Bemerkungen zum Heilbronnschen Satz.

Von

Edmund Landau (Göttingen).

Einleitung.

Man verdankt Herrn Heilbronn (On the class-number in imaginary quadratic fields, The Quarterly Journal of Mathematics, Oxford Series, Bd. 5, S. 150—160; 1934) den ersten Beweis für den lange vermuteten

Satz: *$h(d)$ sei die Anzahl der Idealklassen des quadratischen Körpers der Grundzahl $d<0$. Dann ist*

$$h(d) \rightarrow \infty \text{ für } d \rightarrow -\infty .$$

Mit anderen Worten: *Zu keinem h gehören unendlich viele d mit*

$$h(d) = h .$$

Im Folgenden setze ich Kenntnis der Heilbronnschen Arbeit nicht voraus; ohnehin werde ich manche seiner Hilfssätze in schärferer bzw. nur in unschärferer Form bzw. (Heckescher Satz) gar nicht brauchen. Ich beweise aber u. a. den Heilbronnschen Satz nochmals.

Alle lateinischen Buchstaben ausser Q, s, L bezeichnen ganze rationale Zahlen; p Primzahlen; q quadratfreie Zahlen >0; $P_1, P_2, \ldots, P_{26}$ positive Weltkonstanten, für die sich überdies (wie ein Blick auf die betr. 26 Stellen lehrt) explizite Zahlenwerte angeben lassen.

$h(d)$ ist bekanntlich die Anzahl der Klassen positiver binärer quadratischer Formen der Diskriminante d; d. h. die Anzahl der reduzierten Formen

$$Q = \{a, b, c\} = a x^2 + b x y + c y^2$$

der Diskriminante d; d. h. die Anzahl der Lösungen a, b, c von

$$(1)\qquad \begin{cases} b^2-4ac=d, \\ -a<b\leq a<c \text{ oder } 0\leqq b\leqq a=c. \end{cases}$$

Demgemäss verbleibe ich im Gebiete der quadratischen Formen. Herr Heilbronn benutzte Idealtheorie nur zum Beweise seines Lemma XIV und teilte mir den einfachen Weg mit, um den (ausreichenden) schwächeren Satz 9 des Folgenden elementar zu beweisen; ich verdanke ihm auch den folgenden Beweis des Satzes 8 (Ersatz des Gaussschen Lemmas III seiner Arbeit).

Es ist bequem, alsbald

$$d<-16$$

anzunehmen.

Aus (1) folgt bekanntlich

$$a<\sqrt{|d|}.$$

Bekanntlich ist für $n>0$

$$(2)\qquad 2\sum_{g|n}\left(\frac{d}{g}\right)=\sum_{Q}\sum_{\substack{x,y\\ Q(x,y)=n}}1,$$

d. h. die Gesamtanzahl der Darstellungen von n durch das System der $h(d)$ reduzierten Formen.

Mein Ziel ist der (den Heilbronnschen enthaltende)

Hauptsatz: *Ist h gegeben, so gilt für alle d mit*

$$h(d)=h$$

oder für alle jene d ausser einem

$$|d|<P_1 h^8\log^6(3h)\qquad (<P_2 h^9).$$

Zum Beweise des Hauptsatzes beachten wir, dass $\left(\frac{d}{n}\right)$ bekanntlich Charakter mod $|d|$, aber nicht der Hauptcharakter ist; ferner führen wir bei jedem $m>0$ und jedem reellen Charakter $\chi(n)$ mod m für $s>1$ die drei Funktionen ein:

$$L_0(s)=L_0(s,m,\chi)=\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\,n^{-s},$$

$$L_1(s)=L_1(s,d)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{d}{n}\right)n^{-s},$$

$$L_2(s)=L_2(s,m,\chi,d)=\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)\left(\frac{d}{n}\right)n^{-s}.$$

Also ist $L_1(s)$ für $s>0$ regulär; $\chi(n)\left(\frac{d}{n}\right)$ ist Charakter mod $m|d|$.

Zur Anwendung kommen übrigens nachher nur zwei Fälle:

Erstens $m=1$ (also $\chi(n)=1$). Dann ist

$$L_0(s)=\zeta(s),$$

$$L_2(s)=L_1(s),$$

also $L_2(s)$ für $s>0$ regulär.

