$=\sum_{\substack{\mathfrak{a}\\ N\mathfrak{a}>\sqrt{N\lambda}}}\left(\frac{\mu(\mathfrak{a})}{\varphi(\mathfrak{a})}\right)^{s}\sum_{\alpha}T^{r}E(\omega-\lambda)\quad\textbf{(61)}$$

(95) $$=B\sum_{\substack{\mathfrak{a}\\ N\mathfrak{a}>\sqrt{N\lambda}}}N\mathfrak{a}^{1-\frac{r}{2}}=B\,N\lambda^{1-\frac{r}{4}}\quad\textbf{(62)}.$$

(96) $$\sum_{\omega\leqq\lambda,\,\omega'\leqq\lambda'}1=B\frac{N\lambda}{\log N\lambda}\quad\textbf{(91, 92)}.$$

$$\mathfrak{T}_{r,s}(\lambda)-\sum_{\omega\leqq\lambda,\,\omega'\leqq\lambda'}N(\lambda-\omega)^{\frac{r}{2}+s-1}\log^{-s}\{2+N(\lambda-\omega)\}$$

$$\times\sum_{\substack{\mathfrak{a}\\ N\mathfrak{a}\leqq\sqrt{N\lambda}}}\left(\frac{\mu(\mathfrak{a})}{\varphi(\mathfrak{a})}\right)^{s}\sum_{\alpha}T^{r}E\,\omega-\lambda)$$

$$=B\sum_{\omega\leqq\lambda,\,\omega'\leqq\lambda'}N(\lambda-\omega)^{\frac{r}{2}+s-1}N\lambda^{1-\frac{r}{4}}\log^{-s}\{2+N(\lambda-\omega)\}\quad\textbf{(94, 95)}$$

$$=B\,N\lambda^{\frac{r}{2}+s-1+1-\frac{r}{4}}\log^{-s}N\lambda\sum_{\omega\leqq\lambda,\,\omega'\leqq\lambda'}1$$

$$=B\,N\lambda^{\frac{r}{4}+s+1}\log^{-s-1}N\lambda\quad\textbf{(96)}$$

(97) $$=B\,N\lambda^{\frac{r}{2}+s}\log^{-s-2}N\lambda.$$

$$\mathfrak{T}_{r,s}(\lambda)=\sum_{\substack{\mathfrak{a}\\ N\mathfrak{a}\leqq\sqrt{N\lambda}}}\left(\frac{\mu(\mathfrak{a})}{\varphi(\mathfrak{a})}\right)^{s}\sum_{\alpha}T^{r}$$

$$\times\sum_{\omega\leqq\lambda,\,\omega'\leqq\lambda'}N(\lambda-\omega)^{\frac{r}{2}+s-1}\log^{-s}\{2+N(\lambda-\omega)\}E(\omega-\lambda)$$

$$+B\,N\lambda^{\frac{r}{2}+s}\log^{-s-2}N\lambda\quad\textbf{(97)}$$

(98) $$=\sum_{\substack{\mathfrak{a}\\ N\mathfrak{a}\leqq\sqrt{N\lambda}}}\left(\frac{\mu(\mathfrak{a})}{\varphi(\mathfrak{a})}\right)^{s}\sum_{\alpha}T^{r}E(-\lambda)$$

$$\times\sum_{\omega\leqq\lambda,\,\omega'\leqq\lambda'}N(\lambda-\omega)^{\frac{r}{2}+s-1}\log^{-s}\{2+N(\lambda-\omega)\}E(\omega)$$

$$+B\,N\lambda^{\frac{r}{2}+s}\log^{-s-2}N\lambda.$$

$$\sum_{\omega\leqq\lambda,\,\omega'\leqq\lambda'}N(\lambda-\omega)^{\frac{r}{2}+s-1}\log^{-s}\{2+N(\lambda-\omega)\}E(\omega)$$

$$=\sum_{\rho\bmod\mathfrak{a}}\ \sum_{\omega\leqq\lambda,\,\omega'\leqq\lambda'}^{*}N(\lambda-\omega)^{\frac{r}{2}+s-1}\log^{-s}\{2+N(\lambda-\omega)\}E(\omega)$$

(99) $$=\sum_{\rho\bmod\mathfrak{a}}E(\rho)\sum_{\omega\leqq\lambda,\,\omega'\leqq\lambda'}^{*}N(\lambda-\omega)^{\frac{r}{2}+s-1}\log^{-s}\{2+N(\lambda-\omega)\}.$$

Es soll jetzt

(100) $$I=\int_{\omega}^{\lambda}\int_{\omega'}^{\lambda'}N(\lambda-u)^{\frac{r}{2}+s-2}\log^{-s}\{2+N(\lambda-u)\}\,du\,du'$$

(101) $$=\left(\frac{r}{2}+s-1\right)^{-2}N(\lambda-\omega)^{\frac{r}{2}+s-1}\log^{-s}\{2+N(\lambda-\omega)\}$$

$$+s\,B\,N\lambda^{\frac{r}{2}+s-1}\log^{-s-1}N\lambda$$

nachgewiesen werden. Für $s=0$ ist dies klar, es sei also $s\geqq1$. Ich setze $\tau=\lambda-\omega$, $\tau'=\lambda'-\omega'$ und darf $N\tau\geqq2$ annehmen.

$$I=\int_{0}^{\tau}\int_{0}^{\tau'}Nu^{\frac{r}{2}+s-2}\log^{-s}(2+Nu)\,du\,du'\quad\textbf{(100)},$$

$$I-\log^{-s}(2+N\tau)\int_{0}^{\tau}\int_{0}^{\tau'}Nu^{\frac{r}{2}+s-2}du\,du'$$

$$=I-\left(\frac{r}{2}+s-1\right)^{-2}N\tau^{\frac{r}{2}+s-1}\log^{-s}(2+N\tau)$$

$$= \int_0^{\tau}\int_0^{\tau'} N u^{\frac{r}{2}+s-2}\{\log^{-s}(2+Nu)-\log^{-s}(2+N\tau)\}\,du\,du'$$

$$= sB\int_0^{\tau}\int_0^{\tau'} N u^{\frac{r}{2}+s-2}\, N\tau\,(2+Nu)^{-1}\log^{-s-1}(2+Nu)\,du\,du'$$

$$= sB\int_0^{\tau}\int_0^{\tau'} N\tau^{\frac{r}{2}+s-3}\log^{-s-1}N\tau\,du\,du' = sB\,N\tau^{\frac{r}{2}+s-1}\log^{-s-1}N\tau,$$

womit (101) erfüllt ist.

$$\sum_{\omega\leqq\lambda,\,\omega'\leqq\lambda'}^{*} N(\lambda-\omega)^{\frac{r}{2}+s-1}\log^{-s}\{2+N(\lambda-\omega)\}$$

$$-\left(\frac{r}{2}+s-1\right)^2\sum_{\omega\leqq\lambda,\,\omega'\leqq\lambda'}^{*}\int_{\omega}^{\lambda}\int_{\omega'}^{\lambda'} N(\lambda-u)^{\frac{r}{2}+s-2}\log^{-s}\{2+N(\lambda-u)\}\,du\,du'$$

$$= sB\,N\lambda^{\frac{r}{2}+s-1}\log^{-s-1}N\lambda\sum_{\omega\leqq\lambda,\,\omega'\leqq\lambda'} 1 \qquad (101)$$

(102) $$= sB\,N\lambda^{\frac{r}{2}+s}\log^{-s-2}N\lambda \qquad (96).$$

(103) $$\sum_{\omega\leqq\lambda,\,\omega'\leqq\lambda'}^{*} N(\lambda-\omega)^{\frac{r}{2}+s-1}\log^{-s}\{2+N(\lambda-\omega)\}$$

$$= \left(\frac{r}{2}+s-1\right)^2\int_0^{\lambda}\int_0^{\lambda'} N(\lambda-u)^{\frac{r}{2}+s-2}\log^{-s}\{2+N(\lambda-u)\}\,\pi(u,u';\mathfrak{a},\rho)\,du\,du'$$

$$+ sB\,N\lambda^{\frac{r}{2}+s}\log^{-s-2}N\lambda \qquad (102,\ 91).$$

(104) $$\sum_{\omega\leqq\lambda,\,\omega'\leqq\lambda'} N(\lambda-\omega)^{\frac{r}{2}+s-1}\log^{-s}\{2+N(\lambda-\omega)\}\,E(\omega)$$