Zweitens $m>16$, $-m$ Grundzahl, $-m\neq d$, $\chi(n)=\left(\frac{-m}{n}\right)$. Dann ist

$$L_0(s)=L_1(s,-m)$$

und, da $-md\equiv 0$ oder 1 (mod 4), aber keine Quadratzahl ist,

$$\chi(n)\left(\frac{d}{n}\right)=\left(\frac{-md}{n}\right)$$

nicht der Hauptcharakter mod $m|d|$, also $L_2(s)$ für $s>0$ regulär.

Ferner werde, wenn $1\leqq l_1\leqq m$, $1\leqq l_2\leqq m$, für $s>1$

$$\varphi(s)=\varphi(s,m,l_1,l_2,Q)=\sum_{\substack{x=-\infty\\ x\equiv l_1 \,(\mathrm{mod}\, m)}}^{\infty}\ \sum_{\substack{y=1\\ y\equiv l_2\,(\mathrm{mod}\, m)}}^{\infty} Q^{-s}(x,y)$$

gesetzt. $\varphi(s)$ ist eine konvergente Dirichletsche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}c_n n^{-s},$$

indem

$$\Phi(\tau)=\sum_{n\leqq\tau}c_n=\sum_{\substack{Q(x,y)\leqq\tau\\ x\equiv l_1,\ y\equiv l_2\,(\mathrm{mod}\, m)\\ y>0}}1\ \leqq\sum_{Q(x,y)\leqq\tau}1,$$

also

$$\overline{\lim_{\tau=\infty}} \frac{\Phi(\tau)}{\tau}$$

endlich ist. Für $s > 1$ ist also

$$(3) \qquad \varphi(s) = s \int_1^\infty \Phi(\tau)\, \tau^{-s-1}\, d\tau\,.$$

Für $1 \leqq l_1 \leqq m,\ 1 \leqq l_2 \leqq m,\ s > 1$ werde ferner

$$(4) \qquad \rho(s) = \rho(s, m, l_1, l_2, Q) = \varphi(s) - \frac{s}{s-1} \frac{\pi}{m^2} 4^{s-1} |d|^{-\frac{s}{2}}$$

gesetzt.

Die folgenden Untersuchungen stützen sich auf die aus (2) und

$$Q(-x, -y) = Q(x, y)$$

für $s > 1$ fliessende Identität

$$L_0(s)\, L_2(s) = \sum_{n=1}^\infty \chi(n) \sum_{g|n} \left(\frac{d}{g}\right) n^{-s}$$

$$= \sum_Q \frac{1}{2} \sum_{\substack{x, y = -\infty \\ x^2+y^2>0}}^\infty \chi(Q(x, y))\, Q^{-s}(x, y)$$

$$= \sum_Q \sum_{x=1}^\infty \chi(a x^2)\ (a x^2)^{-s} + \sum_Q \sum_{\substack{x, y = -\infty \\ y > 0}}^\infty \chi(Q(x, y))\, Q^{-s}(x, y)$$

$$= \sum_{x=1}^\infty \chi(x^2)\, x^{-2s} \cdot \sum_Q \chi(a)\, a^{-s} +$$

$$+ \sum_Q \sum_{l_1=1}^m \sum_{l_2=1}^m \sum_{\substack{x=-\infty \\ x \equiv l_1 \pmod m}}^\infty \sum_{\substack{y=1 \\ y \equiv l_2 \pmod m}}^\infty \chi(Q(x, y))\ Q^{-s}(x, y)$$

$$(5) = \sum_{\substack{x=1 \\ (x, m)=1}}^\infty x^{-2s} \cdot \sum_Q \chi(a)\, a^{-s} + \sum_Q \sum_{l_1=1}^m \sum_{l_2=1}^m \chi(Q(l_1, l_2))\, \varphi(s, m, l_1, l_2, Q).$$

§ 1.

Analytische Hilfssätze.

Satz 1: *Für* $s \geqq \frac{3}{4}$ *ist* $\rho(s)$ *regulär und*

$$|\rho(s)| < P_3 |d|^{-\frac{1}{8}}.$$

Beweis: Für $\lambda > 0$ hat die Halbellipse

$$Q(\alpha, \beta) \leqq \lambda,\ \beta > 0$$

den Flächeninhalt $\frac{\pi\lambda}{\sqrt{|d|}}$ und wegen

$$\lambda \geqq a(\alpha^2 - |\alpha\beta| + \beta^2) \geqq \frac{1}{2}(\alpha^2 + \beta^2)$$

den Umfang $< P_4 \sqrt{\lambda}$.

Für $\tau \geqq 1$ hat also die Halbellipse

$$Q(l_1 + m\gamma, l_2 + m\delta) \leqq \tau, \quad l_2 + m\delta > 0$$

den Flächeninhalt $\frac{\pi\tau}{m^2\sqrt{|d|}}$ und den Umfang $< P_4 \frac{\sqrt{\tau}}{m} \leqq P_4 \sqrt{\tau}$.