$$= \left(\frac{r}{2}+s-1\right)^2\sum_{\rho \bmod \mathfrak{a}} E(\rho)$$

$$\times\int_0^{\lambda}\int_0^{\lambda'} N(\lambda-u)^{\frac{r}{2}+s-2}\log^{-s}\{2+N(\lambda-u)\}\,\pi(u,u';\mathfrak{a},\rho)\,du\,du'$$

$$+ sB\,N\mathfrak{a}\,N\lambda^{\frac{r}{2}+s}\log^{-s-2}N\lambda \qquad (99,\ 103).$$

$$N\mathfrak{a}^{\frac{3}{4}}\{\varphi(\mathfrak{a})\}^{-1}\leqq\prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{a}}\left\{N\mathfrak{p}^{\frac{1}{4}}(1-N\mathfrak{p}^{-1})\right\}^{-1}\leqq\prod_{\mathfrak{p}|\mathfrak{a}} 2N\mathfrak{p}^{-\frac{1}{4}} = B,$$

(105) $$\sum_{\mathfrak{a}} N\mathfrak{a}^{-\frac{1}{2}}\{\varphi(\mathfrak{a})\}^{-1} = B\sum_{\mathfrak{a}} N\mathfrak{a}^{-\frac{5}{4}} = B.$$

(106) $$\mathfrak{T}_{r,s}(\lambda)-\left(\frac{r}{2}+s-1\right)^2\sum_{N\mathfrak{a}\leqq\sqrt{N\lambda}}\left(\frac{\mu(\mathfrak{a})}{\varphi(\mathfrak{a})}\right)^s\sum_{\alpha} T^r E(-\lambda)$$

$$\times\sum_{\rho \bmod \mathfrak{a}} E(\rho)\int_0^{\lambda}\int_0^{\lambda'} N(\lambda-u)^{\frac{r}{2}+s-2}\log^{-s}\{2+N(\lambda-u)\}\,\pi(u,u';\mathfrak{a},\rho)\,du\,du'$$

$$= sB\sum_{\mathfrak{a}} N\mathfrak{a}^{1-\frac{5}{2}+1}\{\varphi(\mathfrak{a})\}^{-1}N\lambda^{\frac{r}{2}+s}\log^{-s-2}N\lambda + B\,N\lambda^{\frac{r}{2}+s}\log^{-s-2}N\lambda$$

(98, 104, 62)

(107) $$= B\,N\lambda^{\frac{r}{2}+s}\log^{-s-2}N\lambda \qquad (105).$$

Nach (91) ist $\pi(u,u';\mathfrak{a},\rho)\leqq 1$, sobald ρ und $\mathfrak{a}$ nicht teilerfremd sind. Lässt man daher in (106) die ρ mit $(\rho,\mathfrak{a})\neq 1$ weg, so ist der Fehler, wegen (62)

$$B\sum_{N\mathfrak{a}\leqq\sqrt{N\lambda}} N\mathfrak{a}^{-\frac{3}{2}}\sum_{\rho \bmod \mathfrak{a}}\int_0^{\lambda}\int_0^{\lambda'} N\lambda^{\frac{r}{2}+s-2}\,du\,du' = B\sum_{N\mathfrak{a}\leqq\sqrt{N\lambda}} N\mathfrak{a}^{-\frac{1}{2}}N\lambda^{\frac{r}{2}+s-1}$$

(108) $$= B\,N\lambda^{\frac{r}{2}+s-\frac{3}{4}} = B\,N\lambda^{\frac{r}{2}+s}\log^{-s-2}N\lambda.$$

(109) $$\mathfrak{T}_{r,s}(\lambda) = \left(\frac{r}{2}+s-1\right)^2\sum_{N\mathfrak{a}\leqq\sqrt{N\lambda}}\left(\frac{\mu(\mathfrak{a})}{\varphi(\mathfrak{a})}\right)^s\sum_{\alpha} T^r E(-\lambda)$$

$$\times\sum_{\substack{\rho \bmod \mathfrak{a}\\ (\rho,\mathfrak{a})=1}} E(\rho)\int_0^{\lambda}\int_0^{\lambda'} N(\lambda-u)^{\frac{r}{2}+s-2}\log^{-s}\{2+N(\lambda-u)\}\,\pi(u,u';\mathfrak{a},\rho)\,du\,du'$$