Wird

$$(6) \qquad \Psi(\tau) = \Phi(\tau) - \frac{\pi\tau}{m^2\sqrt{|d|}}$$

gesetzt, so ist daher

$$(7) \qquad |\Psi(\tau)| < P_5 \sqrt{\tau}\,.$$

Für $y \geqq 1$ ist

$$Q(x, y) = \frac{1}{4a}\left((2ax + by)^2 + |d| y^2\right) \geqq \frac{|d|}{4a} > \frac{\sqrt{|d|}}{4}\,.$$

Für $1 \leqq \tau \leqq \frac{\sqrt{|d|}}{4}$ ist also

$$(8) \qquad \Phi(\tau) = 0.$$

Nach (3), (6) und (8) ist also für $s>1$

$$\varphi(s)=s\int_{\frac{\sqrt{|d|}}{4}}^{\infty}\Phi(\tau)\,\tau^{-s-1}\,d\tau=s\int_{\frac{\sqrt{|d|}}{4}}^{\infty}\left(\frac{\pi}{m^2\sqrt{|d|}}\tau+\Psi(\tau)\right)\tau^{-s-1}\,d\tau$$

$$=s\frac{\pi}{m^2\sqrt{|d|}}\frac{(\sqrt{|d|})^{1-s}\,4^{s-1}}{s-1}+s\int_{\frac{\sqrt{|d|}}{4}}^{\infty}\Psi(\tau)\,\tau^{-s-1}\,d\tau,$$

also nach (4)

$$\rho(s)=s\int_{\frac{\sqrt{|d|}}{4}}^{\infty}\Psi(\tau)\,\tau^{-s-1}\,d\tau. \tag{9}$$

Nach (7) und (9) ist $\rho(s)$ für $s\geqq\frac{3}{4}$ regulär und für $s\geqq\frac{3}{4}$

$$|\rho(s)|\leqq s P_5\int_{\frac{\sqrt{|d|}}{4}}^{\infty}\tau^{-s-\frac{1}{2}}\,d\tau=\frac{s}{s-\frac{1}{2}}P_5\left(\frac{\sqrt{|d|}}{4}\right)^{\frac{1}{2}-s}$$

$$\leqq 3P_5\left(\frac{\sqrt{|d|}}{4}\right)^{-\frac{1}{4}}<P_3|d|^{-\frac{1}{8}}.$$

Satz 2: *Es sei* $m=1$. *Dann ist* $(s-1)\,\varphi(s)$ *für* $s\geqq\frac{3}{4}$ *regulär und*

$$\left|\varphi\left(\frac{3}{4}\right)\right|<P_6|d|^{-\frac{1}{8}}.$$

Beweis: Nach (4) und Satz 1 ist $(s-1)\,\varphi(s)$ für $s\geqq\frac{3}{4}$ regulär und

$$\left|\varphi\left(\frac{3}{4}\right)\right|\leqq\left|\rho\left(\frac{3}{4}\right)\right|+3\pi.4^{-\frac{1}{4}}|d|^{-\frac{3}{8}}<P_6|d|^{-\frac{1}{8}}.$$

Satz 3: *Für* $m>16$, $-m$ *Grundzahl*, $-m\neq d$, $\chi(n)=\left(\frac{-m}{n}\right)$, $s\geqq\frac{3}{4}$ *ist*

$$L_1(s,-m)L_2(s,m,\chi,d)-\sum_{\substack{x=1\\(x,m)=1}}^{\infty}x^{-2s}\,.\,\sum_{Q}\chi(a)\,a^{-s}>-P_3\,h(d)\,m^2|d|^{-\frac{1}{8}}.$$

Beweis: Die linke Seite ist für $s\geqq\frac{3}{4}$ regulär. Nach (4) und (5) ist für $s>1$

$$L_1(s,-m)\,L_2(s,m,\chi,d)-\sum_{\substack{x=1\\(x,m)=1}}^{\infty}x^{-2s}\,.\,\sum_{Q}\chi(a)\,a^{-s}$$

$$=\sum_{Q}\sum_{l_1=1}^{m}\sum_{l_2=1}^{m}\chi(Q(l_1,l_2))\,\rho(s,m,l_1,l_2,Q)+$$

$$+\frac{s}{s-1}\frac{\pi}{m^2}4^{s-1}|d|^{-\frac{s}{2}}\sum_{Q}\sum_{l_1=1}^{m}\sum_{l_2=1}^{m}\chi(Q(l_1,l_2)).$$

Also verschwindet nach Satz 1 die letzte, von s freie $\sum_{Q}\sum_{l_1}\sum_{l_2}$ und Satz 1 gibt die Behauptung, da $h(d)\,m^2$ die Gliederzahl von $\sum_{Q}\sum_{l_1}\sum_{l_2}$ ist.