$$+ B\,N\lambda^{\frac{r}{2}+s}\log^{-s-2}N\lambda \qquad (106,\ 107,\ 108).$$

Es sei K eine natürliche Zahl $\leqq\sqrt{N\lambda}$. Lasse ich in (109) die $\mathfrak{a}$ mit $N\mathfrak{a}>K$ weg, so ist der Fehler nach (62), (91) und (92)

$$B\sum_{\substack{\mathfrak{a}\\ N\mathfrak{a}>K}} N\mathfrak{a}^{-\frac{3}{2}} \sum_{\substack{\rho \bmod \mathfrak{a}\\ (\rho,\,\mathfrak{a})=1}} \int_0^{\lambda}\int_0^{\lambda'} N\lambda^{\frac{r}{2}+s-2}\log^{-s}N\lambda\cdot\pi(\lambda,\lambda';\mathfrak{a},\rho)\,du\,du'$$

$$= B\sum_{\substack{\mathfrak{a}\\ N\mathfrak{a}>K}} N\mathfrak{a}^{-\frac{3}{2}} \sum_{\substack{\rho \bmod \mathfrak{a}\\ (\rho,\,\mathfrak{a})=1}} \pi(\lambda,\lambda';\mathfrak{a},\rho)\, N\lambda^{\frac{r}{2}+s-1}\log^{-s}N\lambda$$

$$= B\sum_{\substack{\mathfrak{a}\\ N\mathfrak{a}>K}} N\mathfrak{a}^{-\frac{3}{2}}\,\pi(\lambda,\lambda';1,1)\,N\lambda^{\frac{r}{2}+s-1}\log^{-s}N\lambda$$

$$= BK^{-\frac{1}{2}}N\lambda^{\frac{r}{2}+s}\log^{-s-1}N\lambda. \tag{110}$$

$$\mathfrak{T}_{r,s}(\lambda) = \left(\frac{r}{2}+s-1\right)^2 \sum_{\substack{\mathfrak{a}\\ N\mathfrak{a}\leqq K}} \left(\frac{\mu(\mathfrak{a})}{\varphi(\mathfrak{a})}\right)^s \sum_{\alpha} T^r E(-\lambda) \tag{111}$$

$$\times \sum_{\substack{\rho \bmod \mathfrak{a}\\ (\rho,\,\mathfrak{a})=1}} E(\rho) \iint_{2\leqq Nu\leqq N\lambda} N(\lambda-u)^{\frac{r}{2}+s-2}\log^{-s}\{2+N(\lambda-u)\}\,\pi(u,u';\mathfrak{a},\rho)\,du\,du'$$

$$+BN\lambda^{\frac{r}{2}+s}\log^{-s-2}N\lambda + BK^{-\frac{1}{2}}N\lambda^{\frac{r}{2}+s}\log^{-s-1}N\lambda \quad \textbf{(109, 110)}$$

(für den Teil $Nu<2$ des Doppelintegrals ist $\pi(u,u';\mathfrak{a},\rho)=0$). In (111) ersetze ich $\pi(u,u';\mathfrak{a},\rho)$ durch $Nu\{2\varphi(\mathfrak{a})\,h\log\eta\,\log Nu\}^{-1}$. Der Fehler ist, nach (62) und (92).

$$\sum_{\substack{\mathfrak{a}\\ N\mathfrak{a}\leqq K}} B_{\mathfrak{a}}\, N\mathfrak{a}^{-\frac{3}{2}} \sum_{\rho \bmod \mathfrak{a}} \int_0^{\lambda}\int_0^{\lambda'} N\lambda^{\frac{r}{2}+s-1}\log^{-s-2}N\lambda\,du\,du' \tag{112}$$

$$= B_K N\lambda^{\frac{r}{2}+s}\log^{-s-2}N\lambda.$$

$$\left(\frac{r}{2}+s-1\right)^{-2}(2h\log\eta)\,\mathfrak{T}_{r,s}(\lambda) = \sum_{\substack{\mathfrak{a}\\ N\mathfrak{a}\leqq K}} \frac{(\mu(\mathfrak{a}))^s}{(\varphi(\mathfrak{a}))^{s+1}} \sum_{\alpha} T^r E(-\lambda) \tag{113}$$

$$\times \sum_{\substack{\rho \bmod \mathfrak{a}\\ (\rho,\,\mathfrak{a})=1}} E(\rho) \iint_{2\leqq Nu\leqq N\lambda} N(\lambda-u)^{\frac{r}{2}+s-2}\log^{-s}\{2+$$

$$+N(\lambda-\omega)\}\cdot Nu\log^{-1}Nu\,du\,du'$$

$$+B_K N\lambda^{\frac{r}{2}+s}\log^{-s-2}N\lambda + BK^{-\frac{1}{2}}N\lambda^{\frac{r}{2}+s}\log^{-s-1}N\lambda \quad \textbf{(111, 112)}.$$

Ersetze ich in

$$J = \iint_{2\leqq Nu\leqq N\lambda} N(\lambda-u)^{\frac{r}{2}+s-2}\log^{-s}\{2+N(\lambda-u)\}\cdot Nu\log^{-1}Nu\,du\,du' \tag{114}$$

$\log^{-1}Nu$ durch $\log^{-1}N\lambda$, so ist der Fehler

$$B\iint_{2\leqq Nu\leqq N\lambda} N\lambda^{\frac{r}{2}+s-2}\log^{-s}N\lambda\cdot Nu\,N\lambda\,Nu^{-1}\log^{-2}Nu\,du\,du'$$

$$= BN\lambda^{\frac{r}{2}+s-1}\log^{-s}N\lambda\left\{\iint_{2\leqq Nu\leqq\sqrt{N\lambda}} du\,du' + \iint_{\sqrt{N\lambda}\leqq Nu\leqq N\lambda}\log^{-2}N\lambda\,du\,du'\right\}$$

$$= BN\lambda^{\frac{r}{2}+s}\log^{-s-2}N\lambda. \tag{115}$$

$$J = \log^{-1}N\lambda\iint_{2\leqq Nu\leqq N\lambda} N(\lambda-u)^{\frac{r}{2}+s-2}\log^{-s}\{2+N(\lambda-u)\}\cdot Nu\,du\,du' \tag{116}$$

$$+BN\lambda^{\frac{r}{2}+s}\log^{-s-2}N\lambda \quad \textbf{(114, 115)}.$$

Werfe ich die Bedingung $Nu\geqq 2$ weg, so ist der Fehler

$$B\log^{-1}N\lambda\int_0^{\lambda}\int_0^{\lambda'} N\lambda^{\frac{r}{2}+s-2}\log^{-s}N\lambda\,du\,du' = BN\lambda^{\frac{r}{2}+s}\log^{-s-2}N\lambda. \tag{117}$$

$$J = \log^{-1}N\lambda\int_0^{\lambda}\int_0^{\lambda'} Nu^{\frac{r}{2}+s-2}\log^{-s}(2+Nu)\cdot N(\lambda-u)\,du\,du' \tag{118}$$

$$+BN\lambda^{\frac{r}{2}+s}\log^{-s-2}N\lambda \quad \textbf{(116, 117)}.$$

Ersetze ich schliesslich $\log^{-s}(2+Nu)$ durch $\log^{-s}N\lambda$, so ist der Fehler

$$B\log^{-1}N\lambda\int_0^{\lambda}\int_0^{\lambda'} Nu^{\frac{r}{2}+s-2}N\lambda\,Nu^{-1}\log^{-s-1}(2+Nu)\cdot N\lambda\,du\,du'$$

$$= BN\lambda^{\frac{r}{2}+s-1}\int_0^{\lambda}\int_0^{\lambda'}\log^{-s-2}(2+Nu)\,du\,du'$$

$$= B N\lambda^{\frac r2+s-1}\left\{\iint\limits_{0\le Nu\le\sqrt{N\lambda}} du\,du' + \iint\limits_{\sqrt{N\lambda}\le Nu\le N\lambda} \log^{-s-2}N\lambda\,.\,du\,du'\right\}$$

(119) $= BN\lambda^{\frac r2+s}\log^{-s-2}N\lambda.$

$$J=\log^{-s-1}N\lambda\int_0^{\lambda}\int_0^{\lambda'} Nu^{\frac r2+s-2}N(\lambda-u)\,du\,du'$$