Satz 4: *Für* $|d|>P_7\,h^8(d)$ *ist*

$$L_1\left(\frac{3}{4},d\right)<0.$$

Beweis: Nach (5) mit $m=1$ ist für $s>1$, also nach Satz 2 für $s\geqq\frac{3}{4}$ exkl. $s=1$

$$\zeta(s)\,L_1(s,d)=\zeta(2s)\,.\sum_{Q}a^{-s}+\sum_{Q}\varphi(s,1,1,1,Q).$$

Da $a=1$ vorkommt, ist also nach Satz 2 für $|d|>P_6^8\, h^8(d)=P_7\, h^8(d)$

$$\zeta\left(\frac{3}{4}\right)L_1\left(\frac{3}{4},d\right)>1-P_6\, h(d)\,|d|^{-\frac{1}{8}}>0;$$

wegen

$$\zeta\left(\frac{3}{4}\right)<0$$

also

$$L_1\left(\frac{3}{4},d\right)<0.$$

§ 2.

Arithmetische Hilfssätze.

Satz 5: *Geht jedes $p|a$ in d auf, so ist a quadratfrei, also*

$$a\,|\,d.$$

Beweis: Gäbe es ein p mit

$$p^2\,|\,a,$$

so würde folgen

$$p|a,\ p|d,\ p|4ac+d,\ p|b^2,\ p|b,\ p^2|b^2-4ac,\ p^2|d,\ p=2,\ 2|b,$$

$$4|a,\ 4|d,\ 16|4ac,\ 16|b^2-d,\ 4\left|\left(\frac{b}{2}\right)^2-\frac{d}{4},\ \frac{d}{4}\equiv 0 \text{ oder } 1 \pmod 4.\right.$$

Satz 6: *Ist $q|d$, so gibt es höchstens ein Q mit*

$$a=q.$$

Beweis: Ist

$$Q=\{q,b,c\},$$

so folgt

$$d=b^2-4qc,$$

$$q|b^2,$$

$$q|b.$$

Wegen

$$-q<b\leqq q$$

ist also

$$b=0 \text{ oder } b=q$$

und entsprechend

$$c=\frac{-d}{4q} \text{ oder } c=\frac{q^2-d}{4q}.$$

Diese c sind nicht beide ganz, da ihre Differenz $\frac{q}{4}$ nicht ganz ist.

Satz 7: *Ist*

$$q|d,\ q\leqq\frac{\sqrt{|d|}}{2},$$

so gibt es genau ein Q mit

$$a=q.$$

Beweis: Wegen

$$\frac{q^2-d}{4q}>\frac{-d}{4q}\geqq q$$

genügt es (nach Satz 6) zu zeigen, dass 4 mindestens eine der beiden ganzen Zahlen $\frac{-d}{q}$, $\frac{q^2-d}{q}$ teilt; denn dann liefert $b=0$ bzw. $b=q$ ein Q mit $a=q$.

1) Für $d\equiv 12 \pmod{16}$, $q\equiv 1 \pmod 2$ und für $d\equiv 8 \pmod{16}$ ist

$$4\left|\frac{-d}{q}\right..$$

2) Für $d\equiv 12 \pmod{16}$, $q\equiv 0 \pmod 2$ und für $d\equiv 1 \pmod 4$ ist

$$4\left|\frac{q^2-d}{q}\right..$$

Satz 8: *Ist d durch genau t verschiedene Primzahlen teilbar, so ist*

$$2^t\leqq 4\,h(d).$$

Beweis: 1) Für $t\leqq 2$ ist

$$2^t\leqq 4\leqq 4\,h(d).$$

2) Für $t > 2$ sei p die grösste in d aufgehende Primzahl, also $p \geqq 5$. Man setze

$$n = \begin{cases} \dfrac{|d|}{p} & \text{für } d \equiv 1 \pmod{4}, \\[2mm] \dfrac{|d|}{2p} & \text{für } d \equiv 12 \pmod{16}, \\[2mm] \dfrac{|d|}{4p} & \text{für } d \equiv 8 \pmod{16}. \end{cases}$$

Dann ist n quadratfrei, $|d$ und $< \frac{|d|}{4}$ und hat genau $t-1$ verschiedene Primteiler. Satz 7 gibt

$$h(d) \geqq \sum_{\substack{q \mid d \\ q \leqq \frac{\sqrt{|d|}}{2}}} 1 \geqq \sum_{\substack{q \mid n \\ q \leqq \frac{\sqrt{|d|}}{2}}} 1 \geqq \sum_{\substack{q \mid n \\ q \leqq \sqrt{|n|}}} 1 = \frac{1}{2} \sum_{q \mid n} 1 = 2^{t-2}.$$

Satz 9: *Aus $a \nmid d$ folgt*

$$a > |d|^{\frac{1}{4h(d)}}.$$

Beweis: Nach Satz 5 gibt es ein p mit

$$p \mid a, \quad p \nmid d.$$

Wegen

$$d = b^2 - 4ac$$

ist d quadratischer Rest mod $4p$, also bekanntlich für jedes $l > 0$ quadratischer Rest mod $4p^l$.

Also gibt es ein x_l mit

$$x_l^2 \equiv d \pmod{4p^l}, \quad 0 < x_l < p^l;$$

denn mit x_l genügen $-x_l$ und $x_l + 2p^l$ der Kongruenz, und wegen $p \nmid d$ kommen weder $x_l = 0$ noch $x_l = p^l$ in Betracht.

Wofern

$$p^{2l} \leqq \frac{|d|}{4},$$

sind die beiden Formen

$$\left\{ p^l, \pm x_l, \frac{x_l^2 - d}{4p^l} \right\}$$

der Diskriminante d reduziert, da

$$\frac{x_l^2 - d}{4p^l} > \frac{-d}{4p^l} \geqq p^l > |\pm x_l|.$$

Also ist

$$p^{2h(d)} > \frac{|d|}{4},$$

da sonst $l = 1, 2, \ldots, h(d)$ schon $2h(d) > h(d)$ verschiedene reduzierte Formen ergäbe. Also

$$a^{4h(d)} \geqq p^{4h(d)} > \frac{|d|^2}{16} > |d|.$$

§ 3.

Beweis des Hauptsatzes.

Satz 10: *Für $s \geqq \frac{3}{4}$ ist*

$$\sum_Q \chi(a) a^{-s} > \frac{1}{8h(d)} - P_8 h(d) |d|^{-\frac{1}{8h(d)}}.$$

Beweis: Nach Satz 5, 7, 8 und 9 ist

$$\sum_Q \chi(a) a^{-s} = \sum_{\substack{Q \\ a \mid d}} \chi(a) a^{-s} + \sum_{\substack{Q \\ a \nmid d}} \chi(a) a^{-s}$$

$$= \sum_{q \mid d} \chi(q) q^{-s} - \sum_{\substack{q \mid d \\ q \text{ kein } a}} \chi(q) q^{-s} + \sum_{\substack{Q \\ a \nmid d}} \chi(a) a^{-s}$$

$$= \prod_{p \mid d} (1 + \chi(p) p^{-s}) - \sum_{\substack{q \mid d \\ q \text{ kein } a}} \chi(q) q^{-s} + \sum_{\substack{Q \\ a \nmid d}} \chi(a) a^{-s}$$

$$\geqq \prod_{p \mid d} (1 - p^{-s}) - \left(\frac{\sqrt{|d|}}{2} \right)^{-s} \sum_{q \mid d} 1 - |d|^{-\frac{s}{4h(d)}} \sum_Q 1$$

$$\geqq \prod_{p|d}\left(1-p^{-\frac{3}{4}}\right)-\left(\frac{\sqrt{|d|}}{2}\right)^{-\frac{3}{4}}2^t-|d|^{-\frac{3}{16\,h(d)}}h(d)$$

$$\geqq \left(1-2^{-\frac{3}{4}}\right)\left(1-3^{-\frac{3}{4}}\right)^{t-1}-2^{\frac{3}{4}}|d|^{-\frac{1}{8\,h(d)}}4h(d)-|d|^{-\frac{1}{8\,h(d)}}h(d)$$

$$>\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{t-1}-P_8\,h(d)\,|d|^{-\frac{1}{8\,h(d)}}\geqq\frac{1}{8\,h(d)}-P_8\,h(d)\,|d|^{-\frac{1}{8\,h(d)}}.$$