$+BN\lambda^{\frac r2+s}\log^{-s-2}N\lambda$ (118, 119)

$$= N\lambda^{\frac r2+s}\log^{-s-1}N\lambda\left\{\int_0^1 u^{\frac r2+s-2}(1-u)\,du\right\}^2 + BN\lambda^{\frac r2+s}\log^{-s-2}N\lambda$$

(120) $=\left\{\left(\frac r2+s-1\right)\left(\frac r2+s\right)\right\}^{-2}N\lambda^{\frac r2+s}\log^{-s-1}N\lambda$

$+BN\lambda^{\frac r2+s}\log^{-s-2}N\lambda.$

$$\left(\frac r2+s\right)^2(2h\log\eta)\,\mathfrak{T}_{r,s}(\lambda)=\sum_{\substack{\mathfrak a\\ N\mathfrak a\le K}}\frac{(\mu(\mathfrak a))^s}{(\varphi(\mathfrak a))^{s+1}}\sum_{\alpha}T^r E(-\lambda)$$

$$\times\sum_{\substack{\rho \bmod \mathfrak a\\ (\rho,\mathfrak a)=1}} E(\rho)N\lambda^{\frac r2+s}\log^{-s-1}N\lambda + B_K N\lambda^{\frac r2+s}\log^{-s-2}N\lambda$$

$+BK^{-\frac12}N\lambda^{\frac r2+s}\log^{-s-1}N\lambda$ (113, 114, 120)

(121) $=N\lambda^{\frac r2+s}\log^{-s-1}N\lambda\sum\limits_{\substack{\mathfrak a\\ N\mathfrak a\le K}}\left(\frac{\mu(\mathfrak a)}{\varphi(\mathfrak a)}\right)^{s+1}\sum\limits_{\alpha}T^r E(-\lambda)$

$+B_KN\lambda^{\frac r2+s}\log^{-s-2}N\lambda+BK^{-\frac12}N\lambda^{\frac r2+s}\log^{-s-1}N\lambda$ (56).

Lasse ich $\mathfrak a$ wieder über alle ganzen Ideale des Körpers laufen, so ist der Fehler, nach (62),

(122) $BN\lambda^{\frac r2+s}\log^{-s-1}N\lambda\cdot\sum\limits_{\substack{\mathfrak a\\ N\mathfrak a>K}}N\mathfrak a^{-\frac32}=BK^{-\frac12}N\lambda^{\frac r2+s}\log^{-s-1}N\lambda.$

$$\left(\frac r2+s\right)^2(2h\log\eta)\,\mathfrak T_{r,s}(\lambda)=N\lambda^{\frac r2+s}\log^{-s-1}N\lambda\sum_{\mathfrak a}\left(\frac{\mu(\mathfrak a)}{\varphi(\mathfrak a)}\right)^{s+1}\sum_{\alpha}T^rE(-\lambda)$$

$+B_KN\lambda^{\frac r2+s}\log^{-s-2}N\lambda+BK^{-\frac12}N\lambda^{\frac r2+s}\log^{-s-1}N\lambda$ (121, 122)

(123) $=N\lambda^{\frac r2+s}\log^{-s-1}N\lambda\,.\,\mathfrak S_{r,s+1}(\lambda)+B_KN\lambda^{\frac r2+s}\log^{-s-2}N\lambda$

$+BK^{-\frac12}N\lambda^{\frac r2+s}\log^{-s-1}N\lambda$ (61).

Ist $\varepsilon>0$ vorgegeben, so sei K die kleinste natürliche Zahl mit $K^{-\frac12}\le\varepsilon$ und alsdann Λ die kleinste natürliche Zahl mit $\Lambda\ge2$, $\sqrt\Lambda\ge K$, $|B_K|\le\varepsilon\log\Lambda$ für das in (123) auftretende B_K. Dann folgt aus (123)

$$\left(\frac r2+s\right)^2(2h\log\eta)\,\mathfrak T_{r,s}(\lambda)=N\lambda^{\frac r2+s}\log^{-s-1}N\lambda\,.\,\mathfrak S_{r,s+1}(\lambda)$$