Satz 11: *Falls* $m>16$, $-m$ *Grundzahl ist und es ein* d *mit*

$$|d|>(P_9\,h(d)m)^{16\,h(d)}$$

gibt, so ist

$$L_1\left(\frac{3}{4},\,-m\right)>0.$$

Beweis: Nach Satz 3 und Satz 10 ist für $|d|>m$, $\chi(n)=\left(\frac{-m}{n}\right)$, $s\geqq\frac{3}{4}$

$$\frac{L_1(s,-m)\;L_2(s,m,\chi,d)}{\sum\limits_{\substack{x=1\\(x,m)=1}}^{\infty}x^{-2s}}>\sum_{Q}\chi(a)\,a^{-s}-P_3\,h(d)\,m^2|d|^{-\frac{1}{8}}$$

$$>\frac{1}{8\,h(d)}-P_8\;h(d)\,|d|^{-\frac{1}{8\,h(d)}}-P_3\,h(d)\;m^2|d|^{-\frac{1}{8}}$$

$$>\frac{1}{8\,h(d)}-P_{10}\,h(d)\,m^2|d|^{-\frac{1}{8\,h(d)}}.$$

Für

$$|d|>(8\,P_{10}\,h^2(d)\,m^2)^{8h(d)},$$

also für

$$|d|>(P_9\,h(d)\,m)^{16h(d)}$$

ist $|d|>m$ und

$$\frac{1}{8\,h(d)}-P_{10}\,h(d)\,m^2|d|^{-\frac{1}{8h(d)}}>0;$$

daher ist

$$L_1(s,-m)\neq 0\quad\text{für } s\geqq\frac{3}{4};$$

wegen

$$L_1(2,-m)>0$$

und der Stetigkeit von $L_1(s,m)$ ist also

$$L_1\left(\frac{3}{4},-m\right)>0.$$

Heilbronnscher Satz 12: *Zu keinem* h *gibt es unendlich viele* d *mit* $h(d)=h$.

Beweis: Gäbe es zu einem h unendlich viele solche d, so wähle man zunächst ein $m>16$ mit

$$h(-m)=h,\;\; m>P_7\,h^8.$$

Dann ist nach Satz 4

$$L_1\left(\frac{3}{4},-m\right)<0.$$

Alsdann wähle man ein d mit

$$h(d)=h,\;\;|d|>(P_9\,hm)^{16h}.$$

Dann wäre nach Satz 11

$$L_1\left(\frac{3}{4},-m\right)>0.$$

Zusätze: 1) Aus dem Beweise folgt leicht

$$|d|\leqq(P\,h(d))^{16h(d)},\tag{10}$$

wo P, desgl. P' und P'' nachher, eine (z. Zt. nicht numerisch angebbare!) Weltkonstante ist. Denn entweder ist stets

$$|d|\leqq P_7\,h^8(d),$$

also

$$|d|\leqq(P_7\,h(d))^{16h(d)};$$

oder es gibt ein $m=P'>16$ mit

$$m>P_7\,h^8(-m);$$

dann ist nach Satz 4

$$L_1\left(\frac{3}{4},-m\right)<0,$$

also nach Satz 11 jedes

$$|d| \leqq (P_9\, h(d)\, m)^{16h(d)} = (P''\, h(d))^{16h(d)}.$$

2) Aus (10) folgt

(11) $$\underline{\lim}_{d=-\infty} \frac{h(d)}{\dfrac{\log|d|}{\log\log|d|}} \geqq \frac{1}{16} > 0.$$

Denn wäre unendlich oft

(12) $$\frac{h(d)}{\dfrac{\log|d|}{\log\log|d|}} < \frac{1}{16},$$

so gälte unendlich oft zugleich (12) und

$$Ph(d) < \log|d|,$$

$$\log(Ph(d)) < \log\log|d|,$$

also nach (10)

$$\log|d| \leqq 16\, h(d)\, \log(Ph(d)) < \log|d|.$$

3) Wenn (nur in diesem Zusatz) $h(d)$ für jede Diskriminante $d<0$ (nicht nur für Grundzahlen) die Klassenzahl positiver binärer primitiver quadratischer Formen dieser Diskriminante bezeichnet, so gilt (11) auch. Denn jedenfalls ist eindeutig

$$d = g^2 d_1,\ g > 0,\ d_1 \text{ Grundzahl}$$

und alsdann bekanntlich

$$h(d) = h(d_1) \frac{w(d)}{w(d_1)}\, g \prod_{p|g} \left(1 - \left(\frac{d_1}{p}\right)\frac{1}{p}\right),$$

wo

$$w(-3) = 6,\ w(-4) = 4,\ w(x) = 2 \text{ für } x < -4.$$

Hieraus folgt

$$h(d) \geqq \frac{\varphi(g)}{3}$$

und für $d_1 < -4$

$$h(d) \geqq h(d_1).$$

Falls

(13) $$|d_1| > \frac{|d|}{\log^4|d|},$$

ist bei $d \to -\infty$

$$d_1 \to -\infty,$$

$$\frac{\log|d|}{\log\log|d|} \sim \frac{\log|d_1|}{\log\log|d_1|}.$$

Wenn d über die Werte mit (13) läuft, ist also

$$\underline{\lim}_{d=-\infty} \frac{h(d)}{\dfrac{\log|d|}{\log\log|d|}} \geqq \underline{\lim}_{d_1=-\infty} \frac{h(d_1)}{\dfrac{\log|d_1|}{\log\log|d_1|}} \geqq \frac{1}{16}.$$

Falls

(14) $$|d_1| \leqq \frac{|d|}{\log^4|d|},$$

ist

$$g \geqq \log^2|d|.$$

Wenn d über die Werte mit (14) läuft, ist also

$$\underline{\lim}_{d=-\infty} \frac{h(d)}{\dfrac{\log|d|}{\log\log|d|}} \geqq \underline{\lim}_{d=-\infty} \frac{\frac{1}{3}\varphi(g)}{\dfrac{\log|d|}{\log\log|d|}}$$

$$\geqq \underline{\lim}_{d=-\infty} \frac{\log|d|}{\dfrac{\log|d|}{\log\log|d|}} = \infty.$$

Satz 13: *Ist*

$$-d > m > 16,$$

$$h(d) = h(-m) = h,$$

so ist

$$m < P_{11}\, h^2 \log^6|d|.$$

Beweis: Für $0 < \xi < 1$, u und $v = 1, 0$ oder -1 ist

$$(1-\xi)(1-u\xi)(1-v\xi)(1-uv\xi) < 1,$$

da die linke Seite einen der Werte $(1-\xi)^4$, $(1-\xi^2)^2$, $(1-\xi)^2$, $1-\xi^2$, $1-\xi$ hat.

Für $s>1$, $\chi(n)=\left(\frac{-m}{n}\right)$ ist also

$$\frac{1}{\zeta(s)\,L_0(s)\,L_1(s)\,L_2(s)}=$$

$$=\prod_p\left((1-p^{-s})\left(1-\left(\frac{-m}{p}\right)p^{-s}\right)\left(1-\left(\frac{d}{p}\right)p^{-s}\right)\left(1-\left(\frac{-m}{p}\right)\left(\frac{d}{p}\right)p^{-s}\right)\right)$$
$$<1.$$

Ist $\chi_1(n)$ ein Nicht-Hauptcharakter mod k und für $s>1$

$$L(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\chi_1(n)\,n^{-s},$$

so ist bekanntlich für $s\geqq 1$

$$|L(s)|<P_{12}\log k$$

und

$$|L'(s)|<P_{13}\log^2 k.$$

Ferner ist bekanntlich

$$h=\frac{\sqrt{m}}{\pi}L_0(1)=\frac{\sqrt{|d|}}{\pi}L_1(1),$$

$$\zeta(s)<\frac{s}{s-1}\quad\text{für } s>1.$$

Daher ist

$$h<P_{14}\sqrt{m}\log m,$$

$$0<\varepsilon=\frac{h}{\sqrt{m}\,\log^2 m}<P_{14},$$

$$\zeta(1+\varepsilon)<\frac{P_{15}}{\varepsilon},$$

$$L_0(1+\varepsilon)<L_0(1)+P_{13}\,\varepsilon\log^2 m<P_{16}\left(\frac{h}{\sqrt{m}}+\varepsilon\log^2 m\right)=P_{17}\,\varepsilon\log^2 m;$$

$$L_1(1+\varepsilon)<L_1(1)+P_{13}\,\varepsilon\log^2|d|<P_{18}\left(\frac{h}{\sqrt{|d|}}+\varepsilon\log^2|d|\right)$$

$$=P_{18}\,h\log^2|d|\left(\frac{1}{\sqrt{|d|}\,\log^2|d|}+\frac{1}{\sqrt{m}\,\log^2 m}\right)<P_{19}\,h\,\frac{\log^2|d|}{\sqrt{m}\,\log^2 m},$$

$$L_2(1+\varepsilon)<P_{12}\log(|d|\,m)<P_{20}\log|d|,$$

$$1<\zeta(1+\varepsilon)\,L_0(1+\varepsilon)\,L_1(1+\varepsilon)\,L_2(1+\varepsilon)$$