$+B\varepsilon N\lambda^{\frac r2+s}\log^{-s-1}N\lambda$

für $N\lambda\ge\Lambda$, also

$$\left(\frac r2+s\right)^2(2h\log\eta)\,\mathfrak T_{r,s}(\lambda)=N\lambda^{\frac r2+s}\log^{-s-1}N\lambda\,.\,\mathfrak S_{r,s+1}(\lambda)$$

$+o\left(N\lambda^{\frac r2+s}\log^{-s-1}N\lambda\right),$

(124) $\mathfrak T_{r,s}(\lambda)=\left(\frac r2+s\right)^{-2}(2h\log\eta)^{-1}N\lambda^{\frac r2+s}\log^{-s-1}N\lambda\,.\,\mathfrak S_{r,s+1}(\lambda)$

$+o\left(N\lambda^{\frac r2+s}\log^{-s-1}N\lambda\right).$

Schreibe ich (93) in der Gestalt

(125) $A_{r,s}(\nu)=\pi^r\Gamma^{-2}\left(\frac r2+s\right)d^{\frac{1-r}2}(2h\log\eta)^{-s}\;N\nu^{\frac r2+s-1}$

$\times\log^{-s}(2+N\nu)\,.\,\mathfrak S_{r,s}(\nu)+o\left(N\nu^{\frac r2+s-1}\log^{-s}N\nu\right)$

und beachte, dass nach der Definition (39) von $A_{r,s}(\nu)$

$$A_{r,s+1}(\nu)=\sum_{\omega<\nu,\ \omega'<\nu'}A_{r,s}(\nu-\omega)+B.$$

so folgt aus (94), (124), (91) und (92)

$$A_{r,s+1}(\nu) = \pi^r \Gamma^{-2}\left(\frac{r}{2}+s\right) d^{\frac{1-r}{2}} (2h \log \eta)^{-s} \mathfrak{T}_{r,s}(\nu)$$

$$+ o\left(N\nu^{\frac{r}{2}+s-1} \log^{-s} N\nu\right) \sum_{\omega<\nu,\ \omega'<\nu'} 1$$

$$= \pi^r \Gamma^{-2}\left(\frac{r}{2}+s+1\right) d^{\frac{1-r}{2}} (2h \log \eta)^{-s-1} N\nu^{\frac{r}{2}+s} \log^{-s-1} N\nu \cdot \mathfrak{S}_{r,s+1}(\nu)$$

$$+ o\left(N\nu^{\frac{r}{2}} \log^{-s-1} N\nu\right),$$

d. h. es gilt (125) mit $s+1$ statt s. Also ist auch (93) mit $s+1$ richtig, w. z. b. w.

Radość, den 24. November 1934.

(Eingegangen am 24. November 1934.)

Congruences involving only e-th powers.

By

L. E. Dickson (Chicago).

1. A. Hurwitz[1]) proved that if e is an odd prime,

$$ax^e + by^e + cz^e \equiv 0 \pmod p, \quad abc \neq 0,$$

has solutions prime to p for every prime p exceeding a specified limit. He also gave recursion formulas for the number N of solutions of the analogous congruence in any number of variables. We shall show that these formulas, in a more convenient form, serve to express N in terms of the cyclotomic constants (k, h). Nor can the latter be avoided in spite of Hurwitz's explicit exclusion of the theory of cyclotomy.

Moreover we remove the restriction that e is a prime.

2. Let g be a primitive root of the prime $p = ef + 1$. For given integers a_i, Hurwitz defined the symbol $[a_1, \ldots, a_r]$ so that its product by f denotes the number of sets $t_1, \ldots, t_r$ of integers each chosen from $0, 1, \ldots, f-1$ which satisfy

$$\sum_{i=1}^{r} g^{et_i + a_i} \equiv 0 \pmod p. \tag{1}$$

We may also permit t_i to range over any complete set of residues modulo f, since the replacement of t_i by $t_i + nf$ inserts in the i-th term of (1) the factor $g^{nef} \equiv 1 \pmod p$. For a fixed integer k, $t_i + k$ ranges with t_i over a complete set of residues modulo f. Hence $[a_1, \ldots, a_r]$ is unaltered when we replace a_i by $a_i + ke$. The

[1]) *Jour. für Mathematik*, vol. 136 (1909), p. 272. Case $a = b = c = 1$ by Dickson, *ibid.*, vol. 135, by cyclotomy.