$$<\frac{P_{15}}{\varepsilon}P_{17}\,\varepsilon\log^2 m\,P_{19}\,h\,\frac{\log^2|d|}{\sqrt{m}\,\log^2 m}P_{20}\log|d|=P_{21}\frac{h\log^3|d|}{\sqrt{m}},$$

$$m<P_{21}^2\,h^2\log^6|d|.$$

Hauptsatz: *Ist h gegeben, so gilt für alle d mit*

$$h(d)=h$$

oder für alle jene d ausser einem

$$|d|<P_1\,h^8\log^6(3h)\qquad(<P_2\,h^9).$$

Beweis: Man wähle $P_{22}\geqq\operatorname{Max}(P_7,P_9)$ so, dass

$$\log^6 x<\sqrt{x}\ \text{ für } x>P_{22}.$$

1) Gibt es höchstens ein d mit

$$h(d)=h,\ |d|\geqq P_{22}\,h^8\log^6(3h),$$

so leistet $P_1=P_{22}$ das Gewünschte.

2) Gibt es mindestens zwei solche, $-m$ und $d_0<-m$, so ist

$$m>P_9\,h,\ m>P_7\,h^8,$$

also nach Satz 4 und Satz 11

$$|d_0|\leqq(P_9\,hm)^{16h}<m^{32h},$$

$$\log^6|d_0|<32^6\,h^6\log^6 m,$$

also nach Satz 13

$$m < P_{11} h^2 \log^6 |d_0| < P_{23} h^8 \log^6 m.$$

Wegen $m > P_{22}$ ist

$$\log^6 m < \sqrt{m},$$

also

$$m < P_{23} h^8 \sqrt{m},$$

$$m < P_{24} h^{16},$$

$$\log m < P_{25} \log (3h),$$

$$m < P_{26} h^8 \log^6 (3h).$$

Jedenfalls leistet also $P_1 = \mathrm{Max}\,(P_{22}, P_{26})$ das Gewünschte.

Mittel-Schreiberhau, den 19. Juli 1934.

(Eingegangen am 23 Juli 1934.)

Bemerkungen über die Struktur von Ringen, die aus Polynomen in einer Variabel bestehen.

Von

Alexander Ostrowski (Basel).

Einleitung.

Unter einem Polynomring [1]) versteht man eine solche Gesamtheit $\mathfrak{R}$ von Polynomen, dass Summe und Produkt von je zwei Polynomen von $\mathfrak{R}$ wieder zu $\mathfrak{R}$ gehören und ferner das Produkt jedes Polynoms aus $\mathfrak{R}$ mit einer beliebigen Grösse aus dem Koeffizientenkörper K [2]) wieder in $\mathfrak{R}$ liegt. Wir betrachten nun in dieser Mitteilung Ringe $\mathfrak{R}$, die aus Polynomen in einer Variabel x bestehen.

Nach Analogie mit dem, was man von der Theorie der algebraischen Zahlen her kennt [3]), wird man vor allem solche Ringe als besonders einfach ansehen, in denen ein bestimmtes Polynom $\Phi(x)$ niedrigsten Grades — der Führer des Ringes — existiert, mit der Eigenschaft, dass jedes durch $\Phi(x)$ teilbare Polynom mit Koeffizienten aus K in $\mathfrak{R}$ liegt (so dass also $\mathfrak{R}$ aus Restklassen modulo $\Phi(x)$ besteht); solche Ringe wollen wir als Kongruenzringe bezeichnen. Wir

[1]) Vgl. zum Begriff des Ringes van der Waerden, Moderne Algebra, Bd. 1, (1930), Berlin, pp. 36 ff.

[2]) Wir setzen den Körperbegriff in der Allgemeinheit voraus, die ihm durch Steinitz in dessen klassischen Arbeit „Zur algebraischen Theorie der Körper", Crelles Journal, Bd. 137 (1910), pp. 167—309 verliehen wurde. Diese Abhandlung, auf die später nur mit „Steinitz" und Angabe der Seitenzahl Bezug genommen wird, ist auch in der Buchausgabe bei W. de Gruyter, Berlin, 1931, erschienen.

[3]) Vgl. hierzu die Originalabhandlungen von Dedekind in dessen gesammelten Abhandlungen, Bd. 1, Abh. XII, XV, XIX, wo noch die Bezeichnung „Ordnung" statt der von Hilbert später eingeführten „Ring" benutzt wird.